

亚轨道飞行器上升段轨迹优化与快速重规划

丁洪波¹, 曹 渊¹, 佟卫平², 蔡 洪¹

(1. 国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073; 2. 北京航天自动控制研究所, 北京 100854)

摘 要: 针对亚轨道飞行器上升段轨迹优化问题,提出了基于 Legendre 伪谱法的轨迹优化与快速重规划方法。结合亚轨道飞行器上升段运动特点,着重研究气动力的表示方法,建立了矢量形式的动力学方程。应用 Legendre 伪谱法进行上升段轨迹优化,并分析了优化结果。结合该方法的特点研究了基于 Legendre 伪谱法的轨迹重规划方法。仿真表明轨迹优化结果具有精度高、满足一阶最优性必要条件等特点,重规划轨迹的入轨精度高,且重规划的时间短,能满足快速性要求。

关键词: Legendre 伪谱法; 亚轨道飞行器; 轨迹优化; 快速重规划

中图分类号: V412

文献标识码: A

文章编号: 1000-1328(2009)03-0877-07

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.008

0 引言

亚轨道飞行器(Suborbital Launch Vehicle, SLV)具有较高的飞行速度和高度,但不具备轨道运行的速度和高度。相对入轨飞行器而言,SLV 上升段飞行具有高度低、升阻比大以及任务目标多样化等特点^[2]。

SLV 上升段轨迹优化可以为 SLV 技术可行性提供重要参考依据,为总体设计提供重要的性能参数,因而具有较为重要的理论及工程意义。从现有文献看,Lu Ping^[1],闫晓东^[2]等人研究了 SLV 再入段轨迹设计,对于 SLV 上升段轨迹优化的研究则不多见。本文根据 SLV 上升段轨迹的特点,建立上升段运动矢量形式的动力学方程,然后利用 Legendre 伪谱法求解上升段的优化轨迹,并研究了有干扰情况下的轨迹快速重规划方法。

1 Legendre 伪谱法

轨迹优化数值方法一般可以分为间接法和直接法^[3,4],直接法将动态的、连续的最优控制问题离散化,转化为非线性规划问题。打靶法和配点法是两种直接法,二者的共同点是都需要将时间区间离散化,将离散点上的变量作为优化变量,不同点是打靶法以离散点上的控制量为优化变量,而配点法则将

控制量和状态量均作为优化变量。

打靶法需要根据控制量对动力学方程进行积分得到状态变量的值,而配点法将离散点上的状态量也作为优化变量,通过某些多项式(分段 Hermite-Simpson 多项式、正交多项式等)来拟合整个时间区间上的值。对多项式求导来近似动力学方程中的状态变量对时间的导数,且在一系列离散点上满足动力学方程右函数的约束,从而将微分方程约束转换为代数约束。因为状态量也是拟合出来的,所以不需要对动力学方程进行积分。

Legendre 伪谱法^[5,6](Legendre Pseudospectral Method, LPM)是一种配点法,它的特点是使用 Legendre-Gauss-Lobatto(LGL)积分法则来拟合整个时间区间上的状态量和控制量的值。该法则是高斯积分方法中的一种,具有能用较少的点达到较高的拟合精度的特点^[7]。

数据拟合过程中,有两个问题需要解决:一是离散点的选取,另一个是拟合多项式的选择。LPM 的离散点为 Legendre 多项式的根,称为 LGL 点,它包括区间的两个端点,而且越接近端点,点越密集(见图 1),这种布局可以有效防止“龙格现象”^[5]造成的拟合偏差。离散点确定后,采用拉格朗日多项式拟合,这是一种全局插值方法^[5]。

