三维空间距离加权最小二乘插值方法在脑电地形图上的应用*1)

周龙旗　樊英杰　王东辉　吕　宏
（广州第一军医大学生物医学工程系）

A METHOD OF 3-D SPATIAL LEAST SQUARES INTERPOLATION WITH THE NEGATIVE EXPONENT WEIGHT OF DISTANCE WITH APPLICATION IN 3-D EEG MAPPING

Zhou Long-qi　Fan Ying-jie　Wang Dong-hui　Lu Hong
(Department of Biomedical Engineering, First Military Medical University, Guangzhou)

Abstract

In this paper, a new method of 3-D spatial interpolation is presented, which is characterized by minimizing the error between the measured value and the computed value at the measured points in the sense of least squares, and some fast computing algorithms are discussed. This method is used the 3-D brain EEG mapping system and proved successful. Some experimental results are given.

（一）引　言

数学插值计算在计算机图形显示中有特别重要的意义，如平面曲线、空间曲线以及空间曲面的描绘都用到一维和二维的插值技术.这些方面的研究已取得许多成果，如曲线的描绘就有样条曲线、Bezier 曲线和B样条曲线等方法；而曲面的描绘也有 Coons 曲面、Bezier 曲面和B样条曲面等方法. 这些比较成熟的方法都以各自的特点解决了由一些数据点就能描绘出光顺曲线和曲面的问题.

但是，还有一类三维空间插值问题还没有得到深入的研究，即某一空域 $K(K \in R, R$ 是三维欧氏空间)内有 N 个点 (X_{ei}, Y_{ei}, Z_{ei}) 的测量值 V_{ei} 已知 $(i = 0, 1, \cdots, N-1)$、希望从这 N 个测量点的测量值求出空域 K 中每个点 $P(X, Y, Z)$ 的值 V. 这个测量值含义很广泛，它可以是温度或湿度，也可以是人脑各部位的电位情况.

这方面的研究工作曾有人提出场累加 (Field Summation) 方法. 这个方法的基本思想是：把每个测量点作为一个能量源，其能量大小就是测量值，每个能量源在空间向四周辐射，辐射能量以距离按 Gaussian 衰减函数衰减. 那么，空域 K 中某点 $P(X, Y, Z)$

* 1992年1月30日收到.
1) 国家自然科学基金资助项目.

的值 V 就是各能量源达到该点的能量和，即

$$V = \sum_{i=0}^{N-1} V_{ei} e^{-r_i/B}, \tag{1}$$

其中

$$r_i = (X_{ei} - X)^2 + (Y_{ei} - Y)^2 + (Z_{ei} - Z)^2, \tag{2}$$

B 是衰减因子.

这场累加地形法有如下两方面的缺陷：

1. 从(1)式可以分析出，在各测量点的计算值 V_{ei} 与该点测量值 V_{ei} 之间存在误差 ΔV_i. 因为 V_{ei} 是 V_{ei} 和其它测量值在该点的贡献之和. 显然第 i 个测量点的测量值与它的计算值之间的误差就是

$$\Delta V_i = \sum_{j=0, j\neq i}^{N-1} V_{ej} e^{-r_j/B}. \tag{3}$$

可推知在测量点邻域内也存在较大误差.

2. 衰减因子 B 是调节这种误差的手段，但是 B 是通过大量统计实验确定的，也很难保证各点误差都尽量地小. 另外，一旦变动测量点的位置，那么就要重新确定 B.

本文提出了一种新的三维空间插值方法，其特点在于使测量点的测量值与计算值之间的误差在最小二乘意义下达到最小，而且能方便任意变动测量点的位置，并讨论了求解的快速方法. 本插值方法在显示大脑电位分布的三维脑电地形图系统中得到了很好的应用.

