

解三维对流-扩散方程的 一个迭代格式*

王 汝 权

(中国科学院计算中心)

周 保 民

(航天工业部)

AN ITERATIVE SCHEME FOR A THREE-DIMENSIONAL ADVECTION-DIFFUSION EQUATION

Wang Ru-quan

(Computing Center, Academia Sinica)

Zhou Bao-min

(The Chinese Academy of Space Technology)

Abstract

This paper presents an iterative scheme for the three-dimensional advection-diffusion equation by using the zig-zag difference instead of the central difference as in [2, 3] for approximation to the advection terms. As a result the new scheme is free of the restriction on the grid spacing in [2, 3].

在许多数学物理问题中,常常会遇到求解对流扩散方程的问题。对方程中只含对流项或只含扩散项的情况,已有许多较成熟的方法。但是,当二者同时存在且扩散系数很小时,数值求解是十分困难的。有些常用的隐式差分格式,在二维情形是绝对稳定的,而三维情形可能是条件稳定的^[1]。此外,对三维问题,主要是设计最经济的算法,以便大量减少计算机的存储量及计算时间。局部一维化的隐式交替方向法是十分有效的,但在某些情况下并不理想^[2]。为此,通常采用迭代的隐式差分格式^[2,3],它的存储量小,编制程序简单。遗憾的是,这类格式由于迭代往往引进步长的限制条件,因而与显式格式无多大区别。本文将对 [2,3] 中提出的迭代隐式差分格式加以改进,使之对网格步长没有任何限制。

* 1983 年 2 月 23 日收到。

一、中心隐式迭代格式

如[2]考虑下列偏微分方程

$$u_x + a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial u}{\partial \varphi} = c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

其中 a, b, c, d 可以是 x, y, u 的函数。本文只讨论常系数情形,且 $c, d \geq 0$ 。设 x 方向的网格为 $\mathcal{Q}_{\Delta x} = \{x_i = i\Delta x, i = 0, 1, \dots\}$, y 方向的网格为 $\mathcal{Q}_{\Delta y} = \{y_j = j\Delta y, j = 0, 1, \dots, M+1\}$, φ 方向的网格为 $\mathcal{Q}_{\Delta \varphi} = \{\varphi_k = k\Delta \varphi, k = 0, 1, \dots, k\}$ 。于是,所求解的空间网格为

$$\mathcal{Q}_{\Delta} = \mathcal{Q}_{\Delta x} \times \mathcal{Q}_{\Delta y} \times \mathcal{Q}_{\Delta \varphi}.$$

令 $U_{i,j,k} = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta \varphi)$, 通常对方程(1)中的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ 可用以下中心差分公式代替:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j,k} = (U_{i+1,j+1,k} - U_{i+1,j-1,k})/(2\Delta y), \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i+1,j,k} = (U_{i+1,j+1,k} - 2U_{i+1,j,k} + U_{i+1,j-1,k})/\Delta y^2, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_{i+1,j,k} = (U_{i+1,j,k+1} - U_{i+1,j,k-1})/(2\Delta \varphi), \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)_{i+1,j,k} = (U_{i+1,j,k+1} - 2U_{i+1,j,k} + U_{i+1,j,k-1})/\Delta \varphi^2. \end{cases} \quad (2)$$

偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 取向后差商

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j,k} = (U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k})/\Delta x. \quad (3)$$

