

三维椭圆问题三次有限元方程的 代数多层网格法^{*1)}

张红梅

(湘潭大学数学与计算科学学院, 湖南湘潭 411105)

肖映雄

(湘潭大学土木工程与力学学院, 湖南湘潭 411105)

舒 适

(湘潭大学数学与计算科学学院, 湖南湘潭 411105)

摘 要

通过分析三次有限元空间与线性有限元空间之间的关系, 提出了一种求解三维椭圆问题三次有限元方程的两水平方法. 然后, 通过调用现有的代数多层网格 (AMG) 法求解粗水平方程, 建立了求解三次有限元方程的 AMG 法, 并对其收敛性进行了严格的理论分析. 数值实验结果表明, 本文设计的 AMG 方法对求解三维椭圆问题三次有限元方程具有很好的计算效率和鲁棒性.

关键词: 代数多层网格, 三次元, 两水平方法, 四面体剖分

MR (2000) 主题分类: 65N55, 65N22

AMG METHOD FOR CUBIC FINITE-ELEMENT DISCRETIZATIONS OF ELLIPTIC PROBLEMS IN THREE DIMENSIONS

Zhang Hongmei

(School of Mathematics and Computational Science in Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Xiao Yingxiong

(Civil Engineering and Mechanics College in Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Shu Shi

(School of Mathematics and Computational Science in Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract

A two-level method is first proposed in this paper for cubic finite-element discretizations of elliptic problems with jump coefficients in three dimensions by analyzing the relationship between the linear finite-element space and cubic finite-element space. And then, an algebraic multigrid (AMG) method is obtained with the existing solver used as a solver on the

* 2007 年 7 月 1 日收到.

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目 (10771178, 10676031), 教育部重点项目和湖南省教育厅重点项目 (208093, 07A068), 高性能科学计算研究资助项目 (2005CB321702) 和湖南省自然科学基金联合基金资助项目 (07JJ6004).

first coarse level. Furthermore, the corresponding theoretical analysis is presented for the convergence of the constructed AMG algorithm. The results of various numerical experiments are shown that the resulting AMG method is robust and efficient for solving finite element equations discretized by cubic elements in three dimensions.

Keywords: Algebraic multigrid, Cubic element, Two-level method, Tetrahedron partition

2000 Mathematics Subject Classification: 65N55, 65N22

1. 引言

代数多层网格 (AMG) 法起源于上世纪 80 年代初, 它仅仅是利用代数方程中的系数矩阵的信息构造多层网格法的各个要素, 在几个要素中, 磨光算子相对固定和简单, 而主要研究它的各种粗化方法和技术, 不同的粗化方法得到不同的 AMG 形式, 现在常见的 AMG 法主要有: (1) 经典 (Classical) AMG 法, 它由 Brant, McCormick, Ruge 和 Stuben 等人于上世纪八十年代初提出, 并经过不断发展而形成的^[1,2]; (2) 基于能量极小基的 AMG 法^[6,14]; (3) 自适应 AMG 法^[15], 它通过自动调整插值算子和粗点选取等来获取最优的 AMG 效率; (4) 基于部分几何和分析信息的 AMG 法, 该 AMG 法通过利用部分相对容易获取的几何信息 (如网格) 或分析信息 (如方程类型) 等, 以增加经典 AMG 法的运算效率与适应范围. 这是目前代数多层网格法发展的一个新趋势. 目前常用的 AMG_e 和基于光滑聚集的 AMG 法均属于此类方法^[7,8]. 近年来, 文 [3-5] 针对一般椭圆问题的线性有限元方程, 比较系统研究了一类基于部分几何和分析信息的 AMG 法及其预条件子技术, 与通常的 AMG 法相比较, 这些新的算法具有更好的计算效率和鲁棒性.

上述各种 AMG 方法和技术对处理不同的复杂问题有不同的运行效率和鲁棒性, 目前还没有一种 AMG 法, 它对各类复杂的新问题, 均有很强的鲁棒性和高效性.

由于高次有限元对问题具有更好的逼近效果, 使得它们在实际计算中被广泛使用. 与线性有限元方程不同 (其刚度矩阵所对应的代数网格图与几何网格图一致), 对高次有限元方程, 通常的 AMG 法, 由于很难控制粗网格的自由度及合理设计插值算子, 其应用效果比线性元情形要差. 文 [9] 和 [10] 分别利用分层基的思想和一些特殊技术, 将经典 AMG 法直接应用于高次有限元方程的求解, 该方法对椭圆型方程具有较好的效率, 但对有些情形, 随着阶次的增加, 其求解效率将变得很差, 也没有给出相应的收敛性分析. 最近, 文 [11] 和 [12] 分别为二维椭圆问题高次有限元方程和三维椭圆问题二次有限元方程的求解设计了一种具有高效且鲁棒性好的 AMG 算法, 并对其收敛性给出了严格的理论分析.

本文我们研究三维椭圆问题三次有限元方程的 AMG 法. 首先, 利用节点基函数的紧支集性以及能量极小等性质, 并通过细致的分析, 建立了若干判定变量指标与所属几何节点类型对应关系的代数判据和相关理论, 基于这些结果解决线性元节点基函数用三次元节点基函数的代数表示这一关键问题, 从而建立了求解三次有限元方程的一种两水平 (two-level) 方法; 然后, 利用现有的 AMG 法 (近似) 求解粗水平方程, 进而得到了求解三次有限元方程的 AMG 法; 最后, 对 AMG 法的一致收敛性进行了严格的理论分析. 数值实验结果表明了新算法较经典 AMG 法具有明显的优势.

2. 模型问题及有限元离散

本文我们讨论如下模型问题:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot a(x)\nabla u = f, & x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega \subset R^3$, $a(x)$ 为一实值函数 (允许有间断), 满足 $0 < c_0 < a(x) < c_1$.

设 T^h 是区域 Ω 上的四面体剖分, 如图 1(a), (b) 所示, N 为处理 Dirichlet 边界后的节点总数, 其中 h 为 T^h 上所有剖分单元的最大直径. 定义三次 Lagrangian 有限元空间为:

$$V_h^3 = \{v : v \in C(\Omega), v|_{\tau} \in \mathcal{P}_3(\tau), \forall \tau \in T^h\} \quad (2.2)$$

其中 $\mathcal{P}_3(\tau)$ 表示单元 τ 上次数不超过 3 的多项式的全体. 图 1(c) 给出剖分单元中三次元的插值节点的分布情况.