（二）方 法 原 理

假设我们得到空域 K 中 N 个测量点 P_{ei} 的某量的测量值 V_{ei}，其测量点的位置坐标是 (X_{ei}, Y_{ei}, Z_{ei}) $(i = 0,1,\cdots,N-1)$. 希望求出空域 K 中任意位置点 $P(x,y,z)$ 的值 V. 为此，我们可以找到一个关于 x、y 和 z 的二次多项式

$$V(x,y,z) = f_0 + f_1x + f_2y + f_3z + f_4xy + f_5xz + f_6yz + f_7x^2 + f_8y^2 + {}_9z^2, \tag{4}$$

其中 $f_j (j = 0,1,\cdots,9)$ 是待定系数.

然后在最小二乘的意义下尽可能好地拟合测量点的测量值. 但是，与通常最小二乘意义不同的是我们要求靠近 $P(x,y,z)$ 的测量点要比远离 $P(x,y,z)$ 的测量点具有更大的权数，即要选取系数 f_j，以便使按距离加权的最小二乘函数

$$Q = \sum_{i=0}^{N-1} (V(X_{ei}, Y_{ei}, Z_{ei}) - V_{ei})^2 \cdot W(d_i) \tag{5}$$

达到极小，其中

$$d_i = (X_{ei} - x)^2 + (Y_{ei} - y)^2 + (Z_{ei} - z)^2, \tag{6}$$

$$W(d_i) = e^{-d_i/B} \quad (i = 0,1,\cdots,N-1), \tag{7}$$

d_i 是第 i 个测量点 P_{ei} 与点 P 的距离，$W(d_i)$ 是权函数. 当 P 接近 P_{ei} 时，它的值比较大，在远离时，它的值比较小. B 是 $d_i(i = 0,1,\cdots,N-1)$ 的平均值.

要使 Q 达到极小，必须使 Q 关于系数 f_j 的偏微分为零，即

$$\frac{\partial Q}{\partial f_j}=0\ (j=0,1,\cdots,9). \tag{8}$$

因此可得到正则方程

$$E\cdot F=U, \tag{9}$$

式中

$$E=\begin{bmatrix} D_1 & D_a & D_b & D_c & D_{ab} & D_{ac} & D_{bc} & D_{aa} & D_{bb} & D_{cc} \\ & D_{aa} & D_{ab} & D_{ac} & D_{aab} & D_{aac} & D_{abc} & D_{aaa} & D_{abb} & D_{acc} \\ & & D_{bb} & D_{bc} & D_{abb} & D_{abc} & D_{bbc} & D_{aab} & D_{bbb} & D_{bcc} \\ & & & D_{cc} & D_{abc} & D_{acc} & D_{bcc} & D_{aac} & D_{bbc} & D_{ccc} \\ & & & & D_{aabb} & D_{aabc} & D_{abbc} & D_{aaab} & D_{abbb} & D_{abcc} \\ & & & & & D_{aacc} & D_{abcc} & D_{aaac} & D_{abbc} & D_{accc} \\ & \text{对称} & & & & & D_{bbcc} & D_{aabc} & D_{bbbc} & D_{bccc} \\ & & & & & & & D_{aaaa} & D_{aabb} & D_{aacc} \\ & & & & & & & & D_{bbbb} & D_{bbcc} \\ & & & & & & & & & D_{cccc} \end{bmatrix}$$

$$F=[f_0,f_1,f_2,\cdots,f_9]^T,$$

$$U=[D_u,D_{ua},D_{ub},D_{uc},D_{uab},D_{uac},D_{ubc},D_{uaa},D_{ubb},D_{ucc}]^T,$$

$$D_x=\sum_{i=0}^{N-1}D_{xi}=\sum_{i=0}^{N-1}X_iW(d_i)(X=1,a,b,c,u,ab,bc,\cdots),$$

$$a_i=X_{ei},\ b_i=Y_{ei},\ c_i=Z_{ei},u_i=V_{ei},$$

$$(ab)_i=a_i\cdot b_i,(ac)_i=a_i\cdot c_i,(bc)_i=b_i\cdot c_i,\cdots,$$

即 D_x 的下标 x 表示和号内的相乘因子 X_i,X_i 与测量点 i 有关。

从式(9)可看出，E 中只有 35 个不同的矩阵元素，U 中有 10 个不同的元素。对每个测量点 i，计算 $W(d_i)$ 需一次指数运算。计算 W 与该点 a、b、c 和 u 的 45 个不同乘积需 45 次乘法运算，因为每个乘积 $X_i\cdot W$ 都可以次数较少的乘积项作一次乘法递推求得。对 N 个测量点求和，得到生成 E 和 U 的全部元素，共需要 N 次指数运算，$45N$ 次乘法运算和 $45(N-1)$ 次加法运算。

