

解二维扩散方程的分步分组显式格式* 1)

陆金甫 曾光

(清华大学应用数学系)

FRACTIONAL STEPS GROUP EXPLICIT METHODS FOR 2D DIFFUSION EQUATIONS

Lu Jin-fu Zeng Guang

(Tsinghua University)

Abstract

An explicit finite difference method for the solution of 2D diffusion equations is presented by combining the group explicit method with the fractional steps method. This method possesses the advantages of the group explicit method, and is simpler than the method of Evans and Abdullah. The stability of the method is proved. Some numerical results of a model problem are also given.

1. 引言

求解多维扩散方程已有很多办法。显式差分格式由于受到稳定性条件的限制, 时间步长 Δt 要比一维问题小得多, 因此实际上是不用的。全隐格式需解线性代数方程组, 而此方程组也不易求解。在实际计算中颇受欢迎的是交替方向隐式格式。此方法在一个时间层上需解二个一维问题, 一般用二次追赶法即可完成。随着并行处理机和向量机的日益广泛使用, 设计出适合于并行计算的数值方法是一个迫切课题。一般说来, 用追赶法求解进行并行计算有一定不便之处。

八十年代, Evans 和 Abdullah^[1] 提出了求解一维扩散方程的分组显式格式 (Group explicit methods), 简记为 GE 格式。这个方法稳定性好, 并是显式求解。因此这个方法不但在串行计算中受欢迎, 而且在并行计算中也是很好的方法。此后, 他们^[2] 又将 GE 格式直接推广到二维扩散问题。张宝琳等^[3] 也做了类似但较为一般的工作。

我们注意到, 在文[2]为形成二维扩散方程的 GE 方法中, 要求 4 阶方阵的逆矩阵, 并靠近边界的内点将要处理 8 种不同情况, 因此方法形成颇为不便。但此方法是显式求解, 易进行并行计算, 因此方法具有很大的吸引力。

本文将采用分步方法^[4]来简化二维扩散方程的 GE 方法。为此在 § 2 中简述一维扩

* 1993 年 1 月 12 日收到。

1) 本工作获得国家自然科学基金部分资助。

散问题的 GE 方法, §3 中给出二维扩散问题的分步 GE 方法, §4 中讨论稳定性问题, 最后给出数值例子。

2. 一维扩散方程的 GE 方法

考虑一维扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = g_0(t), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u(1, t) = g_1(t). \end{cases} \quad (4)$$

用时间步长 Δt 和空间步长 Δx 将定解区域划分为网格, 网格点为 (x_i, t_n) , $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, \dots, m$, $\Delta x = \frac{1}{m}$, $t_n = n\Delta t$, $n \geq 0$.

求解扩散方程(1)的半隐格式为

$$(1+r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = ru_{i-1}^n + (1-r)u_i^n \quad (5)$$

和

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} = (1-r)u_i^n + ru_{i+1}^n, \quad (6)$$

其中 $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

以相邻两网格点 (x_i, t_{n+1}) , (x_{i+1}, t_{n+1}) 为一组, 在点 (x_i, t_{n+1}) 上用格式(5), 在点 (x_{i+1}, t_{n+1}) 上用格式(6), 那么可以得到

$$\begin{bmatrix} 1+r & -r \\ -r & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{n+1} \\ u_{i+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & 0 \\ 0 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^n \\ u_{i+1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & u_{i-1}^n \\ r & u_{i+2}^n \end{bmatrix}. \quad (7)$$

假定 m 为偶数, 则有 $m-1$ 个内点, 显然内点为奇数个. 先设最右边的内点不成组, 此时构成 GER 格式

$$(I_{m-1} + rG_1)u^{n+1} = (I_{m-1} - rG_2)u^n + b_1^n, \quad (8)$$

其中 $u^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n]^T$, $b_1^n = [ru_0^n, 0, \dots, 0, ru_{m+1}^n]^T$,

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & -1 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)}.$$

I_{m-1} 为 $m-1$ 阶单位阵.

