

三维问题的区域分解法、软件实现及其 在油藏数值模拟中的应用^{*1)}

戴民 石济民 林振宝

(香港理工大学应用数学系)

梁国平

(中国科学院数学研究所)

A DOMAIN DECOMPOSITION METHOD WITH NON-MATCHING GRIDS, SOFTWARE DEVELOPMENT AND APPLICATIONS TO RESERVOIR SIMULATION

Dai Min Shih Tsimin Liem Chinbo

(Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University)

Liang Guoping

(Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

In this paper, a non-matching non-overlapping domain decomposition method for solving 3-dimensional problems is presented. Based on the method, we developed a powerful software which is suitable for solving practical problems. An application to numerical reservoir simulation is given to demonstrate the method.

§1. 引言

作为偏微分方程数值解的新技术——区域分解方法的理论近十年来得到迅速发展,许多研究者提出了各种区域分解方法.但是能够真正把这些方法应用于实际问题且行之有效的软件并不多见.许多方法缺乏灵活性或一般性,不利于解决实际问题,特别是对三维问题,目前仍然停留在简单的算例试验.

[1]就二维问题基于有限元方法给出非协调区域分解的拉格朗日乘子法.该方法允许在不同的子区域采用不同的网格精度、不同的插值函数甚至不同类型的单元,

* 1995年11月16日收到.

1) 本课题部分由香港理工大学研究基金资助,基金编号350/284.

通过引入拉格朗日乘子来处理子区域交界面上的非协调性. 该方法采用多项式逼近拉格朗日乘子, 所产生的边界刚度矩阵的阶远远小于通常的区域分解方法. 在一般的条件下该方法具有与协调区域分解方法相同的精度.

本文将该方法推广到三维情形, 并保留二维情形的所有优点. 该方法易于程序实现, 非常适合处理实际问题. 借助于有限元程序自动生成系统^[6], 我们根据该方法研制了通用性很强的应用软件, 可以处理任意类型的方程. 该软件已经应用到油藏数值模拟等复杂的问题.

本文安排如下: 第二节构造离散问题; 第三节给出离散过程和算法; 第四节介绍所研制的软件; 最后给出该方法在油藏数值模拟中的一个应用.

§ 2. 离散问题的构造

考虑下述模型方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

这里 Ω 为三维空间的多面体, $\partial\Omega$ 为其边界.

将 Ω 分解成若干个互不相交的子区域 $\Omega_i: \bar{\Omega} = \bigcup_i \bar{\Omega}_i, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j$; 令 Γ_{ij} 是 Ω_i 和 Ω_j 的交界面, 记 $\Gamma = \bigcup \Gamma_{ij}$; 再将每个子区域 Ω_i 分割成若干个有限元 $\Omega_i^e, \bar{\Omega}_i = \bigcup_e \bar{\Omega}_i^e, \Omega_i^{e_l} \cap \Omega_i^{e_m} = \emptyset, l \neq m$.

$S_i^h \subset H^1(\Omega_i)$ 是 Ω_i 上的一个有限元空间, 记 $S_h(\Omega) = \prod_i S_i^h$. 定义

$$S_m(\Gamma) = \{ \mu(s), s \in \Gamma: \mu(s)|_{\Gamma_{ij}} \text{ 为 } m_{ij} \text{ 阶多项式} \},$$

易见 $S_h(\Omega) \subset \prod_i H^1(\Omega_i), S_m(\Gamma) \subset \prod_i H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$.

定义有限元空间 $S_{h \times m} = S_h(\Omega) \times S_m(\Gamma)$, 给出与方程 (1) 相应的离散问题: 求解 $(u, \lambda) \in S_{h \times m}$, 使得

$$\begin{cases} \sum_i \left[a_i(u, v) - \int_{\partial\Omega_i} \lambda v ds - (f, v)_i \right] = 0, & \forall v \in S_i^h, \forall i, \\ \sum_i \int_{\partial\Omega_i} u \mu ds = 0, & \forall \mu \in S_m(\Gamma), \end{cases} \quad (2)$$

这里 $a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} (\nabla u \nabla v + uv) dx, (f, v)_i = \int_{\Omega_i} f v dx$. 我们称 λ 为拉格朗日乘子, 它在 Ω_i 与 Ω_j 的交界面 Γ_{ij} 上沿 $\partial\Omega_i$ 与沿 $\partial\Omega_j$ 取值相同, 符号相反.