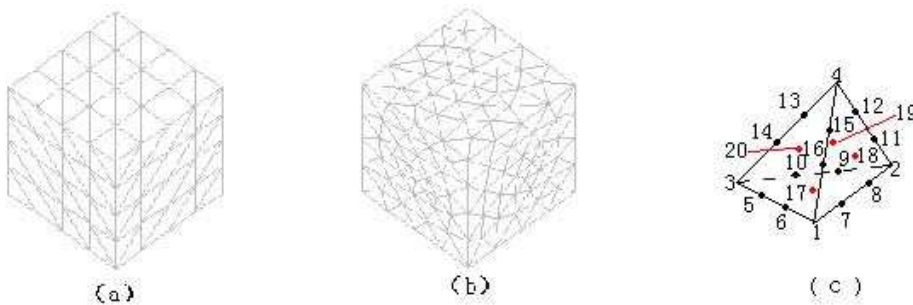


图 1 (a) 结构网格剖分 (b) 非结构网格剖分 (c) 三次元的插值节点的分布

记 Sobolev 空间 $H^m(\Omega) = \{v | \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$, $H_0^m(\Omega) = \{v | v \in H^m(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$. 称 $u_h^3 \in V_h^3$ 为问题 (2.1) 的三次拉格朗日有限元解函数, 如果它满足

$$a(u_h^3, v_h^3) = (f, v_h^3), \quad \forall v_h^3 \in V_h^3 \cap H_0^1(\Omega) \quad (2.3)$$

其中 $a(u, v) = \int_{\Omega} a(x)(u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2} + u_{x_3}v_{x_3})dx$, $(f, v) = \int_{\Omega} f v dx$.

变分问题 (2.3) 的有限元方程记为

$$A_{h,3}u_{h,3} = f_{h,3} \quad (2.4)$$

其中, 总刚度矩阵 $A_{h,3} = (a_{ij})$ 是 N 阶对称正定矩阵, $u_{h,3} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ 和 $f_{h,3} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ 均为 N 维列向量.

与线性有限元方程不同 (其刚度矩阵所对应的代数网格图与几何网格图一致), 对三次有限元方程 (其系数矩阵较线性元、二次元要更稠密), 通常的 AMG 法, 由于很难控制粗网格的自由度及合理设计插值算子, 其应用效果将变得很差. 下面, 我们将建立求解三次有限元方程 (2.4) 的高效 AMG 法.

3. 求解三次有限元方程的 AMG 法

对任给的四面体网格剖分 T^h , 我们将所有插值节点分为三类: 一类被称为 a 型点, 它是由所有网格剖分节点构成, 记为 X_a ; 一类被称为 e 型点, 它是由所有边上与端点的距离为 $\frac{1}{3}$

边长的点构成, 记为 X_e ; 另一类被称为 c 型点, 它是由所有单元的面上的形心构成, 记为 X_c . 记 S 为所有 (非 Dirichlet) 插值节点组成的指标集. 我们将 S 分成下列三个子集合:

$$\begin{aligned} S_a &= \{i : i \in S, x_i \in X_a\} \\ S_e &= \{i : i \in S, x_i \in X_e\} \\ S_c &= \{i : i \in S, x_i \in X_c\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 x_i 是与变量 u_i 相关联的节点. 设 N_a, N_e 和 N_c 分别是节点指标集 S_a, S_e 和 S_c 中的元素个数, 它们满足 $N = N_a + N_e + N_c$.

设 V_h^3 是关于网格 T^h 的三次 Lagrangian 有限元空间, $\{\gamma_i\}_{i \in S}$ 是相应的节点插值基函数, 满足

$$\gamma_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j \in S \quad (3.2)$$

对所有 $m_i \in S_a, i = 1(1)N_a, n_i \in S_e, i = 1(1)N_e$ 和 $l_j \in S_c, i = 1(1)N_c$, 引入基函数向量: $\Upsilon^a := (\gamma_{m_1}, \dots, \gamma_{m_{N_a}})^T, \Upsilon^e := (\gamma_{n_1}, \dots, \gamma_{n_{N_e}})^T, \Upsilon^c := (\gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_{N_c}})^T$, 以及如下矩阵

$$\begin{aligned} a(\Upsilon^a, \Upsilon^a) &:= (a_{ij}^{aa})_{N_a \times N_a}, \quad a(\Upsilon^a, \Upsilon^e) := (a_{ij}^{ae})_{N_a \times N_e}, \quad a(\Upsilon^a, \Upsilon^c) := (a_{ij}^{ac})_{N_a \times N_c}, \\ a(\Upsilon^e, \Upsilon^a) &:= (a_{ij}^{ea})_{N_e \times N_a}, \quad a(\Upsilon^e, \Upsilon^e) := (a_{ij}^{ee})_{N_e \times N_e}, \quad a(\Upsilon^e, \Upsilon^c) := (a_{ij}^{ec})_{N_e \times N_c}, \\ a(\Upsilon^c, \Upsilon^a) &:= (a_{ij}^{ca})_{N_c \times N_a}, \quad a(\Upsilon^c, \Upsilon^e) := (a_{ij}^{ce})_{N_c \times N_e}, \quad a(\Upsilon^c, \Upsilon^c) := (a_{ij}^{cc})_{N_c \times N_c}, \end{aligned}$$

则三次有限元方程 (2.4) 的系数矩阵 $A_{h,3}$ 可写为如下形式:

$$A_{h,3} = \begin{pmatrix} a(\Upsilon^a, \Upsilon^a) & a(\Upsilon^a, \Upsilon^e) & a(\Upsilon^a, \Upsilon^c) \\ a(\Upsilon^e, \Upsilon^a) & a(\Upsilon^e, \Upsilon^e) & a(\Upsilon^e, \Upsilon^c) \\ a(\Upsilon^c, \Upsilon^a) & a(\Upsilon^c, \Upsilon^e) & a(\Upsilon^c, \Upsilon^c) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

为了构造求解三次有限元方程 (2.4) 的 AMG 法, 首先从几何上探讨相应的两水平 (two-level) 法的设计思想.

由于 γ_i 的支集性, 因此对任意的指标 $i \in S_a, k \in S$, 我们引入如下指标集

$$\begin{aligned} S_i^e &= \{j : \text{supp } \gamma_i \cap \text{supp } \gamma_j \neq \emptyset, j \in S_e\} \\ S_i^{e1} &= \{j : \text{supp } \gamma_j \subseteq \text{supp } \gamma_i, j \in S_e\} \\ S_i^c &= \{j : \text{supp } \gamma_j \subseteq \text{supp } \gamma_i, j \in S_c\} \\ S_k &= \{j : \text{supp } \gamma_k \cap \text{supp } \gamma_j \neq \emptyset, j \in S\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

在与三次有限元空间 V_h^3 相同的 T^h 下, 我们引入相应的线性有限元空间 V_h^1 , 并记相应的线性插值节点基函数为 $\{\psi_i\}_{i \in S_a} \in V_h^1$, 它们满足:

$$\psi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad i \in S_a, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.5)$$

注意 $V_h^1 \subset V_h^3$, 由 (3.2) 和 (3.5) 以及 $\psi_i(x), i \in S_a$ 的紧支集性质, 我们有

$$\psi_i(x) = \gamma_i(x) + \frac{1}{3} \sum_{k \in S_i^c} \gamma_k + \sum_{(j,k) \in S_i^{e12}} \left(\frac{2}{3} \gamma_j + \frac{1}{3} \gamma_k \right), \quad (3.6)$$

其中 S_i^c 由式 (3.4) 定义, 而指标集合 S_i^{e12} 是所有连接 e -型节点 x_j 和 x_k 的指标偶对 (j, k) 的集合, 这里 x_j 和 x_k 是落在与节点 x_i 相邻的某一条边上的两个 e -型节点, 并且节点 x_j 到端点 x_i 的距离 (为 $\frac{1}{3}$ 边长) 比节点 x_k 到端点 x_i 的距离 (为 $\frac{2}{3}$ 边长) 要近 (见图 2(a)).