将(2)式及(3)式代入方程(1)经整理后,得到文献[2]中的 Helliwell-Lubard 格式(简称 HL 格式)

$$\begin{aligned} U_{i+1,j,k}^{(n+1)} + \frac{a\Delta x}{2\Delta y} (U_{i+1,j+1,k}^{(n+1)} - U_{i+1,j-1,k}^{(n+1)}) + \frac{b\Delta x}{2\Delta \varphi} (U_{i+1,j,k+1}^{(n)} - U_{i+1,j,k-1}^{(n)}) \\ - \frac{c\Delta x}{\Delta y^2} (U_{i+1,j+1,k}^{(n+1)} - 2U_{i+1,j,k}^{(n+1)} + U_{i+1,j-1,k}^{(n+1)}) \\ - \frac{d\Delta x}{\Delta \varphi^2} (U_{i+1,j,k+1}^{(n)} - 2U_{i+1,j,k}^{(n+1)} + U_{i+1,j,k-1}^{(n)}) = U_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 n 代表迭代次数。对固定值 $x = x_{i+1}$ 迭代收敛后,格式(4)是无条件稳定的隐式格式。为了分析格式(4)的迭代收敛性,文献[2]用富利叶分析方法。令

$$\begin{cases} U_{i+1,j,k}^{(n+1)} = \lambda^{n+1} e^{i(m_1 j \Delta y + m_2 k \Delta \varphi)}, \\ U_{i+1,j,k}^{(n)} = \lambda^n e^{i(m_1 j \Delta y + m_2 k \Delta \varphi)}. \end{cases} \quad (5)$$

将(5)式代入(4),并略去右端可得到增长因子 λ 的代数方程。若 $|\lambda| < 1$, 则迭代过程是收敛的。对于格式(4),文献[2]推得下列收敛条件:

$$\Delta x < \Delta \varphi / |b|. \quad (6)$$

应指出,上述条件当系数 d 为零时是成立的. 一般情况下,应近似满足下列条件:

$$|\alpha| < 1 + 2\delta, \quad (7)$$

其中 $\alpha = b \frac{\Delta x}{\Delta \varphi}$, $\delta = d \frac{\Delta x}{\Delta \varphi^2}$. 数值试验表明,实际计算过程并不受条件(6),而受条件(7)约束. 仅当扩散系数 d 很小,因而 δ 也很小时,才可认为迭代的收敛条件为(6). 它相当于显式差分格式的库朗条件,当步长 Δx 足够大或网格非均匀分布时,常导致迭代的发散(参看算例). 此外,用 HL 格式解简化 Navier-Stokes 方程时,会带来难以克服的困难. 这是因为一方面不适定的初边值问题要求推进解法的步长满足不等式

$$\Delta x \geq O(\Delta y^2 + \Delta \varphi^2), \quad (8)$$

另一方面,由于迭代收敛性的要求, Δx 必须满足条件(6),这在有些情况下是难以做到的^[2].

二、迎风隐式迭代格式

基于以上理由,设计一种无条件收敛的迭代格式是十分必要的. 事实上,若将对流项 $\left(b \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_{i+1,j,k}$ 用下列迎风隐式迭代格式来代替就能做到这一点. 即

$$\left(b \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_{i+1,j,k} = \begin{cases} b \frac{U_{i+1,i,k}^{(n+1)} - U_{i+1,i,k-1}^{(n+1)}}{\Delta \varphi}, & \text{当 } b \geq 0 \text{ 时,} \\ b \frac{U_{i+1,j,k+1}^{(n)} - U_{i+1,j,k}^{(n+1)}}{\Delta \varphi}, & \text{当 } b < 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (9)$$

但(9)式只有一阶精度,通常是不可取的,为此可用迎风的 Z 字形差分公式逼近对流项. 它具有二阶逼近精度,即

$$\left(b \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_{i+1,j,k} = \begin{cases} \frac{b}{2} \left(\frac{U_{i+1,i,k}^{(n+1)} - U_{i+1,i,k-1}^{(n+1)}}{\Delta \varphi} + \frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,i,k}}{\Delta \varphi} \right), & \text{当 } b \geq 0 \text{ 时,} \\ \frac{b}{2} \left(\frac{U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1}}{\Delta \varphi} + \frac{U_{i+1,j,k+1}^{(n)} - U_{i+1,j,k}^{(n+1)}}{\Delta \varphi} \right), & \text{当 } b < 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (10)$$