当最左边内点不成组时,就构成 GEL 格式

$$(I_{m-1} + rG_2)u^{n+1} = (I_{m-1} - rG_1)u^n + b_2^n, \quad (9)$$

其中 $b_2^n = (ru_0^{n+1}, 0, \dots, ru_m^n)^T$ 为 $m-1$ 维向量.

利用(8),(9)可形成(S) AGE 格式, (D) AGE 格式^[1].

3. 二维扩散方程的分步 GE 格式

考虑二维扩散方程的初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x, y < 1, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x, y < 1, \quad (11)$$

$$u(0, y, t) = f_1(y, t), \quad u(1, y, t) = f_2(y, t), \quad 0 < y < 1, t > 0, \quad (12)$$

$$u(x, 0, t) = f_3(x, t), \quad u(x, 1, t) = f_4(x, t), \quad 0 < x < 1, t > 0. \quad (13)$$

为讨论方便起见,假定 $\Delta x = \Delta y$, $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, \dots, m$, $y_j = j\Delta y$, $j = 0, 1, \dots, m$, $m\Delta x = m\Delta y = 1$. 在文[2]中,对于 $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ 时间层上,以 (x_i, y_j, t_{n+1}) , (x_{i+1}, y_j, t_{n+1}) , $(x_{i+1}, y_{j+1}, t_{n+1})$ 和 (x_i, y_{j+1}, t_{n+1}) 四个相邻点为一组,在这四个点上分别采用显-隐格式.

$$\begin{aligned} (x_i, y_j, t_{n+1}): \quad & \frac{1}{\Delta t} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i+1,j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n] \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} [u_{i,j+1}^{n+1} - u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (x_i, y_{j+1}, t_{n+1}): \quad & \frac{1}{\Delta t} (u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j+1}^n) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j+1}^n] \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} [u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j+1}^n + u_{i,j+2}^n] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (x_{i+1}, y_j, t_{n+1}): \quad & \frac{1}{\Delta t} (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i+2,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n] \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} [u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n + u_{i+1,j-1}^n] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (x_{i+1}, y_{j+1}, t_{n+1}): \quad & \frac{1}{\Delta t} (u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j+1}^n) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i+2,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j+1}^n + u_{i,j+1}^n] \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} [u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j+1}^n + u_{i+1,j+2}^n] \end{aligned} \quad (17)$$

令 $r = \Delta t / (\Delta x)^2 = \Delta t / (\Delta y)^2$, 把(14)-(17)联立并写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & -r \\ -r & 1+2r & -r & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r \\ -r & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ij}^{n+1} \\ u_{i+1,j}^{n+1} \\ u_{i+1,j+1}^{n+1} \\ u_{i,j+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ij}^n \\ f_{i+1,j}^n \\ f_{i+1,j+1}^n \\ f_{i,j+1}^n \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中 f 的值由 n 时刻的 u 值所确定, 即为已知的。由此可知解出 $[u_{ij}^{n+1}, u_{i+1,j}^{n+1}, u_{i,j+1}^{n+1}, u_{i+1,j+1}^{n+1}]^T$ 就需求四阶方阵的逆。

靠近边界的内点, 有八种可能(见图 1)。位置 1, 2, 3 和 4 要解 2 阶方阵的逆, 5, 6, 7 和 8 可直接得到。

由上述可以看出, 一个完整的算法较为复杂。

由于方程中没有混合导数, 因此采用最简单的分解方法^[4], 这样就可以把二维问题降维。

引入差分算子

$$\begin{aligned} \Lambda_x^{s,\theta} u_{ij}^n &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i-(-1)^s, j}^{n+\theta} - u_{ij}^{n+\theta} \\ &\quad - u_{ij}^n + u_{i+(-1)^s, j}^n], \quad s = 1, 2, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Lambda_y^{s,\theta} u_{ij}^n = \frac{1}{(\Delta y)^2} [u_{i, j-(-1)^s}^{n+\theta} - u_{ij}^{n+\theta} - u_{ij}^n + u_{i, j+(-1)^s}^n], \quad s = 1, 2, \quad (20)$$

$$\Lambda_t^\theta u_{ij}^n = \frac{1}{\Delta t} [u_{ij}^{n+\theta} - u_{ij}^n]. \quad (21)$$