评注. 1. Γ_{ij} 也可取为交界面的一部分;

2. 该方法不要求两个相邻子区域的网格在其交界面上匹配, 这给网格生成以及局部加密带来很大方便.

§ 3. 离散过程和算法

问题 (2) 等价于如下问题: 对所有 i , 求 $u_i \in S_i^h$, $\lambda \in S_n(\Gamma)$, 使得

$$\begin{cases} a_i(u_i, v) - \int_{\partial\Omega_i} \lambda v ds - (f, v)_i = 0, & \forall v \in S_i^h, \\ \sum_i \int_{\partial\Omega_j} u_i \mu ds = 0, & \forall \mu \in S_m(\Gamma). \end{cases} \quad (3)$$

事实上, 这里 $u_i = u|_{\Omega_i}$.

关于离散问题 (3), 假定 $\varphi_1^i, \varphi_2^i, \dots, \varphi_{n_i}^i$ 是有限元空间 S_i^h 的基函数, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 为 $S_m(\Gamma)$ 的一组基 (有关这组基的选取参看本文附录), 令

$$u_i = \sum_{k=1}^{n_i} u_i^k \varphi_k^i, \quad v = \sum_{k=1}^{n_i} v_i^k \varphi_k^i, \quad \lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \psi_j.$$

将上式代入 (3), 得到方程的矩阵表示如下:

$$A_i U_i - B_i \lambda - F_i = 0, \quad (4)$$

$$\sum_i B_i^T U_i = 0. \quad (5)$$

由 (4) 得

$$U_i = A_i^{-1}(B_i \lambda + F_i). \quad (6)$$

将 (6) 式代入方程 (5), 得到如下关于拉格朗日乘子 λ 的方程:

$$\sum_i B_i^T A_i^{-1} B_i \lambda = - \sum_i B_i^T A_i^{-1} F_i, \quad (7)$$

称 $\sum_i B_i^T A_i^{-1} B_i$ 为边界刚度矩阵. 由上式解出 λ , 再回代到 (6) 式即可求得 U_i .

评注. 1. 从理论上讲, 如果解充分光滑, 则逼近拉格朗日乘子 λ 的多项式的阶越高, 效果越好. 在实际计算中, 每个交界面上 λ 的阶一般取为 2×2 或 3×3 即可 (注意到三维情形在每个交界面上拉格朗日乘子由二元多项式逼近). 可以看到, 与通常的区域分解方法比较, 这里的边界刚度矩阵的阶要小得多.

2. 我们可用迭代法求解方程 (7), 这时勿须合成总体边界刚度矩阵. 由于边界刚度矩阵的阶一般较小, 可以用直接法求解. 如使用通常的 LU 分解得到 $A_i = L_i U_i$, 这一分解的结果在方程 (7) 左端边界刚度矩阵和右端项的计算中以及回代过程中都将用到, 因此要储存 L_i, U_i . 在我们研制的软件中目前采用后者.

3. 可以类似导出关于依赖于时间的问题的算法 (参看第五节的应用).

4. 本方法各子区域之间的交换信息少, 十分适合并行计算.

§4. 软件简介

由于本方法具有很大的灵活性和一般性,不局限于某一类型问题,因此,宜于研制通用软件以尽可能解决更广泛的问题.