Z 字形格式在文献中早已使用,如一步 Krause 格式^[5]及二步 MacCormack 格式即属此类格式. 在文献[4]中,我们采用了迎风 Z 字形格式,其目的是为了得到主元素占优势的线代数方程组,以保证追赶法的稳定性. 对方程(1)而言,就是对流项 $a \frac{\partial u}{\partial y}$ 取下列近似:

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j,k} = \begin{cases} \frac{a}{2} \left(\frac{U_{i+1,j,k}^{(n+1)} - U_{i+1,j-1,k}^{(n+1)}}{\Delta y} + \frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k}}{\Delta y} \right), & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时,} \\ \frac{a}{2} \left(\frac{U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k}}{\Delta y} + \frac{U_{i+1,j+1,k}^{(n+1)} - U_{i+1,j,k}^{(n+1)}}{\Delta y} \right), & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (11)$$

对二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ 仍采用中心差分公式来代替,考虑到(3),(10),(11)我们得到

如下迎风隐式迭代格式:

$$\begin{aligned}
 & U_{i+1,j,k}^{(n+1)} + \left(\frac{a + |a|}{4} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} [(U_{i+1,j,k}^{(n+1)} - U_{i+1,j-1,k}^{(n+1)}) \\
 & + (U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k})] + \frac{(a - |a|)}{4} \frac{\Delta x}{\Delta y} [(U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k}) \\
 & + (U_{i+1,j+1,k}^{(n+1)} - U_{i+1,j,k}^{(n+1)})] + \left(\frac{b + |b|}{4} \right) \frac{\Delta x}{\Delta \varphi} [(U_{i+1,j,k}^{(n+1)} - U_{i+1,j,k+1}^{(n+1)}) \\
 & + (U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k})] + \frac{(b - |b|)}{4} \frac{\Delta x}{\Delta \varphi} [(U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1}) \\
 & + (U_{i+1,j,k+1}^{(n)} - U_{i+1,j,k}^{(n+1)})] - c \frac{\Delta x}{\Delta y^2} (U_{i+1,j+1,k}^{(n+1)} - 2U_{i+1,j,k}^{(n+1)} + U_{i+1,j-1,k}^{(n+1)}) \\
 & - d \frac{\Delta x}{\Delta \varphi^2} (U_{i+1,j,k+1}^{(n)} - 2U_{i+1,j,k}^{(n+1)} + U_{i+1,j,k-1}^{(n)}) = U_{i,j,k} \\
 & (i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, M+1; k = 0, 1, \dots, K). \quad (12)
 \end{aligned}$$

不难证明,格式(12)的迭代过程是无条件收敛的。格式(12)对 y 方向是完全隐式的,而迭代只在 φ 方向进行。为简单起见,仅讨论下列常系数方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (13)$$

对此方程,我们可写出中心隐式迭代格式(记为 HL 格式)及迎风隐式迭代格式(记为 UI 格式)。

HL 格式

$$\frac{u_{i+1,k}^{(n+1)} - u_{i,k}}{\Delta x} + a \frac{u_{i+1,k+1}^{(n)} - u_{i+1,k-1}^{(n+1)}}{2\Delta \varphi} = \mu \frac{u_{i+1,k+1}^{(n)} - 2u_{i+1,k}^{(n+1)} + u_{i+1,k-1}^{(n+1)}}{\Delta \varphi^2}. \quad (14)$$