利用这些差分算子, 半隐格式(14)–(17)均可以写为

$$\Lambda_l^1 u_{ij}^n = (\Lambda_x^{s,l} + \Lambda_y^{s,l}) u_{ij}^n, \quad s, l = 1, 2. \quad (22)$$

引入辅助时间层 $n + \frac{1}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t$, 分解(22)为

$$\Lambda_x^{\frac{1}{2}} u_{ij}^n = \Lambda_x^{s, \frac{1}{2}} u_{ij}^n, \quad (23)$$

$$\Lambda_t^{\frac{1}{2}} u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \Lambda_y^{s, \frac{1}{2}} u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

为推导出分步 GE 方法, 先考虑 x 方向上的计算。不妨设 m 为偶数, 并令 $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ 。此时 x 方向的内点数 $m-1$ 为奇数, 记

$$\begin{aligned} U_n &= \begin{bmatrix} u_{11}^n & u_{12}^n & \cdots & u_{1, m-1}^n \\ u_{21}^n & u_{22}^n & \cdots & u_{2, m-1}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m-1, 1}^n & u_{m-1, 2}^n & \cdots & u_{m-1, m-1}^n \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)}, \quad (25) \\ B_n &= \begin{bmatrix} r u_{0,1}^n & r u_{0,2}^n & \cdots & r u_{0, m-1}^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r u_{m-1, 1}^{n+\frac{1}{2}} & r u_{m-1, 2}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & r u_{m-1, m-1}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)}. \end{aligned}$$

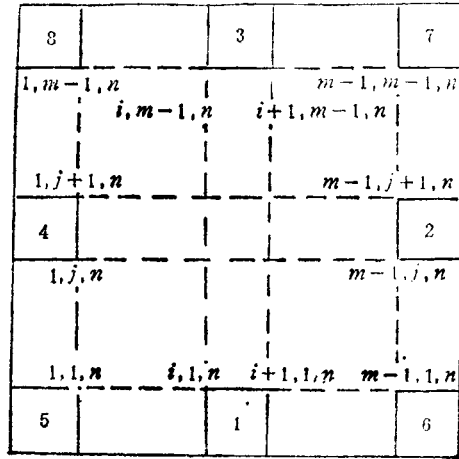


图 1 n 层靠近边界点的位置

$$\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} rU_{01}^{n+\frac{1}{2}} & rU_{.2}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & rU_{0,m-1}^{n+\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ rU_{m1}^n & rU_{m2}^n & \cdots & rU_{m,m-1}^n \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)}$$

利用一维扩散方程的 GER 格式(8)立即可以得到 x 方向的 GER 格式

$$(I_{m-1} + rG_1)U_{n+\frac{1}{2}} = (I_{m-1} - rG_2)U_n + B_n, \quad (26)$$

其中 G_1, G_2 为(8)中所定义。同样地可以得到 GEL 格式

$$(I_{m-1} + rG_2)U_{n+\frac{1}{2}} = (I_{m-1} - rG_1)u_n + \tilde{B}_n. \quad (27)$$

对于 y 方向的计算与 x 方向十分类似, GER 格式为

$$(I_{m-1} + rG_1)U_{n+1}^T = (I_{m-1} - rG_2)U_{n+\frac{1}{2}}^T + C_n. \quad (28)$$

GEL 格式为

$$(I_{m-1} + rG_2)U_{n+1}^T = (I_{m-1} - rG_1)U_{n+\frac{1}{2}}^T + \tilde{C}_n, \quad (29)$$