相比打靶法等直接法,LPM 具有优化精度高,收

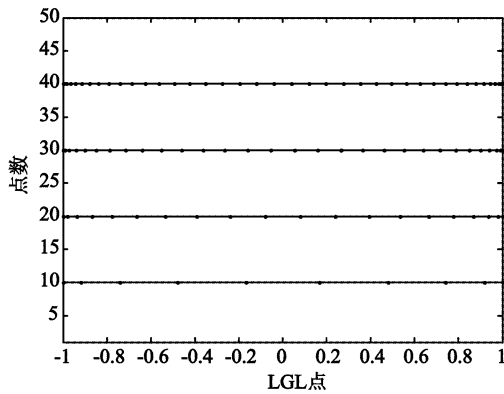


图1 LGL的分布图

Fig.1 Distribution of LGL points

敛速度快等特点。同时,因为打靶法的优化变量仅仅是控制量,控制量的变化对轨迹的影响会比较大。而LPM的优化变量比较多,包括状态变量和控制变量,即便某些变量的偏差比较大,其影响也比优化变量仅仅是控制量时小,所以LPM对初值敏感性较弱。

LPM将最优控制问题转化为非线性规划问题后,对非线性规划问题的求解可转化为对一个增广性能指标的优化求解,求解该问题同时能得到KKT乘子,根据Qi Gong等人提出的协状态映射原理^[8]可以估计LGL点上的协状态信息,从而求得哈密顿函数的值以检验解是否满足一阶最优性必要条件。

2 上升段动力学方程

2.1 惯性系中的矢量方程

定义地心发射惯性坐标系 $o_E x_A y_A z_A$:起飞瞬时,各坐标轴指向与发射系^[9]相同,起飞后,各坐标轴在惯性空间保持不动。坐标原点为地心 o_E 。

SLV在上升段运动在地心发射惯性坐标系中的无量纲化动力学方程为^[10]

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V} \quad (1)$$

$$\dot{\vec{V}} = -\frac{1}{r^3} \vec{r} + T \vec{\hat{1}}_b + \vec{A} + \vec{N} \quad (2)$$

$$\dot{m} = -\dot{m}_0 \quad (3)$$

其中, \vec{r} 和 \vec{V} 是SLV在惯性系中的位置和速度矢量; T 是推力大小; \vec{A} 和 \vec{N} 是沿飞行器轴向、法向气动力矢量; $\vec{\hat{1}}_b$ 是再入飞行器纵轴的单位向量,发动机沿体轴方向安装,因而它也是推力方向矢量; $m(t)$ 是SLV在 t 时刻的质量, \dot{m}_0 是常值质量秒流

量。上述物理量的值均经过了无量纲化处理。

在上升段轨迹优化中,待优化的控制变量为推力方向 $\vec{\hat{1}}_b$,状态变量为 \vec{V} 和 \vec{r} ,因而需要将空气动力 \vec{A} 和 \vec{N} 用 $\vec{\hat{1}}_b$ 、 \vec{V} 和 \vec{r} 表示出来。

2.2 轴向力和法向力的方向

设体坐标系为 $o_1 x_1 y_1 z_1$,则根据轴向力和法向力的定义,有

$$\vec{A} = -A \vec{\hat{1}}_{x_1}, \vec{N} = N \vec{\hat{1}}_{y_1} \quad (4)$$

$\vec{\hat{1}}_{x_1}$ 、 $\vec{\hat{1}}_{y_1}$ 和 $\vec{\hat{1}}_{z_1}$ 为体坐标系三个坐标轴的单位向量,且 $\vec{\hat{1}}_{x_1} = \vec{\hat{1}}_b$ 。

SLV为大升阻比有翼飞行器,认为其在飞行过程中采取倾斜转弯(BTT)控制方式,则可以有下列假设^[10,11]:飞行器纵轴单位向量 $\vec{\hat{1}}_b$ 以及对地速度 \vec{V} ,组成的平面与SLV的主对称面重合,也就是与体坐标系的 $o_1 x_1 y_1$ 平面重合。此时侧滑角为零,攻角为 $\vec{\hat{1}}_b$ 与 \vec{V} 的夹角,其大小可以通过下式来确定

$$|\sin \alpha| = \vec{\hat{1}}_{y_1} \times \vec{\hat{1}}_b \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} \vec{\hat{1}}_{y_1} = \vec{V}_r / V_r \\ \vec{V}_r = \vec{V} - \vec{\omega}_E \times \vec{r} - \vec{V}_w \end{cases} \quad (6)$$