UI 格式

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{i+1,k}^{(n+1)} - u_{i,k}}{\Delta x} + \frac{a}{2} \left(\frac{u_{i+1,k}^{(n+1)} - u_{i+1,k-1}^{(n+1)}}{\Delta \varphi} + \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta \varphi} \right) \\
 & = \mu \frac{u_{i+1,k+1}^{(n)} - 2u_{i+1,k}^{(n+1)} + u_{i+1,k-1}^{(n+1)}}{\Delta \varphi^2} \quad (\text{当 } a \geq 0 \text{ 时}). \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{i+1,k}^{(n+1)} - u_{i,k}}{\Delta x} + \frac{a}{2} \left(\frac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{\Delta \varphi} + \frac{u_{i+1,k+1}^{(n)} - u_{i+1,k}^{(n+1)}}{\Delta \varphi} \right) \\
 & = \mu \frac{u_{i+1,k+1}^{(n)} - 2u_{i+1,k}^{(n+1)} + u_{i+1,k-1}^{(n+1)}}{\Delta \varphi^2} \quad (\text{当 } a < 0 \text{ 时}). \quad (16)
 \end{aligned}$$

令 $\alpha = a \frac{\Delta x}{\Delta \varphi}$, $\beta = \mu \frac{\Delta x}{\Delta \varphi^2}$, 则(14)–(16)式可改写成

$$\begin{aligned}
 & u_{i+1,k}^{(n+1)} + \frac{\alpha}{2} (u_{i+1,k+1}^{(n)} - u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) - \beta (u_{i+1,k+1}^{(n)} - 2u_{i+1,k}^{(n+1)} \\
 & + u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) = u_{i,k} \quad (\text{HL 格式}), \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$u_{i+1,k}^{(n+1)} + \frac{\alpha}{2} (u_{i+1,k}^{(n+1)} - u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) - \beta (u_{i+1,k+1}^{(n)} - 2u_{i+1,k}^{(n+1)}$$

$$+ u_{i+1,k-1}^{(n+1)} = u_{i,k} - \frac{\alpha}{2} (u_{i,k+1} - u_{i,k}) \quad (a \geq 0), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u_{i+1,k}^{(n+1)} + \frac{\alpha}{2} (u_{i+1,k+1}^{(n)} - u_{i+1,k}^{(n+1)}) - \beta (u_{i+1,k+1}^{(n)} - 2u_{i+1,k}^{(n+1)} + u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) \\ = u_{i,k} - \frac{\alpha}{2} (u_{i,k} - u_{i,k-1}) \quad (a < 0). \end{aligned} \quad (19)$$

下面我们将证明, 格式(17)的迭代收敛条件为不等式(7), 而(18)及(19)的迭代过程是无条件收敛的. 事实上, 令 $\delta u_{i+1,k}^{(n)} = u_{i+1,k} - u_{i+1,k}^{(n)}$ 为差分方程的真解与迭代解之差, 从(17), (18), (19)可推得相应的误差方程如下:

$$\begin{aligned} \delta u_{i+1,k}^{(n+1)} + \frac{\alpha}{2} (\delta u_{i+1,k+1}^{(n)} - \delta u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) - \beta (\delta u_{i+1,k+1}^{(n)} \\ - 2\delta u_{i+1,k}^{(n+1)} + \delta u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta u_{i+1,k}^{(n+1)} + \frac{\alpha}{2} (\delta u_{i+1,k}^{(n)} - \delta u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) - \beta (\delta u_{i+1,k+1}^{(n)} \\ - 2\delta u_{i+1,k}^{(n+1)} + \delta u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) = 0 \quad (a \geq 0), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta u_{i+1,k}^{(n+1)} + \frac{\alpha}{2} (\delta u_{i+1,k+1}^{(n)} - \delta u_{i+1,k}^{(n+1)}) - \beta (\delta u_{i+1,k+1}^{(n)} \\ - 2\delta u_{i+1,k}^{(n+1)} + \delta u_{i+1,k-1}^{(n+1)}) = 0 \quad (a < 0). \end{aligned} \quad (22)$$

设

$$\begin{aligned} \delta u_{i+1,k}^{(n)} &= \lambda^n e^{i(mk\Delta\varphi)}, \\ \delta u_{i+1,k}^{(n+1)} &= \lambda^{n+1} e^{i(mk\Delta\varphi)}. \end{aligned} \quad (23)$$

将(23)式代入(20), 得

$$\lambda = \frac{-\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) (\cos\theta + i \sin\theta)}{1 - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cos\theta + 2\beta + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) i \sin\theta},$$

其中 $\theta = m\Delta\varphi$. 不难证明, 若要求 $|\lambda| < 1$, 必须满足条件

$$|\alpha| < 1 + 2\beta, \quad (24)$$

此即 HL 格式的迭代收敛条件.