设 $\Psi := (\psi_{k_1}, \dots, \psi_{k_{N_a}})^T, k_i \in S_a$, 则 (3.6) 可改写为如下矩阵形式

$$\Psi = P_c^l \begin{pmatrix} \Upsilon^a \\ \Upsilon^e \\ \Upsilon^c \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

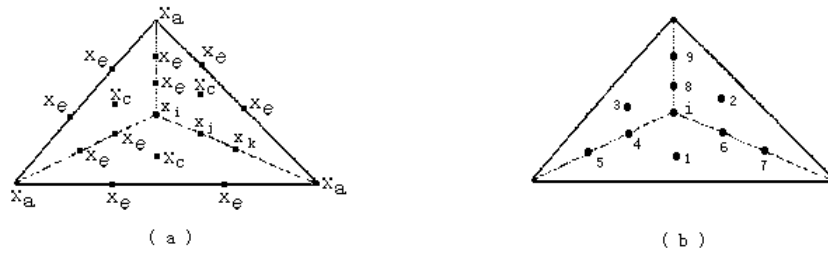


图 2 (a) a, e, c 三类不同的节点, x_j, x_k 在与 x_i 相邻的一条边上; (b) $S_i^c = \{1, 2, 3, \dots\}$, $S_i^{e1} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$, $S_i^{e12} = \{(4, 5), (6, 7), (8, 9), \dots\}$.

其中 P_c^l 是一 $N_a \times N$ 矩阵.

选取 P_c^l 作为从 V_h^3 到 V_h^1 的限制算子 (矩阵), $P_l^c = (P_c^l)^T$ 为从 V_h^1 到 V_h^3 的提升矩阵. 利用 (3.3) 和 (3.7), 我们可得如下粗水平方程 (线性有限元方程) 的系数矩阵

$$A_H := (a(\Psi, \Psi)) = P_c^l A_{h,3} (P_c^l)^T \quad (3.8)$$

这样, 我们就可给出求解三次有限元方程 (2.4) 的两水平 (two-level) 法:

算法 3.1. (两水平 (two-level) 法)

步 1. 前光滑: $u_{h,3} := u_{h,3} + S(f_{h,3} - A_{h,3}u_{h,3})$, $j = 1, \dots, m_1$

步 2. 精确求解粗水平方程: $A_H e_H := P_l^c (f_{h,3} - A_{h,3}u_{h,3})$

步 3. 校正: $u_{h,3} := u_{h,3} + P_l^c e_H$

步 4. 后光滑: $u_{h,3} := u_{h,3} + S(f_{h,3} - A_{h,3}u_{h,3})$, $j = 1, \dots, m_2$

其中 S 为光滑算子, 本文取 Gauss-Seidel 迭代, m_1 和 m_2 分别为前、后光滑次数.

由算法 3.1 的构造过程知, 为了构造求解方程 (2.4) 的 AMG 法, 我们需要通过代数途径解决以下两个问题:

问题 1. 如何通过系数矩阵 $A_{h,3}$ 求得指标集 S_a , S_e 和 S_c .

问题 2. 对任一给定的指标 $i \in S_a$, 如何求得指标集 S_i^c 和 S_i^{e12} .

首先, 讨论问题 1. 假设单元刚度矩阵中的任一元素的行和列对应的节点为非 Dirichlet 边界点时, 才将它叠加到总刚度矩阵 $A_{h,3}$ 中, 并以稀疏形式存储在 ja, a, ia 中 (见文 [11]). 显然, 总刚度矩阵的稀疏形式 ia, ja, a 中存在行号和列号分别为 i 和 j 的元素的充要条件是: i 和 j 所对应的节点 x_i 和 x_j 均不落在 Dirichlet 边界上, 并且位于同一个四面体单元中, 或者说:

$$\text{supp } \gamma_i \cap \text{supp } \gamma_j \neq \emptyset. \quad (3.9)$$

进一步, 设对任意 $i \in S_a$, 至少存在 θ 个与 x_i 相邻的四面体单元 (显然有 $\theta \geq 5$). 于是我们可以得到如下命题:

命题 3.1. 对于给定的 (几何) 网格图 T^h , 则有

(1) 对于任意固定的点 $i \in S_a$, $S_i/\{i\}$ 中至少存在 $4\theta + 2$ 个指标 $k_l (l = 1(1)4\theta + 2)$ 都满足 $S_{k_l} \subseteq S_i$.

(2) 对于任意固定的点 $i \in S_e$, $S_i/\{i\}$ 中至少存在 3 个指标 $k_l (l = 1(1)3)$ 都满足 $S_{k_l} \subseteq S_i$.

(3) 对于任意固定的点 $i \in S_c$, $S_i/\{i\}$ 中的任意指标 j 都满足 $S_j \not\subseteq S_i$.

证明. (1) 对任意固定的 $i \in S_a$, 由于至少存在 θ 个与 x_i 相邻的四面体单元, 所以至少存在 $(\theta + 1)$ 个以 x_i 为顶点的边 (棱) 和 2θ 个以 x_i 为顶点的面, 而每条边上有 2 个插值点和每个面上有 1 个形心插值点. 记这些点分别为 $x_{k_l}, x_{j_l} (l = 1(1)(\theta + 1))$ 和 $x_{k_c} (c = 1(1)2\theta)$. 显然有 $S_{k_l} \subseteq S_i / \{i\}, S_{j_l} \subseteq S_i / \{i\} (l = 1(1)(\theta + 1))$ 和 $S_{k_c} \subseteq S_i / \{i\} (c = 1(1)2\theta)$. 即上述结论 (1) 成立.

(2) 对任意固定的 $i \in S_e$, 由于 e -型点相邻单元数一定不多于同一边上的 a -型点的相邻单元数, 但至少存在一个与 x_i 相邻的四面体单元, 所以至少存在两个与 x_i 同一面上的形心插值点 $x_{k_c} (c = 1(1)2)$, 且有 $S_{k_c} \subseteq S_i$. 又因为与 i 点在同一条边上的节点 x_k 有 $S_k = S_i$. 因此结论 (2) 成立.

(3) 只需注意: 对任意固定的 $i \in S_c$, 在 $S_i / \{i\}$ 中的任意指标 j, S_j 中至少存在一个指标, 其对应的节点落在与 x_i 相邻的四面体单元之外. 因此结论 (3) 成立.