\vec{V}_r 为SLV的对地速度, $\vec{\omega}_E$ 为无量纲化后的地球自转角速度, \vec{V}_w 是无量纲化风速矢量。

当攻角不为零时,体坐标系 $o_1 x_1 y_1 z_1$ 的各轴可以用 $\vec{\hat{1}}_b$ 和 $\vec{\hat{1}}_{y_1}$ 来表示:

$$\begin{cases} \vec{\hat{1}}_{x_1} = \vec{\hat{1}}_b \\ \vec{\hat{1}}_{z_1} = \vec{\hat{1}}_{y_1} \times \vec{\hat{1}}_b / \sin \alpha \\ \vec{\hat{1}}_{y_1} = \vec{\hat{1}}_{z_1} \times \vec{\hat{1}}_{x_1} \end{cases} \quad (7)$$

因为侧滑角为零,所以可以认为气动系数只与攻角和马赫数有关,攻角的大小可以由式(5)确定,因为法向力 N 正负与 α 的正负符号有关,所以还必须确定 α 的符号。

2.3 攻角符号的确定

攻角的符号由 $\vec{\hat{1}}_b$ 与 \vec{V} 的相对位置决定, \vec{V} 在 $\vec{\hat{1}}_b$ “之下”时攻角为正, \vec{V} 在 $\vec{\hat{1}}_b$ “之上”时攻角为负。

本文结合文献[9]的结论,在假设飞行轨迹偏离射面(平面 $o_E x_A y_A$)不是很远,认为俯仰角、偏航角以及滚动角三个姿态角以及攻角的范围均在 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 的条件下,给出一种简单的判别方法。

定义向量

$$\vec{N} = \vec{1}_{y_A} \times (\vec{V}_r \times \vec{1}_b) \quad (8)$$

此时 SLV 主对称面和平面 $z_A o_E x_A$ 的交线与向量 \vec{N} 平行,此时,有

$$\begin{cases} \alpha > 0, \vec{N}_1 > 0 \\ \alpha < 0, \vec{N}_1 < 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中 \vec{N}_1 是向量 \vec{N} 沿 x_A 轴方向的分量。见图 2 和图 3。两个图描述了 \vec{V}_r 和 $\vec{1}_b$ 的相对位置以及相应的 \vec{N} 的指向。

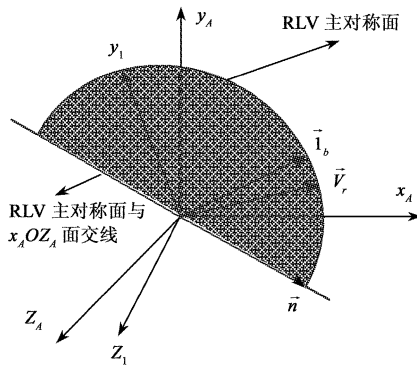


图 2 \vec{V}_r 在 $\vec{1}_b$ “之下”时的向量 \vec{N}

Fig.2 Direction of \vec{N} when \vec{V}_r is under $\vec{1}_b$

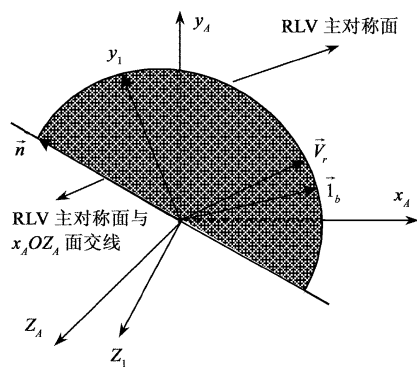


图 3 \vec{V}_r 在 $\vec{1}_b$ “之上”时的向量 \vec{N}

Fig.3 Direction of \vec{N} when \vec{V}_r is above $\vec{1}_b$

3 上升段轨迹优化

3.1 优化模型

采用由美国轨道科学公司研发的无人亚轨道飞行器 X-43 的质量及气动数据进行仿真计算^[12]。

优化指标为时间最短。初始点在水平面,对地速度为零。路径约束为动压约束,要求最大动压小于 14000Pa。要求终端高度 60km,终端速度 2000m/s,轨道倾角 56° ,终端弹道倾角 40° 。