用同样方法, 对 UI 格式有

$$\lambda = \frac{\beta(\cos\theta + i \sin\theta)}{\left(1 + \frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)(\cos\theta - i \sin\theta)}, \quad (a \geq 0)$$

$$\lambda = \frac{\left(-\frac{\alpha}{2} + \beta\right) (\cos\theta + i \sin\theta)}{\left(1 - \frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \beta(\cos\theta - i \sin\theta)}. \quad (a < 0)$$

对上述两式, 无论 α, β 取任意值, $|\lambda| < 1$ 总是成立的, 因此迭代是无条件收敛的.

三、数值试验

为了检验上一节的分析结论,考虑线性 Burgers 方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \\ u(0, x) = \varphi(x), \\ u(t, 0) = 0, \\ u(t, 1) = 1, \end{cases} \quad (25)$$

其中 a, Re 皆为常数. 首先讨论 $a > 0$ 的情形. 当 Re 很大时,在右边界产生很薄的边界层. 为了提高边界层的分辨率,我们将[6]中建议的坐标变换

$$x = 1 - (1 - \xi)^s \quad (26)$$

改为

$$x = 1 - (1 - \xi)^s, \quad (27)$$

其中 s 可取任何正数. 当 Re 增大时,加大 s 即能提高 $x = 1$ 附近边界层区域的分辨率. 方程(25)在新坐标 (t, ξ) 中为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(a\xi_x - \frac{1}{\text{Re}} \xi_{xx} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\text{Re}} \xi_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \\ u(0, \xi) = \varphi(\xi), \\ u(t, 0) = 0, \\ u(t, 1) = 1, \end{cases} \quad (28)$$

其中

$$\xi_x = \frac{1}{s} \frac{1}{(1 - \xi)^{s-1}}, \quad \xi_{xx} = \frac{s-1}{s^2} \frac{1}{(1 - \xi)^{2s-1}}.$$

初始函数 $\varphi(x)$ 可用边值线性内插得到. 我们利用 HL 格式及 UI 格式对多组参数进行计算,情况如下:

算例 1. $a = 1, \text{Re} = 10, \Delta\xi = 0.05$ 或 $0.1, s = 1$ (即等距网格). 当时间步长取 $0.04, 1.0, 5.0$ 时, HL 格式及 UI 格式皆收敛. 但当 $\Delta\xi = 0.1, \Delta t = 5$ 时, HL 格式的收敛解有振荡现象,而 UI 格式保持单调性(参见表 1).

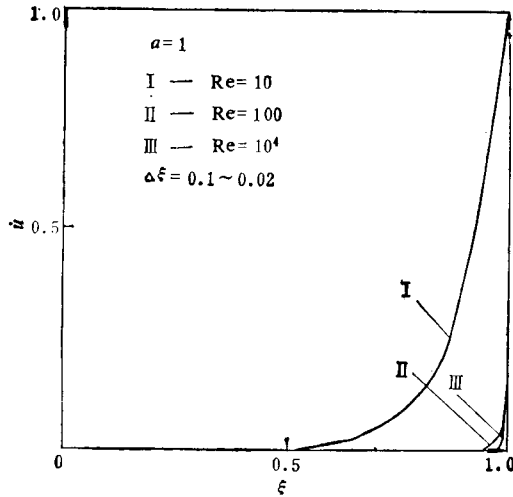
表 1 定常解比较 ($a = 1, \Delta t = 5$)