由于 θ 至少取 5, 我们进一步假设: 对于所有固定的指标 $j \in S_e, S_j / \{j\}$ 中的满足 $S_k \subseteq S_j$ 的指标 k 的总数少于 22, 且大于 3; 对通常的三维四面体网格剖分, 对于任意固定的指标 $j \in S_c$ 所对应的基函数的支集内的点 x_k 一般都不满足 $S_k \subseteq S_j$. 由以上命题 3.1 我们可以得到如下判断准则:

判断准则 3.1. 对于任意指标 $i \in S$, 如果至少存在 σ 个指标 $k_l \in S_i / \{i\}, l = 1(1)\sigma$, 满足 $S_{k_l} \subseteq S_i$, 则指标 i 所对应的节点 x_i 为 a -型点; 否则至少存在 μ 个指标 $k_l \in S_i / \{i\}, l = 1(1)\mu$, 满足 $S_{k_l} \subseteq S_i$, 则指标 i 所对应的节点 x_i 为 e -型点; 反之则为 c -型点.

注 3.1. 对通常的三维四面体网格剖分, 由于 θ 的值一般来说大于 4, 只有有限的少数几个边界 a -型点的相邻单元数为 2, 而计算中只对内部点进行算法设计, 即命题中的 (1) 具有相当的普适性. 在某些极端的网格剖分下存在个别点指标 $j \in S_c$ 不满足以上假设而被选为 e -型点, 但由于其数量很少, 所以对算法效率所产生的影响也是很小的.

为了区别各个节点的不同类型, 我们引入如下标记数组:

$$\text{irr}(k) := \begin{cases} 1, & x_k \in X_a, \\ 2, & x_k \in X_e, \\ 3, & x_k \in X_c. \end{cases} \quad k = 1(1)N$$

由判断准则 3.1, 我们易于求得标记数组 $\text{irr}(k), k = 1(1)N$. 利用该标记数组, 我们可得到 N_a, N_e, N_c, N 和指标集 S_a, S_e, S_c . 算法 3.2 给出标记数组的算法描述.

算法 3.2.

For $i = 1$ to N

 将 $ja(k)$ 放入 S_i 中, $k = ia(i), \dots, ia(i + 1) - 1$.

End For

For $i = 1$ to N

$ip = 0$

 For $k = ia(i)$ to $ia(i + 1) - 1$

 If $(S_{ja(k)} \subseteq S_i)$ $ip = ip + 1$

 End For

 If $(ip \geq \sigma)$ $\text{irr}(i) = 1$

 If $(\mu \leq ip < \sigma)$ $\text{irr}(i) = 2$

 If $(ip < \mu)$ $\text{irr}(i) = 3$

End For

注 3.2. 在算法 3.2 中, 如果 σ 和 μ 难以确定, 我们一般可简单取 $\sigma = 22, \mu = 1$.

下面, 我们讨论问题 2. 首先, 对任意固定的指标 $i \in S_a$, 我们将给出找指标集 S_i^c 的代数方法.

判断准则 3.2. 对任意固定的指标 $i \in S_a$, 在条件 (3.9) 下, 我们得到

- (1) 指标 $k \in S_i^{e1}$, 当且仅当 $k \in S_e$ 且 $\text{supp}\gamma_k \subseteq \text{supp}\gamma_i$.
- (2) 指标 $k \in S_i^c$, 当且仅当 $k \in S_c$ 且 $\text{supp}\gamma_k \subseteq \text{supp}\gamma_i$.

由上述判断准则 3.2, 对任意固定的 $i \in S_a$, 我们易于得到相应的指标集 S_i^c .

下面, 对任意固定的指标 $i \in S_a$, 我们定义如下指标集:

$$S_i^{ee} = \{(j, k) : S_j = S_k \subseteq S_i, j, k \in S_e\}$$

其中指标偶对 (j, k) 和 (k, j) 被认为是一对相同的指标.

然后, 对任意固定的指标 $i \in S_a$, 我们给出确定指标集 S_i^{ee} 的代数方法.

判断准则 3.3. 对任意固定指标 $i \in S_a$, 在条件 (3.9) 下, $(j, k) \in S_i^{ee}$ 的充分必要条件是 $\text{supp}\gamma_j = \text{supp}\gamma_k \subseteq \text{supp}\gamma_i$

由判断准则 3.3, 可先求出指标集 S_i^{e1} , 再借助 S_i^{e1} 我们易得指标集 S_i^{ee} .

最后, 对任意固定的指标 $i \in S_a$, 我们将设计出一种算法去确定出指标集 S_i^{e12} . 该算法的关键是: 对任给定的指标偶对 $(j, k) \in S_i^{ee}$, 其相应的节点分别是 x_j 和 x_k , 如何通过代数途径确定其中某一节点在几何位置上比另一个节点要更靠近节点 x_i .

因为节点基函数 γ_j 和 γ_k 的紧支集完全相同, 所以我们只有通过其它代数方法去区别它们. 为了简单起见, 我们假设在问题 (2.1) 中的系数 $a(x)$ 是分片常数, 并记 $a(x) := a_\tau, x \in \tau$ 这里 a_τ 为常数 $\tau \in T^h$.

令线性元空间 V_h^1 中的节点 x_i 对应的基函数为 $\psi_i, i \in S_a$, 它满足如下性质:

$$\psi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad i \in S_a, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.10)$$

显然, 对任意固定的 $i \in S_a$, 相应的线性有限元基函数 $\psi_i(x)$ 满足:

- (1) $\psi_i(x)$ 在任一与节点 x_i 相连的边 (棱) 上是一个线性代数多项式函数.
- (2) $\psi_i(x_c) = \frac{1}{3}$, 其中 x_c 是某一与节点 x_i 相邻面上的形心.

令 n_i 是指标集 S_i^{ee} 的元素个数, 利用上述性质, $\psi_i(x)$ 可以被表示成:

$$\psi_i(x) = \gamma_i(x) + \frac{1}{3} \sum_{\mu \in S_i^c} \gamma_\mu(x) + \sum_{l=1}^{n_i} (\alpha_l \gamma_{j_l}(x) + (1 - \alpha_l) \gamma_{k_l}(x)) \quad (3.11)$$

其中 (j_l, k_l) 是 S_i^{ee} 中的第 l 对指标, 且 $\alpha_l \in [0, 1], l = 1(1)n_i$ 是待定常数.

下面, 我们讨论 $\{\alpha_l\}_{l=1}^{n_i}$ 的代数性质. 对任意的 $i \in S_a$, 设

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_l(x) &= \gamma_{j_l}(x) - \gamma_{k_l}(x), \\ \gamma(x) &= \gamma_i(x) + \frac{1}{3} \sum_{\mu \in S_i^c} \gamma_\mu(x) + \sum_{l=1}^{n_i} \gamma_{k_l}(x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

由 (3.11) 和 (3.12), 我们可得到:

$$\psi_i(x) = \gamma(x) + \sum_{l=1}^{n_i} \alpha_l \tilde{\gamma}_l(x), \quad \alpha_l \in [0, 1]. \quad (3.13)$$

设 $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_i})^T$ 且有

$$J(\alpha) = a(\psi_i, \psi_i)$$

其中, 双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 由式 (2.3) 定义.