该方法基于有限元,在每个单元要进行单元刚度矩阵和单元荷载的计算,在每个子区域内要完成总体刚度矩阵和右端项的合成.众所周知,有限元程序相当复杂,许多有限元软件包为解决更多的问题需要一个庞大的程序库,不熟悉其程序库的人难以使用,而且对于新的问题,在已有的程序库里难以找到.我们的软件是在一个新发展的有限元软件——有限元程序自动生成系统^[6]的基础上研制的.该系统由计算机自动产生 FORTRAN 有限元程序,突破了现有有限元程序系统只适用于特定领域和特定有限元问题的限制.用户只需输入有限元方法所需的各种表达式和公式,即可自动产生所需的全部有限元程序.我们利用该系统产生单元子程序并完成单元刚度矩阵、单元荷载的计算和每个子区域的总体刚度矩阵和右端项的合成.

由于使用了这个有力工具,软件的应用范围相当广.它能够处理二维和三维问题;能够处理不超过四阶的任意方程或方程组;在每个子区域可以采用任意类型的单元;能够处理非线性耦合问题;能够处理依赖于时间的问题.

软件的设计是串行的,有适用于微机和 SUN 工作站两种版本.该软件不仅可以比通常的软件解决更复杂更大的问题,而且即使在通常的串行机上,计算速度也可以大大提高.

将该软件移植到并行机的工作正在进行中.

§5. 在油藏数值模拟中的应用

油藏数值模拟对确定最优的油田开采方案、提高采收率有十分重要的意义.由于计算量很大,如何在保证精度的前提下提高计算速度一直是人们关心的问题.

考虑油藏模拟中三维、可压、气水两相问题,其数学模型如下:

$$\nabla(a_l \nabla \Phi_l) + Q_l = \frac{\phi}{B_l} \left(\frac{\partial S_l}{\partial t} + S_l(C_\phi + C_l) \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} \right), \quad l = g, w, \quad (8)$$

$$P_{cw} = \Phi_g - \Phi_w - \Delta r Z, \quad (9)$$

$$S_g + S_w = 1, \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

初边值条件:

$$\Phi_g(x, 0) = \Phi_g^0, \quad S_w(x, 0) = S_w^0, \quad x \in \Omega,$$

$$a_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad (11)$$

这里 Φ_l, S_l 为未知函数, 分别表示 l 相的势与饱和度, $a_l = \frac{KK_{rl}}{\mu_l B_l} = a_l(\Phi_l, S_l)$, $P_{cw} = P_{cw}(S_w)$ 为毛管力, $\Delta r = r_w - r_g$, $B_l = B_l(\Phi_l)$ 为 l 相的体积系数, $C_g = C_g(\Phi_g)$, Q_l 为 l 相的产量, C_ϕ, C_w, r_l, ϕ 为与 $\Phi_l, S_l = (l = g, w)$ 无关的参数 [8].

将 (9) 和 (10) 代入 (8) 式, 消去 Φ_w 和 S_g , 得到关于 Φ_g 和 S_w 的方程如下:

$$\nabla(a_g \nabla \Phi_g) + Q_g = \frac{\phi}{B_g} \left(-\frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - S_w)(C_\phi + C_g) \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \nabla(a_w \nabla \Phi_g) - \nabla(a_w P'_{cw} \nabla S_w) - \nabla(a_w \nabla(\Delta r Z)) + Q_w \\ & = \frac{\phi}{B_w} \left((1 - S_w)(C_\phi + C_w) P'_{cw} \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w(C_\phi + C_w) \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

这是一组耦合的二阶非线性偏微分方程.

我们分别用标准的有限元方法与上述区域分解方法来离散这个问题并比较两种方法的结果.

