解线性规划加阶算法*

赵可昳

（北京航空航天大学）

AN ORDER-ADDING METHOD FOR LINEAR PROGRAMMING

Zhao Ke-yi

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

Abstract

In this paper we present a method for solving linear programming. The main idea is that, if we have gotten an optimal solution of the linear programming

$$\min s = c^T x$$

subject to

$$Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

with simplex method, we can easyly get a solution of the linear programming

$$\begin{aligned} \min \quad & s = C^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & a^T x = d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

We call the method an order-adding method.

§1. 引　　言

文献 [3] 提出了如下一类数学规划问题：有 $k+1$ 个集合 $I_0, I_1, I_2, \cdots, I_k$. 求 x 使

$$\min \ f(x)$$

* 1997 年 3 月 28 日收到.

满足于约束条件

$$g_i(x) \ge 0, \quad \forall i \in I_0,$$

$$g_i(x) \ge 0, \quad \exists i \in I_r,\ r = 1, 2, \cdots, k.$$

因为通常的数学规划问题仅为其特例，而且它有广泛而深刻的实用价值，引起了我们的研究兴趣. 当 $f(x)$ 与所有 $g_i(x)$ 均为线性函数时，就要求一种与之适应的解线性规划的算法. 为此，我们研究出了一种解线性规划问题的加阶算法.

事实上，在解决实际问题时常常出现下述情形：如研究一个经济行为得出了一个线性规划问题，用单纯形法求得了它的最优解，后发现必须再增加约束条件才能与实际情形相吻合. 此情形加阶算法更显示出它的优越性.

在研究线性规划问题没有容许解时，本方法便是一个有力的研究工具.

所谓解线性规划问题的加阶算法系指如下的方法：

设求出线性规划问题

$$\min \quad S = C^T x$$

满足于约束条件

$$Ax = b,$$

$$x \ge 0$$

的最优解为 $x^{(0)}$ [2], 试求线性规划问题

$$\min \quad S = C^T x \tag{1}$$

满足于约束条件

$$Ax = b, \tag{2}$$

$$a^T x = d, \tag{3}$$

$$x \ge 0 \tag{4}$$

的最优解 x^*.

加阶算法是基于解线性规划的单纯形法建立的. 它能给出由单纯形法生成的，在经济学中有用的量，如“影子价格”,“潜价”[1] 等等.

文中所有符号是众所周知的，在此不用赘述.

§2. 理论准备

为了直观讨论，我们用单纯形表格形式做研究，和使用逆矩阵形式实质上是一样的.

不失一般性，我们不妨设求出线性规划 (1), (2), (4) 的最优解 $x^{(0)}$ 的单纯形表格[1]，如表 1.

表 1

基底描述	C_M	x_M	P_1	P_2	$\cdots$	P_m	P_{m+1}	$\cdots$	P_n
			C_1	C_2	$\cdots$	C_m	C_{m+1}	$\cdots$	C_n
1	C_1	$x_1^{(M)}$	1	0	$\cdots$	0	a_{1m+1}	$\cdots$	a_{1n}
2	C_2	$x_2^{(M)}$	0	1	$\cdots$	0	a_{2m+1}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
m	C_m	$x_m^{(M)}$	0	0	$\cdots$	1	a_{mm+1}	$\cdots$	a_{mn}
判别行			σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_m	σ_{m+1}	$\cdots$	σ_n

如果基底描述为 $j_1, j_2, \cdots, j_m$，则道理也是一样的. 此时自然有 $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = 0$, $\sigma_j \geq 0, (j = m+1, \cdots, n)$. 记约束条件 (3) 中的 a 为

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T,$$

a_{ij} 由表 1 给出. 令

$$\tilde{a}_j = a_j - \sum_{i=1}^{m} a_i a_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{5}$$

$$x_{m+1}^{(M)} = d - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^{(M)}, \tag{6}$$

则有下述结论.

命题 1. 若 $x_{m+1}^{(M)} > 0, \tilde{a}_j \leq 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 或者 $x_{m+1}^{(M)} < 0, \tilde{a}_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 则线性规划问题 (1), (2), (3), (4) 无容许解.