利用该二次函数, 我们定义如下极小问题: 求 $\alpha^* \in R^{n_i}$, 使得

$$J(\alpha^*) = \min_{\alpha \in R^{n_i}} J(\alpha). \quad (3.14)$$

其中

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= a(\psi_i(x), \psi_i(x)) = a(\gamma(x) + \sum_{l=1}^{n_i} \alpha_l \tilde{\gamma}_l(x), \gamma(x) + \sum_{l=1}^{n_i} \alpha_l \tilde{\gamma}_l(x)) \\ &= \sum_{l=1}^{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} \alpha_l \alpha_m a(\tilde{\gamma}_l(x), \tilde{\gamma}_m(x)) + 2 \sum_{l=1}^{n_i} \alpha_l a(\tilde{\gamma}_l(x), \gamma(x)) + a(\gamma(x), \gamma(x)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

定理 3.1. 极小问题 (3.14) 存在唯一的解向量 α^* , 且相应的函数

$$\psi_i^*(x) := \gamma_i(x) + \frac{1}{3} \sum_{\mu \in S_i^c} \gamma_\mu(x) + \sum_{l=1}^{n_i} (\alpha_l^* \gamma_{j_l}(x) + (1 - \alpha_l^*) \gamma_{k_l}(x))$$

为线性有限元空间关于节点 x_i 的基函数.

证明. 首先我们证明极小问题 (3.14) 解的存在性和唯一性. 由于泛函 $\tilde{\gamma}_l(x) (l = 1(1)n_i)$ 的紧支集性质, 可得 $\{\tilde{\gamma}_l(x)\}_{l=1}^{n_i}$ 是线性无关的. 又由式 (3.15), 我们能得到问题 (3.14) 的唯一的解向量 α^* 满足

$$\tilde{A}\alpha^* = \tilde{F} \quad (3.16)$$

其中系数矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{l,m})_{n_i \times n_i}$ 的元素 $\tilde{a}_{l,m} = a(\tilde{\gamma}_l, \tilde{\gamma}_m)$, 右端项 $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n_i})^T$ 的元素 $\tilde{f}_l = -a(\tilde{\gamma}_l, \gamma)$.

式 (3.16) 等价于

$$a(\tilde{\gamma}_l, \psi_i^*) = 0, \quad l = 1(1)n_i \quad (3.17)$$

其中 $\psi_i^*(x) = \gamma(x) + \sum_{l=1}^{n_i} \alpha_l^* \tilde{\gamma}_l(x)$, 即节点 x_i 处的线性基函数 $\psi_i(x)$ 可表达成 (3.11). 为了证明该定理, 只需证明节点 x_i 处的线性基函数 $\psi_i(x)$ 满足 (3.17).

设 m_i 为与剖分点 x_i 相邻的所有四面体单元数, $\tau_k (k = 1(1)m_i)$ 为相应的四面体单元, 由 ψ_i 和 $\tilde{\gamma}_l$ 的紧支集性, 对任意的 $l (1 \leq l \leq n_i)$ 我们有

$$\begin{aligned} a(\tilde{\gamma}_l, \psi_i) &= \sum_{k=1}^{m_i} \int_{\tau_k} a_{\tau_k} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz \\ &= a_{\tau_1} \int_{\tau_1} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz + a_{\tau_2} \int_{\tau_2} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz \\ &\quad + a_{\tau_3} \int_{\tau_3} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz + a_{\tau_4} \int_{\tau_4} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中 $\tilde{\gamma}_l$ 由 (3.12) 定义, 设单元 τ_1 和单元 τ_2 相邻面为 e_2 ; 单元 τ_1 和单元 τ_4 相邻面为 e_1 ; 单元 τ_2 和单元 τ_3 相邻面为 e_3 ; 单元 τ_3 和单元 τ_4 相邻面为 e_4 (见图 3 (a)). 由于 $\psi_i(x) \in \mathcal{P}_1$, $x \in \tau_1$ 并利用 Green 公式有

$$0 = \int_{\tau_1} \Delta \psi_i \tilde{\gamma}_l dx dy dz = \int_{\partial \tau_1} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \tilde{\gamma}_l ds - \int_{\tau_1} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz \quad (3.19)$$

其中 n 是单位外法向量, $\partial \tau_1$ 是四面体单元 τ_1 的四个面.

由 $\tilde{\gamma}_l$ 的紧支集性和式 (3.19), 我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz &= \int_{\partial \tau_1} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \tilde{\gamma}_l ds = \int_{e_1} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \tilde{\gamma}_l ds + \int_{e_2} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \tilde{\gamma}_l ds \\ &= \frac{\partial \psi_i}{\partial n} (\int_{e_1} (\gamma_{j_l} - \gamma_{k_l}) ds + \int_{e_2} (\gamma_{j_l} - \gamma_{k_l}) ds) \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中 $\frac{\partial \psi_i}{\partial n}$ 是常数.



图 3 (a) $\tilde{\gamma}_l$ 支集内的单元 (b) 标准三角形 \hat{e}_1 上的插值点 j_l 和 k_l

进一步, 把 e_1 映射到标准三角形单元 \hat{e}_1 上 (见图 3 (b)), \hat{e}_1 上三次元节点插值为 $\hat{\gamma}_{j_l} = \frac{9}{2}\xi(1-\xi-\eta)(3\xi-1)$; $\hat{\gamma}_{k_l} = \frac{9}{2}\xi(1-\xi-\eta)(3(1-\xi-\eta)-1)$. 因而有

$$\begin{aligned} \int_{e_1} (\gamma_{j_l} - \gamma_{k_l}) dx dy &= \int_{\hat{e}_1} (\hat{\gamma}_{j_l} - \hat{\gamma}_{k_l}) |J| d\xi d\eta \\ &= \frac{9}{2} |e_1| \int_{\hat{e}_1} (\xi(1-\xi-\eta)(3\xi-1)) - \xi(1-\xi-\eta)(2-3\xi-3\eta) d\xi d\eta \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中 $|e_1|$ 是相邻面 e_1 的面积. 同理, 可得 $\int_{e_2} (\gamma_{j_l} - \gamma_{k_l}) ds = 0$. 将上两式代入式 (3.20) 得到

$$\int_{\tau_1} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz = 0 \quad (3.21)$$

类似地, 有

$$\int_{\tau_2} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz = 0; \quad \int_{\tau_3} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz = 0; \quad \int_{\tau_4} \nabla \psi_i \nabla \tilde{\gamma}_l dx dy dz = 0. \quad (3.22)$$

将 (3.21) 和 (3.22) 代入式 (3.18), 可得 $a(\tilde{\gamma}_l, \psi_i) = 0$, $l = 1(1)n_i$.

通过定理的证明, 我们知道方程 (3.16) 的解一定是 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$. 因此, 对任意给定的 $i \in S_a$, 我们能得到如下求 $S_i^{e_{12}}$ 的判断准则.