为避免三角函数的多值性,直接选取三个方向余弦作为变量

$$\vec{1}_b = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \quad (10)$$

式中 u_x, u_y, u_z 为推力大小在坐标轴三个方向上的投影。它们必须满足约束条件

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \quad (11)$$

3.2 三维轨迹优化

使用 LPM 进行优化时,必须给出优化初值。初值的选取方法为:直接根据初始状态和终端状态给出两个边界上的猜测值,然后根据这两个边界值进行插值,得到中间时刻的变量值。插值方式一般为线性插值。

图 4 给出了推力方向余弦变化曲线,转化为相应的俯仰角 φ 和偏航角 ψ ,其变化曲线见图 5。图 6 给出了三维飞行轨迹。从这三个图可以看到,飞行轨迹偏离射面较小,这也验证了 2.3 节的假设。

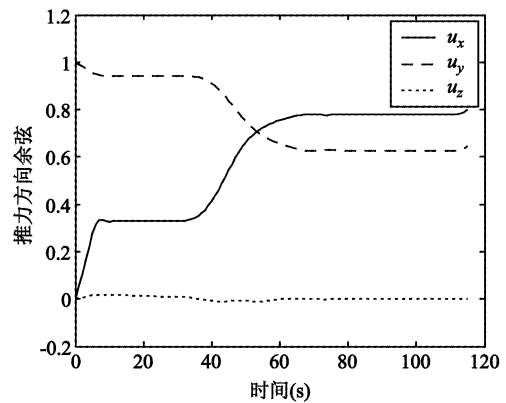


图 4 推力方向随时间变化曲线

Fig.4 Thrust direction curves

LPM 得到的优化结果需要进行可信性分析。使用 LPM 得到的结果不仅包括控制量还包括状态量,而实际飞行中只需要控制量以产生制导指令。可以根据控制量对动力学方程进行积分得到状态量的

值,只有当优化得到的状态量和积分得到的状态量一致时才能说明优化结果是可信的。图 7 显示了两种状态量的比较,计算结果表明,对于位移二者最大差别的数量级为 10^{-8} m,对于速度数量级为 10^{-10} m/s,说明优化结果具有可信性。