其中

$$C_n = \begin{bmatrix} rU_{10}^{n+\frac{1}{2}} & rU_{20}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & rU_{m-1,0}^{n+\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ rU_{1m}^{n+1} & rU_{2m}^{n+1} & \cdots & rU_{m-1,m}^{n+1} \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)}$$

$$\tilde{C}_n = \begin{bmatrix} rU_{10}^{n+1} & rU_{20}^{n+1} & \cdots & rU_{m-1,0}^{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ rU_{1m}^{n+\frac{1}{2}} & rU_{2m}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & rU_{m-1,m}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)}$$

利用 x 方向上的 GER (26), GEL (27) 及 y 方向上的 GER (28) 和 GEL (29) 可以得到完整的算法。

$$\begin{aligned} \text{GER: } U_n &\xrightarrow{(26)} U_{n+\frac{1}{2}} \xrightarrow{(28)} U_{n+1}. \\ \text{GEL: } U_n &\xrightarrow{(27)} U_{n+\frac{1}{2}} \xrightarrow{(29)} U_{n+1}. \\ (S)\text{AGE: } U_n &\xrightarrow{\text{GER}} U_{n+1} \xrightarrow{\text{GEL}} U_{n+2}. \\ (D)\text{AGE: } U_n &\xrightarrow{\text{GER}} U_{n+1} \xrightarrow{\text{GEL}} U_{n+2} \xrightarrow{\text{GEL}} U_{n+3} \xrightarrow{\text{GER}} U_{n+4}. \end{aligned} \quad (30)$$

4. 分步 GE 格式的稳定性

由于 GER 格式和 GEL 格式相似, (S)AGE 格式和 (D)AGE 格式的稳定性讨论类似。所以我们仅对 GER 格式和 (S)AGE 格式进行讨论。在稳定性讨论中, 假定边

定义 1. 称二维差分格式是稳定的, 如果对于任给初值 u_0^i 及相应的差分格式的解 u_n^i , 存在正的常数 k 使得当 $\tau \leq \tau_0$, $n\tau \leq T$ 时有

$$\|U_n^T\| \leq k \|U_0^T\|,$$

其中 U_n 为(25)定义的矩阵, 矩阵范数可以是 $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_2$.

命题 1. 如果 $r \leq 1$, 那么 GER 格式稳定 ($\|\cdot\|_\infty$).

证明. 由(32)和(33)知, 当 $r \leq 1$ 时有

$$\begin{aligned} \|(I_{m-1} + rG_1)^{-1}(I_{m-1} - rG_2)\|_\infty &\leq 1, \\ \|(I_{m-1} - rG_2)(I_{m-1} + rG_1)^{-1}\|_\infty &\leq 1. \end{aligned}$$

由(31)式得

$$\begin{aligned} \|U_{n+1}^T\|_\infty &\leq \|(I_{m-1} + rG_1)^{-1}(I_{m-1} - rG_2)\|_\infty \cdot \|U_n^T\|_\infty \cdot \|(I_{m-1} - rG_2)(I_{m-1} \\ &\quad + rG_1)^{-1}\|_\infty \leq \|U_n^T\|_\infty, \end{aligned}$$

从而有 $\|U_n^T\|_\infty \leq \|U_0^T\|_\infty$.

命题 2. (S) AGE 格式无条件稳定 ($\|\cdot\|_2$).

证明. 根据(30)有

$$\begin{aligned} (I_{m-1} + rG_1)U_{n+\frac{1}{2}} &= (I_{m-1} - rG_2)U_n, \\ (I_{m-1} + rG_1)U_{n+1}^T &= (I_{m-1} - rG_2)U_{n+\frac{1}{2}}^T, \\ (I_{m-1} + rG_2)U_{n+\frac{1}{2}} &= (I_{m-1} - rG_1)U_{n+1}, \\ (I_{m-1} + rG_2)U_{n+2}^T &= (I_{m-1} - rG_1)U_{n+\frac{3}{2}}^T. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} T_i &= (I_{m-1} + rG_2)^{-1}(I_{m-1} - rG_1)(I_{m-1} + rG_1)^{-1}(I_{m-1} - rG_2), \\ T_w^T &= (I_{m-1} - rG_2)(I_{m-1} + rG_1)^{-1}(I_{m-1} - rG_1)(I_{m-1} + rG_2)^{-1}, \end{aligned}$$