判断准则 3.4. 对任意固定的 $i \in S_a$, 设 α^* 是方程 (3.16) 的解向量, 如果 $\alpha_i^* = \frac{2}{3}$, 那么 $(j_l, k_l) \in S_i^{e_{12}}$, 否则 $(k_l, j_l) \in S_i^{e_{12}}$.

通过判断准则 3.1 ~ 判断准则 3.4, 由矩阵 $A_{h,3}$ 我们能得到从 V_h^3 到 V_h^1 的 $N_a \times N$ 限制矩阵 P_c^l , 具体描述如下:

算法 3.3. (限制算子)

$n_e = 0$

For $i = 1$ to N

If ($irr(i) = 1$) 则

$n_e = n_e + 1$; $P_c^l(n_e, i) = 1$

$P_c^l(n_e, k_c) = \frac{1}{3}$ 对所有 $k_c \in S_i^c$

$P_c^l(n_e, k) = \frac{1}{3}$; $P_c^l(n_e, j) = \frac{2}{3}$ 对所有 $(j, k) \in S_i^{e_{12}}$

End If

End For

取提升矩阵 $P_c^l = (P_c^l)^T$, 粗水平方程的系数矩阵 $A_H = P_c^l A_{h,3} (P_c^l)^T$, 因此我们可得到求解三次有限元方程 (2.4) 的代数两水平法. 利用现有的 AMG 法 (近似) 求解粗水平方程, 进而得到求解三次有限元方程 (2.4) 的 AMG 法.

算法 3.4. [AMG 法]

步 0. (预处理)

- (1) 通过矩阵 $A_{h,3}$, 并利用算法 3.2, 求得标识数组 irr, 进而求得指标集合 S_a, S_e, S_c ;
- (2) 对所有的指标 $i \in S_a$, 利用判断准则 3.2, 求得指标集合 S_i^c ;
- (3) 利用判断准则 3.4, 求得指标集合 S_i^{e12} ;
- (4) 利用算法 3.3, 求得限制矩阵 P_c^l ;
- (5) 求提升矩阵 $P_l^c = (P_c^l)^T$;
- (6) 求粗水平方程系数矩阵 $A_H := P_c^l A_{h,3} P_l^c$.

步 1. 前光滑: $u_{h,3} := u_{h,3} + S(f_{h,3} - A_{h,3}u_{h,3}), j = 1, \dots, m_1$.

步 2. 利用现有的 AMG 法 (近似) 求解下列粗水平方程:

$$A_H e_H := P_c^l (f_{h,3} - A_{h,3}u_{h,3}) \quad (3.23)$$

步 3. 校正: $u_{h,3} := u_{h,3} + P_l^c e_H$.步 4. 后光滑: $u_{h,3} := u_{h,3} + S(f_{h,3} - A_{h,3}u_{h,3}), j = 1, \dots, m_2$.

我们已将上述 AMG 法集成到目前国际上流行的并行数值软件包 Hypre^[16] 中. 为了验证算法 3.4 对求解三次有限元方程的有效性和鲁棒性, 我们与 Hypre^[16] 中的经典 AMG 解法器 BoomerAMG^[17] 进行了比较, 其中 Boomer AMG 解法器中的强弱连通阈值均取为 $\alpha = 0.5$. 取以下数值例子:

设 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, 系数 $a(x) = 1$, 精确解为 $u(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(2\pi x_3)$. 对区域 Ω 进行四面体网格剖分, 设为 T^h , 它可通过以下两步得到: 首先, 将区域 Ω 分别沿 x_1, x_2 和 x_3 方向进行等距剖分, 设每个方向的剖分段数均为 n ; 其次, 将第一步得到的每个六面体单元一致地剖分为六个四面体单元. 记有限元解 u_h 与精确解之间的离散误差为 $\|u - u_h\|_{0,\Omega} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nnm} (u(i) - u_h(i))^2}{nnm}}$, 其中, nnm 为总自由度.

在数值实验中, 我们仅考虑单进程情形, 即 $P = 1$. 分别利用 Boomer AMG 和本文构造的 AMG 法求解节点基下三次有限元方程 (2.4), 相应的数值结果如表 1 所示, 两种 AMG 法的迭代控制精度均为 $\|r_k\|/\|r_0\| < 10^{-6}$, 其中 r_k 和 r_0 分别是当前的和初始的误差向量. 表格中的 CPU 时间包括所有网格预处理和多层网格迭代所需计算时间的总和. 在 AMG 算法 3.4 中, 前、后光滑次数分别取为 $m_1 = 3$ 和 $m_2 = 3$, 调用一次 Boomer AMG 解法器求解粗水平方程 (3.23).

表 1 两种 AMG 法求解节点基下三次有限元方程的数值比较结果

n	Boomer AMG			本文构造的 AMG 法		
	iter	CPU/s	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	iter	CPU/s	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$
8	17	1.24	1.18E-4	11	0.29	1.18E-4
16	23	16.88	7.53E-6	9	2.39	7.50E-6
32	30	216.58	4.92E-6	10	26.07	4.89E-6

注 3.3. 在该算例中, 由于我们对网格节点采用了一种特殊编号顺序, 即先排所有剖分节点, 再排所有边内点 (先排离端点距离为 $1/3$ 的点, 再排另一个点), 最后排所有面内点, 使得在判定变量指标与所属几何节点类型的对应关系以及确定限制算子 P_c^l 时的运算效率大大提高, 因而得到的 AMG 法求解速度很快.

另外, 为更加说明本文所构造的 AMG 法的高效性和鲁棒性, 我们还对在分层基下得到的三次有限元方程进行了求解. 设在分层基 (HB)^[18,19] 下, 相应的三次有限元方程为

$$A_{h,3}^{HB} u_{h,3}^{HB} = f_{h,3}^{HB},$$

分别利用 Boomer AMG 和本文构造的 AMG 法求解上述三次有限元方程, 数值结果如表 2 所示, 其中在 AMG 算法 3.4 中, 前、后光滑次数分别取为 $m_1 = 5$ 和 $m_2 = 5$.

表 2 两种 AMG 法求解分层基下三次有限元方程的数值比较结果

n	Boomer AMG			本文构造的 AMG 法		
	iter	CPU/s	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	iter	CPU/s	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$
8	57	8.38	1.41E-4	16	0.61	1.41E-4
16	87	175.54	8.76E-6	17	6.88	8.75E-6
20	90	328.94	3.61E-6	17	13.88	3.58E-6
32	119	> 1000.00	5.48E-7	17	56.25	5.42E-7

以上数值结果表明: 通常的 AMG 法, 如 Boomer AMG, 直接应用于三次有限元方程的数值求解, 特别是求解分层基下的三次有限元方程时, 其收敛性大大变差. 而本文构造的 AMG 法不管是求解节点基还是分层基下的三次有限元方程, 均具有很好的运算效率和鲁棒性, 可应用于实际大规模三次有限元计算.