至此，生成系数矩阵 E 和右端矢量 U 的计算量在很大程度上取决于测量点的个数 N。从本插值方法原理和生成 E 与 U 的过程可分析出，由于权系数 $W(d_i)$ 的影响，只有那些靠近点 P 的测量点 P_{ei} 的系数矩阵 E_i 和右端矢量 U_i 的元素值才是非零的，远离点 P 的测量点 P_{ei} 的 E_i 和 U_i 的元素值很小，几乎为零。因此，我们可以对点 P 和测量点 P_{ei} 之间的距离 d_i 作一判断。当 d_i 太大时，就不用生成该测量点的系数矩阵 E_i 和右端矢量 U_i。因为影响点 P 插值的测量点是很有限的几个，大部分测量点对点 P 插值的影响甚微。因此，这样作的积极效果是非常显著的，能大大提高运算效率，而引起的误差不大，在下一节的计算实例中将说明这种影响。

（三） 插值计算实例

本插值方法在我们的三维脑电地形图系统中得到了很好的应用。三维脑电地形图系统通过人脑上 16 个电极测量出脑电位值，并用本插值方法插值得到非电极位置的脑电位值。然后在计算机建立的三维大脑显示模型上以不同的色彩显示出这种脑电位的分布情况，以达到在临床上定位检查人脑疾病的目的。

在此，空域 K 就是三维大脑显示模型上的所有点，测量值就是脑电位值，测量点的位置就是电极安放位置，电极个数就是测量点的个数 N，这里 N 为 16。

表 1　FST 方法的测量值与计算值及误差

测量点序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
测量值 V_{ei}	52	45	79	69	71	77	84	145	78	133	31	43	35	181	35	181
计算值 V_{ci}	58	52	80	70	72	80	85	147	82	142	31	44	35	182	39	187
$((V_{ei}-V_{ci})/V_{ei})100\%$	−12	−16	−2	−2	−2	−4	−1	−1	−5	−7	0	−2	0	−1	−12	−3

表 2　本方法的测量值与计算值及误差（临近点数为 5）

测量点序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
测量值 V_{ei}	52	45	79	69	71	77	84	145	78	133	31	43	35	181	35	181
计算值 V_{ci}	51	45	78	68	71	78	83	140	77	133	31	45	34	179	35	180
$((V_{ei}-V_{ci})/V_{ei})100\%$	2	0	1	1	0	−1	1	3	1	0	0	−5	3	1	0	0

表 3　不同临近点数的测量值与计算值的误差百分比：$((V_{ei}-V_{ci})/V_{ei})\times 100\%$

临近点数 / 测量点序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	2	0	1	1	0	−1	1	3	1	0	0	−5	3	1	0	0
6	2	0	1	1	0	−1	1	3	1	0	0	−4	3	1	0	0
7	2	0	1	1	0	−1	1	2	1	0	0	−3	3	1	0	0
8	2	0	1	1	0	−1	1	2	1	0	0	−2	2	1	0	0
9	2	0	1	1	0	−1	1	2	1	0	0	−2	1	1	0	0

表 1、2 分别是这两种方法的测量点的测量值、计算值和它们之间的误差，从表中数据可看出来用本方法得到的计算值和它的测量值之间的误差比 FST 方法要小得多。表 3 表示出了考虑不同个数邻近插值点的测量点进行插值所得到的测量值与计算值之间的误差。从表中可看出，被考虑邻近插值点的测量点的个数当大于 5 时，其误差基本一样。

参　考　文　献

[1] 周龙旗等，一种 EEG 地形图三维显示系统的研制，中国医疗器械杂志，第 3 期(1992)。
[2] 周龙旗等，层次化大脑三维数学模型的建立，计算机应用与软件，第 2 期(1993)。