u 格式	x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
HL 格式	0		-0.1597×10^{-2}	0.1451×10^{-2}	0.1322×10^{-3}	0.9281×10^{-2}	0.3244×10^{-1}	0.1192×10^{-1}	0.3730×10^{-1}	0.1118	0.3333	1.0
UI 格式 $\Delta\xi = 0.1$	0		0.3396×10^{-4}	0.1359×10^{-3}	0.4412×10^{-3}	0.1356×10^{-2}	0.4100×10^{-2}	0.1233×10^{-1}	0.3702×10^{-1}	0.1111	0.3333	1.0
UI 格式 $\Delta\xi = 0.05$	0		0.6731×10^{-3}	0.1498×10^{-2}	0.2378×10^{-2}	0.3673×10^{-2}	0.6961×10^{-2}	0.1687×10^{-1}	0.4597×10^{-1}	0.1286	0.3592	1.0
真 解	0		0.7801×10^{-4}	0.2901×10^{-3}	0.8665×10^{-3}	0.2434×10^{-2}	0.6693×10^{-2}	0.1827×10^{-1}	0.4974×10^{-1}	0.1353	0.3679	1.0

算例 2. $a = 1, Re = 100, \Delta\xi = 0.05, s = 4$, 当 $\Delta t = 0.04, 1, 5$ 时 HL 格式及 UI 格式都能得到定常解, 但 $\Delta t = 1, 5$ 时, HL 格式达到定常解的速度很慢, 而 UI 格式对任何时间步长均能较快地收敛到定常解。

算例 3. $a = 1, Re = 10^4, \Delta\xi = 0.04, s = 5$. 此时即使取 $\Delta t = 0.0001$, HL 格式也不收敛, 而 UI 格式对任何时间步长皆收敛。

算例 4. $a = -1, Re = 10, \Delta\xi = 0.1, \Delta t = 5.0, s = 1$, 收敛后的定常解见表 2.



定常解随 Re 的变化规律 (UI 格式)

表 2 定常解比较 ($a = -1, \Delta t = 5.0$)

格式	$x=0.0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1.0$
UI 格式 $\Delta\xi = 0.1$	0	0.6663	0.8895	0.9646	0.9898	0.9978	0.9999	1.000	0.9999	0.9999	1.0
UI 格式 $\Delta\xi = 0.05$	0	0.6375	0.8649	0.9467	0.9775	0.9905	0.9966	0.9993	1.000	1.000	1.0
真 解	0	0.6321	0.8647	0.9502	0.9817	0.9933	0.9976	0.9991	0.9997	0.9999	1.0

表 3 UI 格式计算定常解的总步数 ($a = -1$)

$N \backslash \Delta\xi$	$\Delta t = 0.04$	$\Delta t = 1.0$	$\Delta t = 5.0$
0.1	75	14	12
0.05	97	12	10

[注] 定常解的判别准则为 $\left| \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right| < 0.5 \times 10^{-3}$

在计算中,当时间步长放大,而其他参数不变时,达到定常解的速度加快。当 Re 很大时,由于在 $x = 0$ ($a < 0$) 和 $x = 1$ ($a > 0$) 附近的格点很密,迭代的收敛速度和达到定常解的收敛速度大为减慢。所做的数值试验与我们的分析结论是完全一致的。迎风隐式迭代格式可用来解三维边界层方程或 Navier-Stokes 方程。

参 考 文 献

- [1] F. G. Blottner, AD-A013269, 1975.
- [2] W. S. Helliwell, et al., Computers and Fluid No. 1, 1975.
- [3] S. G. Rubin et al., J. Computational Physics, Vol. 9 No. 2, 1972.
- [4] 王汝权, 焦履琼, 数值计算与计算机应用, 1: 1, 1980.
- [5] E. Krause, AIAA J. No. 3, 1969.
- [6] Engenia Kelnay De Rivas, J. Computational Physics, 10: 2, 1972.