注 3.4. 在上述各表格中, “iter” 为达到给定控制精度所需要的迭代次数, 其中, 对 Boomer AMG 法为所需要的代数多层网格 V-循环的次数, 而对本文构造的 AMG 法而言, “iter” 为达到给定控制精度所需要的代数两水平迭代方法的次数.

注 3.5. 当采用分层基时, 可直接由最细网格矩阵 $A_{h,3}^{HB}$ 得到粗水平方程 A_H , 此时不再需要生成网格转换矩阵 P_c^l 及 P_l^c , 本文构造的 AMG 法也将变得更加简单.

4. 收敛性分析

本节给出求解三维椭圆问题三次有限元方程 (2.4) 的 AMG 算法 3.4 的收敛性分析. 对任一个给定的四面体网格剖分 T^h , 令 $V_1 = V_h^1 \subset H_0^1(\Omega)$ 为线性有限元空间, $V_3 := V_h^3 \subset H_0^1(\Omega)$ 为三次有限元空间, $n := \dim(V_3)$, 而 γ_i ($i = 1(1)n$) 为与节点 x_i 相对应的基函数.

定义从空间 $H_0^1(\Omega)$ 到 V_k 的能量投影算子 P_k , $k = 1$ 或 3 , 它满足

$$a(P_k u, v_k) = a(u, v_k) \quad \forall v_k \in V_k$$

其中 $a(\cdot, \cdot)$ 是由式 (2.3) 定义的能量内积.

进一步, 记子空间 $V_3^i = \text{span}\{\gamma_i\}$, $i = 1(1)n$, 我们定义从 $H_0^1(\Omega)$ 到 V_3^i 的投影算子 P_3^i , 即对 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, 满足:

$$a(P_3^i v, \gamma_i) = a(v, \gamma_i)$$

假设 T^h 是一形状正则 (shape-regular)(定义见文 [11]) 的四面体网格剖分, 并且在问题 (2.1) 中, 对任一四面体单元 $\tau \in T^h$, (间断) 系数 $a(x) := a_\tau$, $x \in \tau$, 其中 a_τ 是常数.

下面, 我们来讨论 AMG 算法 3.4 的收敛性. 为简单起见, 设在该算法中, 我们取 $m_1 = 1, m_2 = 0$. 在求解相应的粗水平方程 (简记为 $A_1 u_1 = f_1$) 时, 只调用一次 Boomer AMG 法进行近似求解, 其迭代格式为:

$$u_1 := u_1 + B_1(f_1 - A_1 u_1)$$

其中 B_1 被称为求解粗水平方程的迭代算子.

设 Boomer AMG 法的收敛率 $\delta_1 < 1$, 即对 $T_1 = B_1 A_1 P_1$, 有:

$$\| (I - T_1)v_1 \|_a = \| (I - B_1 A_1)v_1 \|_a \leq \delta_1 \| v_1 \|_a \quad \forall v_1 \in V_1 \quad (4.1)$$

由式 (4.1) 可得:

$$\| v_1 \|_a - \| T_1 v_1 \|_a \leq \| (I - B_1 A_1)v_1 \|_a \leq \delta_1 \| v_1 \|_a \quad \forall v_1 \in V_1$$

由此可以导出

$$(1 - \delta_1) \| v_1 \|_a \leq \| T_1 v_1 \|_a \quad \forall v_1 \in V_1$$

因此, 我们得到 T_1 的逆算子 T_1^{-1} 的估计式:

$$\| T_1^{-1} v_1 \|_a \leq (1 - \delta_1)^{-1} \| v_1 \|_a \quad \forall v_1 \in V_1 \quad (4.2)$$

由文 [13] 可知, 算法 3.4 的收敛率 δ 满足以下估计式:

$$\delta^2 = \frac{C_0}{1 + C_0},$$

其中

$$C_0 = \sup_{v \in V_3, \|v\|_a=1} \inf_{v=v_1 + \sum_{i=1}^n v_3^i} ((T_1 \bar{T}_1^{-1} T_1^* w_1, w_1) + \sum_{i=1}^n \| P_3^i \sum_{j=i+1}^n v_3^j \|_a^2) \quad (4.3)$$

而算子

$$\bar{T}_1 = T_1^* + T_1 - T^* T_1; \quad w_1 = \sum_{i=1}^n v_3^i + v_1 - T_1^{-1} v_1 \quad (4.4)$$

引理 4.1. 在 (4.1) 的假设下, 我们可得

$$a(\bar{T}_1^{-1} v_1, v_1) \leq (1 - \delta_1^2)^{-1} \| v_1 \|_a^2, \quad \forall v_1 \in V_1 \quad (4.5)$$

$$\| T_1 \|_a \leq 1 + \delta_1, \quad \| T_1^* \|_a \lesssim (1 + \delta_1) \quad (4.6)$$

证明. 参见文 [12].

对任给的 $v \in V_3$, 我们作如下分解:

$$v = v_1 + v_3, \quad v_1 := I_1 v \in V_1, \quad v_3 := v - v_1 = \sum_{i=1}^n v_3^i \in V_3 \quad (4.7)$$

其中 $v_3^i \in V_3^i, i = 1(1)n$, 而 I_1 是从 H_0^1 到线性元空间 V_1 的插值算子.

在分解式 (4.7) 下, 利用引理 4.1, 我们有:

$$\begin{aligned} (T_1 \bar{T}_1^{-1} T_1^* w_1, w_1) &= (\bar{T}_1^{-1} T_1^* w_1, T_1^* w_1) \leq (1 - \delta_1^2)^{-1} \| T_1^* w_1 \|_a^2 \\ &\lesssim (1 - \delta_1^2)^{-1} (1 + \delta_1)^2 \| w_1 \|_a^2 = (1 - \delta_1)^{-1} (1 + \delta_1) \| w_1 \|_a^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

而且, 利用式 (4.2), (4.4) 和式 (4.7), 对任意的 $v \in V_3$ 均有:

$$\begin{aligned} \| w_1 \|_a^2 &= \| \sum_{i=1}^n v_3^i + v_1 - T_1^{-1} v_1 \|_a^2 = \| v - T_1^{-1} I_1 v \|_a^2 \\ &\leq 2(\| v \|_a^2 + (1 - \delta_1)^{-2} \| I_1 v \|_a^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

结合式 (4.8) 和式 (4.9) 得:

$$(T_1 \bar{T}_1^{-1} T_1^* w_1, w_1) \lesssim 2(1 + \delta_1)(1 - \delta_1)^{-1} (\| v \|_a^2 + (1 - \delta_1)^{-2} \| I_1 v \|_a^2) \quad (4.10)$$

引理 4.2. 对 $\forall v \in V_3$, 有

$$\|v - I_1 v\|_a \lesssim \|v\|_a \quad (4.11)$$

并且, 对 $\forall \tau \in T^h$

$$\|v - I_1 v\|_{0,\tau} \lesssim h_\tau |v|_{1,\tau}. \quad (4.12)$$

其中, h_τ 表示四面体单元 τ 的直径, 并且 $|v|_{1,\tau}^2 = \int_\tau |\nabla v|^2 dx$.