(1) **有限元方法.** 假定 (Φ_g, S_w) 属于某个有限元空间 $V_h = (V_\Phi^h \times V_S^h)$. 结合边界条件, 方程的变分形式为

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega a_g \nabla \Phi_g \nabla \bar{\Phi}_g dx + \int_\Omega Q_g \bar{\Phi}_g dx \\ & = \int_\Omega \frac{\phi}{B_g} \left(-\frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - S_w)(C_\phi + C_g) \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} \right) \bar{\Phi}_g dx, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega a_w (\nabla \Phi_g - P'_{cw} \nabla S_w) \nabla \bar{S}_w dx + \int_\Omega (a_w \nabla(\Delta r Z) \nabla \bar{S}_w + Q_w \nabla \bar{S}_w) dx \\ & = \int_\Omega \frac{\phi}{B_w} \left((1 - S_w)(C_\phi + C_w) P'_{cw} \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w(C_\phi + C_w) \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} \right) \bar{S}_w dx, \end{aligned} \quad (15)$$

这里 $(\bar{\Phi}_g, \bar{S}_w) \in V_h$ 为 (Φ_g, S_w) 的变分.

我们用下式表示 (14), (15):

$$\int_\Omega m \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) dx + \int_\Omega a(u, v) dx = \int_\Omega f v dx, \quad (16)$$

这里 u, v 分别表示 $(\Phi_g, S_w), (\bar{\Phi}_g, \bar{S}_w)$.

对空间离散, 可以得到如下半离散方程的矩阵表示:

$$M(U) \frac{\partial U}{\partial t} + A(U)U = F(U), \quad (17)$$

这里 $M(U), A(U)$ 和 $F(U)$ 分别表示质量矩阵、刚度矩阵和荷载向量, 它们都依赖于未知向量 U .

用 $U^{n+1,k}$ 表示当前时间步的第 k 次迭代解, U^n 表示上一时间步的解. 在 (17) 中对时间采用向后差分离散, 得到

$$M(U^{n+1,k}) \frac{U^{n+1,k+1} - U^n}{\Delta t} + A(U^{n+1,k}) U^{n+1,k+1} = F(U^{n+1,k}),$$

即

$$(M(U^{n+1,k}) + \Delta t A(U^{n+1,k})) U^{n+1,k+1} = F(U^{n+1,k}) \Delta t + M(U^{n+1,k}) U^n, \quad (18)$$

这里 $M(U^{n+1,k})$, $A(U^{n+1,k})$, $F(U^{n+1,k})$ 分别表示 M, A, F 取第 k 次迭代步的值.

在第 $n+1$ 时间步的具体算法如下:

1. 置 $U^{n+1,0} = U^n$, $k = 0$, 并选定 ε_0 ;
2. 由方程 (18) 求解 $U^{n+1,k+1}$;
3. 如果 $\|U^{n+1,k+1} - U^{n+1,k}\| < \varepsilon_0$, 转到 5;
4. 置 $k = k + 1$, 转到 2;
5. 结束.

(2) 区域分解方法. 对区域进行剖分后, 从 (16) 出发, 引入拉格朗日乘子, 有

$$\int_{\Omega_i} m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}, v \right) dx + \int_{\Omega_i} a(u_i, v) dx - \int_{\partial \Omega_i} \lambda v ds = \int_{\Omega} f_i v dx, \quad \forall i,$$

$$\sum_i \int_{\partial \Omega_i} u_i \mu ds = 0.$$

今后的下标 i 表示与第 i 个子区域有关, 其余记号同前.

类似前面推导, 可得半离散方程如下:

$$M_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + A_i U_i - B_i \lambda = F_i, \quad (19)$$

$$\sum_i B_i^T U_i = 0. \quad (20)$$

在 (19) 式中, 对时间项采用向后差分离散, 得到

$$M_i \frac{U_i^{n+1,k+1} - U_i^n}{\Delta t} + A_i U_i^{n+1,k+1} - B_i \lambda = F_i.$$

从上式可以得到

$$U_i^{n+1,k+1} = \left(\frac{M_i}{\Delta t} + A_i \right)^{-1} \left(F_i + \frac{M_i}{\Delta t} U_i^n + B_i \lambda \right). \quad (21)$$

代入 (20) 得

$$\sum_i B_i^T \left(\frac{M_i}{\Delta t} + A_i \right)^{-1} \left(F_i + \frac{M_i}{\Delta t} U_i^n + B_i \lambda \right) = 0,$$