那么可以得到

$$U_{n+2}^T = T_i U_n^T T_w^T.$$

以 n 为偶数(奇数时可设 $n=1$ 为初值), 可设 $n=2k$, k 为非负整数, 则有

$$U_n^T = (T_i)^k U_0^T (T_w^T)^k. \quad (34)$$

记 $\tilde{T}_i = (I_{m-1} + rG_2)T_i(I_{m-1} + rG_2)^{-1}$, 利用 T_i 的表达式得

$$\tilde{T}_i = (I_{m-1} - rG_1)(I_{m-1} + rG_1)^{-1}(I_{m-1} - rG_2)(I_{m-1} + rG_2)^{-1}.$$

由于 $G_1 + G_1^T$, $G_2 + G_2^T$ 是非负定的, 所以由 Kellogg 引理^[9]得出, $\|(I_{m-1} - rG_1) \times (I_{m-1} + rG_1)^{-1}\|_2 \leq 1$, $\|(I_{m-1} - rG_2)(I_{m-1} + rG_2)^{-1}\|_2 \leq 1$. 从而有 $\|\tilde{T}_i\|_2 \leq 1$, $\|\tilde{T}_i^k\|_2 \leq 1$.

由于 $T_i = (I_{m-1} + rG_2)^{-1}\tilde{T}_i(I_{m-1} + rG_2)$, 所以有

$$T_i^k = (I_{m-1} + rG_2)^{-1}\tilde{T}_i^k(I_{m-1} + rG_2).$$

计算有

$$\|I_{m-1} + rG_2\|_\infty = 1 + 2r, \quad \|(I_{m-1} + rG_2)^{-1}\|_\infty = 1.$$

利用矩阵范数等价性, 存在 M 使

$$\|I_{m-1} + rG_2\|_2 \leq M(1 + 2r), \quad \|(I_{m-1} + rG_2)^{-1}\|_2 \leq M.$$

从而得到

$$\|T_i^k\|_2 \leq \|(I_{m-1} + rG_2)^{-1}\|_2 \cdot \|\tilde{T}_i^k\|_2 \cdot \|I_{m-1} + rG_2\|_2 \leq (1 + 2r)M^2.$$

由于 G_1, G_2 是对称阵, 所以有

$$T_w = (I_{m-1} + rG_2)^{-1}(I_{m-1} - rG_1)(I_{m-1} + rG_1)^{-1}(I_{m-1} - rG_2) \\ = T_{..}$$

注意到

$$\|(T_w^T)^k\|_2 = \|T_w^k\|_2 = \|T^k\|_2 \leq (1 + 2r)M^2,$$

由(34)得

$$\|U^T\|_2 \leq (1 + 2r)^2 M^4 \|U^0\|_2.$$

r 为网格比, 实际计算总存在 B 使 $r \leq B$, 定理证毕.

5. 数值例子

为了考察分步分组显式格式的效果, 我们考虑抛物型方程^[2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y e^{-t} - 4, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad t \geq 0.$$

表 1 $r = 0.1, \Delta x = \Delta y = 0.1, \Delta t = 0.001, t = 0.1, x = 0.5$

方法 \ y	0.2	0.4	0.6	0.8
GER	0.376188 4.4×10^{-6}	0.578938 7.2×10^{-6}	0.854951 7.5×10^{-6}	1.201194 3.6×10^{-6}
(S)AGE	0.376167 16.7×10^{-6}	0.578904 26.6×10^{-6}	0.854918 25.6×10^{-6}	1.201177 13.9×10^{-6}
(D)AGE	0.376168 15.5×10^{-6}	0.578905 25.9×10^{-6}	0.854918 25.4×10^{-6}	1.201176 14.5×10^{-6}
GE(E)*	0.376194 11×10^{-6}	0.578948 17×10^{-6}	0.854963 20×10^{-6}	1.201206 15×10^{-6}
解析解	0.376183	0.578931	0.854943	1.201191