利用引理 4.2, 我们可导出

$$\|I_1 v\|_a \lesssim \|v\|_a + \|v - I_1 v\|_a \lesssim \|v\|_a. \quad (4.13)$$

结合式 (4.10) 和式 (4.13) 我们可得到

引理 4.3. 在分解式 (4.7) 和假设条件 (4.1) 下, 对任意的 $v \in V_3$, 我们得到:

$$(T_1 \bar{T}_1^{-1} T_1^* w_1, w_1) \lesssim \frac{1 + \delta_1}{(1 - \delta_1)^3} \|v\|_a^2 \quad (4.14)$$

其中算子 \bar{T}_1 和函数 w_1 由式 (4.4) 所定义.

引理 4.4. 设 T^h 是一形状正则的四面体网格剖分, 则对 $\forall v \in V_3$, 有:

$$\sum_{i=1}^n \|P_3^i \sum_{j=i+1}^n v_3^j\|_a^2 \lesssim \|v\|_a^2 \quad (4.15)$$

其中 $v_3 = v - I_1 v = \sum_{i=1}^n v_3^i$, $v_3^i \in V_3^i$, $i = 1(1)n$.

证明. 对 $\forall v \in V_3$, 利用 $v_3^i(x) = v_3(x_i) \gamma_i(x)$, $i = 1(1)n$ 及基函数 γ_i 的紧支集性质和引理 4.2, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|P_3^i \sum_{j=i+1}^n v_3^j\|_a^2 &= \sum_{i=1}^n \|P_3^i \sum_{j=i+1}^n v_3^j\|_{a,\Omega_i}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|\sum_{j=i+1}^n v_3^j\|_{a,\Omega_i}^2 \\ &\lesssim \sum_{i=1}^n \|v_3^i\|_{a,\Omega_i}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{x_i \in \tau} \|v_3^i\|_{a,\tau}^2 \\ &\lesssim \sum_{\tau \in T^h} \sum_{x_i \in \tau} \|v_3^i\|_{a,\tau}^2 \lesssim \sum_{\tau \in T^h} \sum_{x_i \in \tau} a_\tau h_\tau |v_3(x_i)|^2 \\ &= \sum_{\tau \in T^h} a_\tau h_\tau^{-2} \sum_{x_i \in \tau} h_\tau^3 |v_3(x_i)|^2 \lesssim \sum_{\tau \in T^h} a_\tau h_\tau^{-2} \|v_3\|_{0,\tau}^2 \\ &= \sum_{\tau \in T^h} a_\tau h_\tau^{-2} \|v - I_1 v\|_{0,\tau}^2 \\ &\lesssim \sum_{\tau \in T^h} a_\tau |v|_{1,\tau}^2 = \|v\|_a^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

结合引理 4.3, 4.4, 我们可以得到本文的主要理论结果:

定理 4.1. 设 T^h 是一形状正则的四面体网格剖分, 如果求解粗水平方程的 AMG 法的收敛率 δ_1 与方程的规模和系数的间断性无关, 则求解三次有限元方程的 AMG 算法 3.4 的收敛率与方程的规模和系数的间断性无关.

致谢: 对湘潭大学曹放和王俊仙两位同学在本文数值实验中所给予的帮助表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Brandt A, McCormick S and Ruge J. Algebraic multigrid (AMG) for automatic multigrid solution with application to geodetic computations, Technical report, Inst. for Comp. Studies, Fort Collins, 1982.

- [2] Ruge J W and Stüben K. Algebraic multigrid, In S. F. McCormick, editor, Multigrid methods, Frontiers in applied mathematics, pages 73-130, Philadelphia, Pennsylvania, 1987, SIAM.
- [3] Shu Shi, Xu Jinchao, Yang Ying and Yu Haiyuan. An algebraic multigrid method for finite element systems on criss-cross grids[J]. Advances in Computational Mathematics, 2006, 25: 287-304.
- [4] 舒适, 黄云清, 阳莺, 蔚喜军. 一类三维等代数结构面网格剖分下的代数多重网格法 [J]. 计算物理, 2005, 22(6): 480-488.
- [5] 谭敏, 肖映雄, 舒适. 一种各向异性四边形网格下的代数多重网格法 [J]. 湘潭大学自然科学学报, 2005, 27(1): 78-84.
- [6] Xu J and Zikatanov L. On the energy minimizing base for algebraic multigrid methods[J]. Comput. Visual Sci., 2004, 7: 121-127.
- [7] Vanek P, Mandel J and Brezina M, Algebraic multigrid by smoothed aggregation for second and fourth order elliptic problems[J]. Computing, 1996, 56(3): 179-196.
- [8] Brezina M, Cleary A J, Falgout R D, Henson V E, Jones J E, Manteuffel T A, McCormick S F and Ruge J W. Algebraic multigrid based on element interpolation(AMGe)[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2000: 22(5): 1570-1592.
- [9] Ruge J. AMG for higher-order discretizations of second-order elliptic problems, in: Abstracts of the Eleventh Copper Mountain Conference on Multigrid Methods (<http://www.mgnet.org/mgnet/Conferences/CopperMtn03/Talks/ruge.pdf>), 2003.
- [10] Heys J J, Manteuffel T A, McCormick S F and Olson L N. Algebraic Multigrid (AMG) for Higher-Order Finite Elements[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 204: 520-532.
- [11] 孙杜杜, 舒适, 求解三维高次拉格朗日有限元方程的代数多重网格法 [J]. 计算数学, 2005, 27: 101-112.
- [12] Shu Shi, Sun Dudu and Xu Jinchao. An Algebraic Multigrids for Higher Order Finite Element discretizations[J]. Computing, 2006, 77: 347-377.
- [13] Xu J and Zikatanov L. The method of alternating projections and the method of subspace corrections on Hilbert space[J]. Journal of the American Mathematics Society, 2002, 15: 1429-1446.
- [14] Brezina M, Mandel J and Vaněk P. Energy optimization of algebraic multigrid bases[J]. Computing, 1999, 62(3): 205-228.
- [15] Brezina M, Falgout R, MacLachlan S, Manteuffel T, McCormick S, and Ruge J. Adaptive algebraic multigrid[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2006, 27(4): 1261-1286 (electronic).
- [16] Hypre: High performance preconditioners. <http://www.llnl.gov/CASC/hypre>.
- [17] Henson V E, Yang U M. BoomerAMG: a Parallel Algebraic Multigrid Solver and Preconditioner[J]. Applied Numerical Mathematics, 2002, 41: 155-177.
- [18] Bank R, Dupont T and Yserentant H. The Hierarchical basis multigrid method[J]. Numer. Math., 1988, 52: 427-458.
- [19] Yserentant H. On the multi-level splitting of finite element spaces[J]. Numer. Math., 1986, 49: 379-412.