证明. 我们对约束条件 (3), 利用 (2) 做等价变换便可得

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j x_j = x_{m+1}^{(M)}. \tag{7}$$

故可知当结论的条件成立时不会有 $x_j \geq 0, (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的解.

命题 2. 若 $x_{m+1}^{(M)} \neq 0, \tilde{a}_j = 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 则线性规划问题 (1), (2), (3), (4) 无容许解.

命题 3. 若 $x_{m+1}^{(M)} \geq 0$, 取 $\frac{\sigma_k}{\tilde{a}_k} = \min\limits_{m+1 \leq j \leq n, \tilde{a}_j > 0} \left\{ \frac{\sigma_j}{\tilde{a}_j} \right\}$; 若 $x_{m+1}^{(M)} < 0$, 取 $\frac{\sigma_k}{\tilde{a}_k} = \max\limits_{m+1 \leq j \leq n, \tilde{a}_j < 0} \left\{ \frac{\sigma_j}{\tilde{a}_j} \right\}$, 则引入 P_k 做基底，变化后的判别数仍有 $\tilde{\sigma}_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 且有变化后的 $\tilde{x}_{m+1}^{(M)} \geq 0$.

证明. 事实上 $x_{m+1}^{(M)} = 0$ 为退化情形，故取 $x_{m+1}^{(M)} < 0$ 处理也是可以的.

在单纯形表格中增加约束条件

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_j x_j = x_{m+1}^{(M)},$$

形成单纯形表格表心的最后一行. 一定有

$$\tilde{x}_{m+1}^{(M)} = \frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k} \geq 0. \tag{8}$$

判别行的新值为

$$\tilde{\sigma}_j = C_j - \sum_{i=1}^{m} C_i\Big(a_{ij} - \frac{\tilde{a}_j}{\tilde{a}_k}a_{ik}\Big) - C_k\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{a}_k} = \sigma_j - \frac{\tilde{a}_j}{\tilde{a}_k}\sigma_k.$$

由结论所给条件及 $\sigma_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, 有

$$\tilde{\sigma}_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

证毕.

记

$$\tilde{x}_i^{(M)} = x_i^{(M)} - \frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k}a_{ik}, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{9}$$

命题 4. 在结论 3 的条件下，若仍有 (9) 中 $\tilde{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m) \geq 0$, 则得到线性规划问题 (1), (2), (3), (4) 的最优基本容许解 $x_i^* = \tilde{x}_i^{(M)}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, $x_k^* = \tilde{x}_{m+1}^{(M)}$, 其余 x_j^* 值为 0.

命题 5. 结论 3 给出的变换使变换前后的目标函数值 S 与 $\tilde{S}$ 之间有关系

$$\tilde{S} = S + \frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k}\sigma_k.$$

证明. 我们从 (8) 及 (9) 式得出

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{m} C_i\tilde{x}_i^{(M)} + C_k\tilde{x}_{m+1}^{(M)} = \sum_{i=1}^{m} C_i\Big(x_i^{(m)} - \frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k}a_{ik}\Big) + C_k\frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} C_i x_i^{(M)} + \frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k}\Big(C_k - \sum_{i=1}^{M} C_i a_{ik}\Big) = S + \frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k}\sigma_k.$$

可知迭代前后目标函数值是上升的.

命题 6. 由单纯形表格可知，若有一列 $a_{ik} \leq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则知相应的线性规划问题为无界解情形. 而加一个约束条件后不一定为无界解情形.

此结论明显，但我们构造算法时应予注意，否则会使算法错误的终止.

因为这些问题与构造方法有关，故而予以讨论.

§3. 算法算例

假定我们有线性规划问题

$$\min S = C^T x$$

满足于约束条件

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

的最优解. 我们欲加一个约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = d.$$

记最优基本容许解对应的基底描述为 $J_M = \{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$, 基本变量取值为 $x_{j_i} = x_i^{(M)}$, 基本变量价值系数为 C_{j_i} $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 判别数为 σ_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$.