表 2 $r = 0.1, \Delta x = \Delta y = 0.1, \Delta t = 0.001, t = 0.5, x = 0.5$

方法 \ y	0.2	0.4	0.6	0.8
GER	0.347773 2.7×10^{-6}	0.523242 4.6×10^{-6}	0.774195 4.6×10^{-6}	1.098599 1.8×10^{-6}
(S)AGE	0.347774 3.2×10^{-6}	0.523244 6.1×10^{-6}	0.774198 7.3×10^{-6}	1.098603 5.8×10^{-6}
(D)AGE	0.347774 3.8×10^{-6}	0.523244 6.2×10^{-6}	0.774198 7.2×10^{-6}	1.098603 5.2×10^{-6}
GE(E)	0.34760 10×10^{-6}	0.523212 25×10^{-6}	0.774149 4×10^{-6}	1.098542 55×10^{-6}
解析解	0.347770	0.523238	0.774190	1.098597

*) GE(E)表示文[1]中 (D)AGE 格式.

其解析解为

$$u(x, y, t) = \sin x \sin y e^{-t} + x^2 + y^2, 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0.$$

初值和初值条件定义为与解析解相符合。

数值计算表明,用 GER, (S)AGE, (D)AGE 等格式均得到相当精确的结果。对于 $r \geq 1$ 同样可进行计算,结果也很精确。我们还把计算结果与文[2]列出的结果进行了比较,可以得出本文的分步方法是简单而精确的方法。表1—表3列出了部分计算结果。

表3 $r = 1.0 \Delta x = \Delta y = 0.1 \Delta t = 0.01, t = 0.5, x = 0.5$

方法 \ y	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
GER	0.347744 26.9×10^{-6}	0.425821 111.9×10^{-6}	0.523183 55×10^{-6}	0.639281 129.5×10^{-6}	0.774116 74.6×10^{-6}	0.927191 138.5×10^{-6}	1.098511 86.3×10^{-6}
(S)AGE	0.347706 64.2×10^{-6}	0.425982 48.6×10^{-6}	0.523128 109.6×10^{-6}	0.639418 7.4×10^{-6}	0.774070 120.2×10^{-6}	0.927332 2.1×10^{-6}	1.098486 111.9×10^{-6}
(D)AGE	0.347685 85.6×10^{-6}	0.425972 39.1×10^{-6}	0.523187 50.5×10^{-6}	0.639466 55.1×10^{-6}	0.774146 44.3×10^{-6}	0.927374 53.9×10^{-6}	1.0985504 46.8×10^{-6}
GE(E)	0.347814 44×10^{-6}	0.425860 73×10^{-6}	0.523314 76×10^{-6}	0.639384 26×10^{-6}	0.774306 111×10^{-6}	0.927341 11×10^{-6}	1.098725 128×10^{-6}
解析解	0.347770	0.425933	0.523238	0.639410	0.774190	0.927330	1.098597

参 考 文 献

- [1] D. J. Evans, A.R.B. Abdullah, Group explicit methods for parabolic equations, Intern. J. Computer Math., 1983, Vol. 14, pp.73—105.
- [2] D.J. Evans, A.R.B. Abdullah, A new explicit method for the solution of $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, Intern. J. Computer Math., 1983, Vol. 14, pp.325—353.
- [3] Zhang Baolin (张宝琳), Su Xiumin (苏秀敏), Alternating block explicit-implicit method for the two dimensional diffusion equation, Intern. J. Computer Math., 1991, Vol. 38, pp. 241—255.
- [4] N.N. Yanenko, The Method of fractional steps, Springer-Verlag, Berlin, 1971. 周宝熙、林晓译, 分数步法, 科学出版社, 北京, 1992.
- [5] R.B. Kellogg, An alternating direction method for operator equations, J. Soc. Indust. Appl. Math., 1964, Vol. 12, pp.848—854.