即

$$-\left(\sum_i B_i^T \left(\frac{M_i}{\Delta t} + A_i\right)^{-1} B_i\right) \lambda = \sum_i B_i^T \left(\frac{M_i}{\Delta t} + A_i\right)^{-1} \left(F_i + \frac{M_i}{\Delta t} U_i^n\right). \quad (22)$$

在第 $n+1$ 时间步的具体算法如下:

1. 置 $U_i^{n+1,0} = U_i^n$, $k = 0$, 并选定 ε_0 ;
2. 由方程 (22) 求解 λ ;
3. 将 λ 代入 (21) 求出 $U_i^{n+1,k+1}$;
4. 如果 $\sum_i \|U_i^{n+1,k+1} - U_i^{n+1,k}\| < \varepsilon_0$, 转到 6;
5. 置 $k = k + 1$, 转到 2;
6. 结束.

我们采用 [7] 的数据, 在 SUN SPARC-670MP 工作站上分别用上述两种方法对该问题进行数值模拟. 两种方法均采用八节点线性单元, 并采用相同的网格精度 ($12 \times 8 \times 15$). 这里有限元程序借助于 [6] 的有限元程度自动生成系统编写. 区域分解方法是将区域等分成六个子区域, 然后使用本软件编写程序.

在井点处 (该处 Φ_g 变化最大) 两种方法的 Φ_g 的计算结果与每次迭代所用 CPU 时间如下:

表 1 Φ_g 的计算结果比较

井点	方 法	30 天	60 天	90 天	120 天	150 天
1	有限元	195.06	194.11	193.30	192.52	191.76
1	区域分解	195.03	194.08	193.27	192.49	191.73
2	有限元	195.92	195.19	194.50	193.79	193.07
2	区域分解	195.90	195.17	194.47	193.77	193.04

表 2 CPU 时间对比

	平均每个时间步的迭代次数	每次迭代所需时间 (秒)
有限元方法	2.3	212
区域分解方法	2.3	114

可以看到, 两种方法的结果很接近, 即使在目前使用的串行机上, 区域分解方法也明显比有限元方法为快. 由于该方法适合于并行计算, 如将该软件移植到并行机上, 不考虑数据传递时间 (事实上所需传递的数据很少), 对该问题每次迭代所需时间约为 25 秒左右, 且子区域越多, 速度提高越明显.

鉴于现有的油藏数值模拟软件中绝大多数采用有限差分方法, 而对于油藏问题, 三线性单元当积分点取在顶点时其离散格式与中心差分等价^[9], 故也可以将上述区域分解方法移植到现有的油藏数值模拟软件中.

本方法已应用到多体形变^[4]和盆地模拟等问题.

参 考 文 献

- [1] 梁国平, 何江衡, 非协调区域分解的拉格朗日乘子, 计算数学, 14:2 (1992).
- [2] I. Babuska, The finite element method with Lagrangian multipliers, *Numer. Math.*, 20 (1973), 179-192.
- [3] J.L. Lions, E. Magenes, Non-Homogenous Boundary Value Problem and Application, Vol. I, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [4] L.B. Hilbert, JR, W. Yi, N.G.W. Cook, Y. Cai and G.P. Liang, A new discontinuous finite element method for interaction of many deformable bodies in geomechanics, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Balkema, Rotterdam, 1994.
- [5] 吕涛, 石济民, 林振宝, 区域分解算法, 科学出版社, 1992.
- [6] 梁国平, 有限元程序自动生成系统和有限元语言, 力学进展, 20:2 (1991).
- [7] 张厚清, 吕涛, 底水气藏三维模拟与分数步长算法, 石油学报, 7:4 (1986).
- [8] D.W. Peaceman, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier, Amsterdam, 1977.
- [9] L.C. Young, *A Finite-Element Method for Reservoir Simulation*, Society of Petroleum Engineers of AIME, 1981.