1° 求

$$\tilde{a}_j = a_j - \sum_{i=1}^{m} a_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$x_{m+1}^{(M)} = d - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^{(M)}.$$

2° 若 $x_{m+1}^{(m)} \geq 0$ 做 2.1°, 否则做 2.2°.

2.1° 对于 $\tilde{a}_j > 0$ 的求 $\min\limits_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \overline{\in} J_M}} \left\{ \dfrac{\sigma_j}{\tilde{a}_j} \right\} = \dfrac{\sigma_k}{\tilde{a}_k}$ 转 3°.

2.2° 对于 $\tilde{a}_j < 0$ 的求 $\max\limits_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \overline{\in} J_M}} \left\{ \dfrac{\sigma_j}{\tilde{a}_j} \right\} = \dfrac{\sigma_k}{\tilde{a}_k}$ 转步 3°.

3° $J_M \cup \{k\} \Rightarrow J_M$, $C_{j_{m+1}} = C_k$,

$$\tilde{x}_i^{(M)} = x_i^{(M)} - \frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k} a_{ik}, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\tilde{x}_{m+1}^{(m)} = \frac{x_{m+1}^{(M)}}{\tilde{a}_k},$$

$$\tilde{a}_{m+1j} = \frac{\tilde{a}_j}{\tilde{a}_k}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\tilde{\sigma}_j = \sigma_j - \frac{\tilde{a}_j}{\tilde{a}_k} \sigma_k, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

4° 若 $\tilde{x}_i^{(M)} \geq 0\ (i=1,2,\cdots,m+1)$, 则得到最优解．否则对 $\tilde{x}_i^{(M)} < 0$ 的 i 做主元行，用对偶单纯形法迭代，直到 $\tilde{x}_i^{(M)} \geq 0\ (i=1,2,\cdots,m)$ 为止.

算例．求解线性规划问题

$$\min\ s = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$$

满足于约束条件

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 + 3x_4 = 5,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,$$

$$x_1 \cdot x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

我们解线性规划问题

$$\min\ S = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$$

满足于约束条件

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 + 3x_4 = 5,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

得出最优单纯形表如下表.

基底描述	C_M	x_M	P_1	P_2	P_3	P_4
			-1	-2	3	-4
P_1	-1	4	1	1	2	0
P_4	-4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1
σ_j			0	$\frac{13}{3}$	$\frac{17}{3}$	0

我们引进约束条件

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5.$$

求出

$$x_{m+1}^{(M)} = 2/3,\ \tilde{a}_1 = 0,\ \tilde{a}_2 = 2/3,\ \tilde{a}_3 = 5/6,\ \tilde{a}_4 = 0.$$

因为 $x_{m+1}^{(M)} > 0$, 计算出

$$\frac{\sigma_2}{\tilde{a}_2} = \frac{13}{2} = 6.5,$$

$$\frac{\sigma_3}{\tilde{a}_3} = \frac{34}{5} = 6.8.$$

定出 $P_k = P_2$. 求出新单纯形表格如下表.

基底描述	C_M	x_M	P_1	P_2	P_3	P_4
			-1	-2	3	-4
1	-1	3	1	0	$\frac{3}{4}$	0
4	-4	0	0	0	$-\frac{3}{12}$	1
2	-2	1	0	1	$\frac{5}{4}$	0
σ_j			0	0	$\frac{21}{4}$	0

因为所有基变量取值均非负，故求出最优解

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = 0.$$

这个例子很小，是为了使大家便于计算验证. 至于节约运算量，那是显而易见的. 既使有时会用对偶单纯形法，它也不用很复杂的方法求对偶单纯形法的初始解.

参 考 文 献

[1] 赵凤治，线性规划计算方法，科学出版社， 1981.

[2] 席少霖，赵凤治，最优化计算方法，上海科技出版社， 1983.

[3] Zhao Feng-zhi, "Generalized mathematical programming and an algorithm for solving it", Proceeding of the international symposium on engineering mathematics and applications, Shenzhen, China, (1992) 118–120.