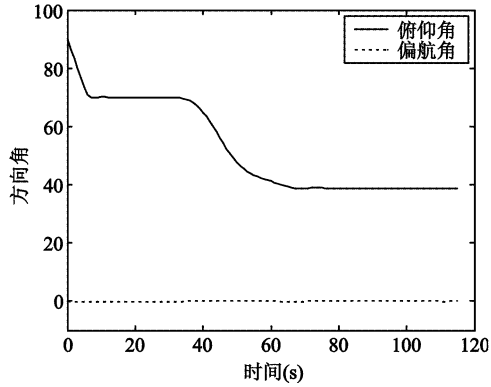


图 5 俯仰角和偏航角随时间变化曲线
Fig.5 Pitch and yaw curves

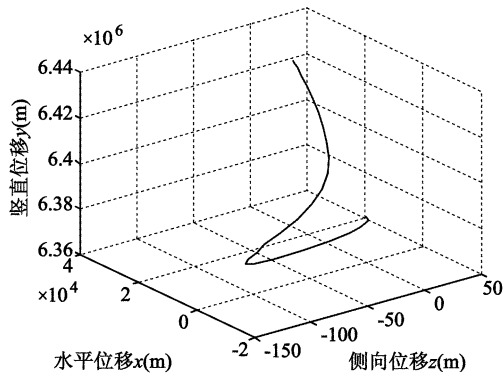


图 6 SLV 三维飞行轨迹
Fig.6 SLV Three dimension trajectory

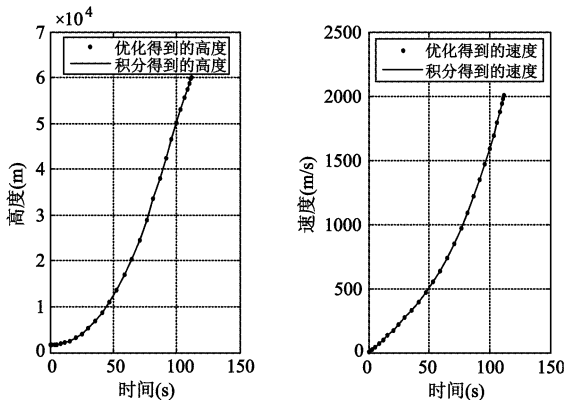


图 7 优化结果的可信性分析
Fig.7 Feasibility analysis of the results

根据优化得到的终端状态计算表明约束条件均得到满足。终端高度偏差的数量级为 10^{-6} m,终端速度偏差的数量级为 10^{-7} m/s,角度偏差的数量级为 10^{-11} rad。飞行过程中,最大动压为 13589Pa,在允许的范围。

LPM 方法的特征之一是可以验证优化结果是否满足最优性必要条件。根据 LPM 得到的协状态量及相应的哈密顿函数值见图 8,从图上可以看到,哈密顿函数的值几乎恒为 -1。

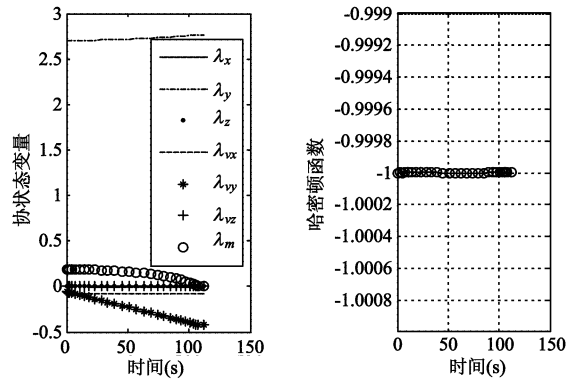


图 8 协状态变量以及哈密顿函数值
Fig.8 Costates and Hamiltonian curves

动力学方程(1)~(3)确定的系统为自治系统,且优化目标为时间最短,如果不考虑路径约束,则根据极大值原理^[6],相应的哈密顿函数的值恒为 -1。Lu Ping 等人的分析结果表明^[10],动压约束以及推力大小约束对极大值原理得到的结果没有影响,也就是说在有这些路径约束的情况下,哈密顿函数的值仍恒为 -1。

综合上述两个方面的分析可知,使用 LPM 方法得到的优化结果基本满足一阶最优性必要条件。

4 快速重规划

4.1 基于 LPM 的轨迹快速重规划

所谓快速重规划,就是在存在大气扰动、推力偏差、发射系统偏差等干扰的情况下,利用已经得到的飞行轨道以及控制规律,快速的重新构造出一条新的满足约束的轨道^[13]。轨迹快速重规划包括两个方面的含义,一是在飞行前,如果飞行环境或者飞行器性能发生变化,则需要重新设计飞行轨迹;二是在飞行的过程中,因为一些干扰因素导致飞行轨迹偏离设计好的标准轨迹,需要重新设计轨迹以满足入轨要求。前者的意义主要体现在飞行任务设计中,

后者则属于飞行制导控制范畴。

在 3.2 节的轨迹规划中,采用插值得方法得到优化计算的初值,这个初值比较粗糙,采用这个初值时,需要的优化时间一般比较长。在一般的高性能台式机上计算时间一般为十多分钟甚至一个多小时。但是如果前一次的优化结果作为下一次计算的初值,则计算速度比较快,一般只需要几秒至几十秒钟左右。

根据这个特点,可以给出一种基于 LPM 的轨迹快速重规划方法:先在不考虑干扰的条件下进行优化计算,得到标准轨迹,在有干扰因素时,以标准轨迹作为初值计算得到重规划轨迹。LPM 在优化的过程中不需要弹道积分,这会节省大量的计算时间,同时因为 LPM 对初值的敏感性较弱,初值对 LPM 的优化结果和优化速度影响较小。这两个特点保证了基于 LPM 的轨迹重规划方法的快速性和鲁棒性。

4.2 轨迹重规划仿真

考虑飞行前以及飞行过程中两种条件下的轨迹重规划。

(a) 起飞前的轨迹重规划

考虑三种偏差:

(1) 初始状态偏差。初始水平位置偏差为 + 1000m, 竖直位置偏差为 + 1000m, 水平速度偏差为 + 100m/s, 竖直速度偏差 + 100m/s。

(2) 气动系数偏差。升力系数、阻力系数偏差均为 + 90%。

(3) 推力偏差。推力大小的偏差为 + 10%。

设在有干扰作用下没有进行重规划的轨迹为偏差轨迹,表 1 列出了偏差轨迹和重规划轨迹对终端约束的偏差及轨迹重规划时间。可以看到,如果没有进行轨迹重规划,则不能满足终端约束要求。进行轨迹重规划后则对终端约束的偏差甚至低于标准轨迹。

从重规划时间上看,对于初始位置和气动参数两种偏差,重规划的速度很快,均低于 3s。对于推力偏差,重规划时间则大于 10s。其原因在于推力偏差对轨迹影响较大,导致标准轨迹与偏差轨迹有较大差别(见图 9),此时的标准轨迹是一个较差的初值,因而搜索的时间较长。仿真发现如果推力偏差 20%,则重规划的时间达到了几分钟,如果偏差比例更高则计算的时间会更长,甚至会得不到优化结果。

表 1 起飞前三种偏差条件下的重规划精度和时间

Table 1 Reconstruction precision and time on disturbance before takeoff

对比项 \ 偏差	初始状态偏差		气动系数偏差		推力偏差	
	重规划前	重规划后	重规划前	重规划后	重规划前	重规划后
高度偏差(m)	1483.7	1.3383×10^{-5}	- 508.29	$- 2.790 \times 10^{-7}$	11433	4.8152×10^{-8}
速度偏差(m/s)	112.56	5.6596×10^{-7}	- 68.0616	$- 3.299 \times 10^{-10}$	261.10	$- 3.679 \times 10^{-10}$
速度倾角偏差(°)	- 4.3331	2.5332×10^{-9}	- 3.6441	2.324×10^{-10}	- 3.2656	4.5680×10^{-11}
轨道倾角偏差(°)	- 5.1230	3.5437×10^{-8}	- 5.1535	4.578×10^{-9}	- 6.8557	3.5561×10^{-9}
重规划时间(s)	2.5940		2.6870		10.3549	

表 2 飞行过程中二种偏差条件下的重规划精度和时间

Table 2 Reconstruction precision and time on disturbance on-line

对比项 \ 偏差	气动系数偏差		推力偏差	
	重规划前	重规划后	重规划前	重规划后
高度偏差(m)	- 508.29	$- 1.740 \times 10^{-8}$	11433	2.4251×10^{-9}
速度偏差(m/s)	- 68.0616	$- 2.194 \times 10^{-9}$	261.10	$- 2.4249 \times 10^{-10}$
速度倾角偏差(°)	- 3.6441	1.310×10^{-10}	- 3.2656	3.6450×10^{-10}
轨道倾角偏差(°)	- 5.1535	3.221×10^{-10}	- 6.8557	2.4352×10^{-9}
重规划时间(s)	3.214		4.325	

(b) 飞行过程中的轨迹重规划

在飞行过程中,由于干扰作用导致飞行轨迹偏差标准轨迹,此时根据测量得到的当前状态,重新规

划轨迹,以满足终端以及路径约束。干扰因素考虑前面提到的第 2 种和第 3 种偏差。轨迹重规划的时间为第 15 个 LGL 点对应的时刻。

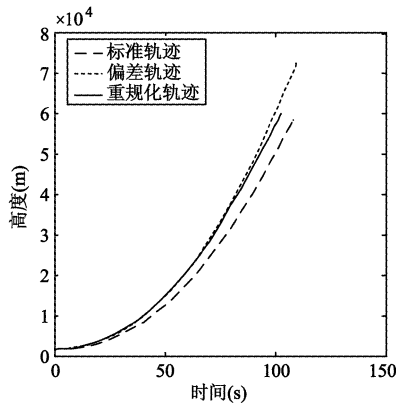


图 9 起飞前的重规划轨迹高度—时间曲线

Fig.9 Height curve of reconstruction trajectory before takeoff

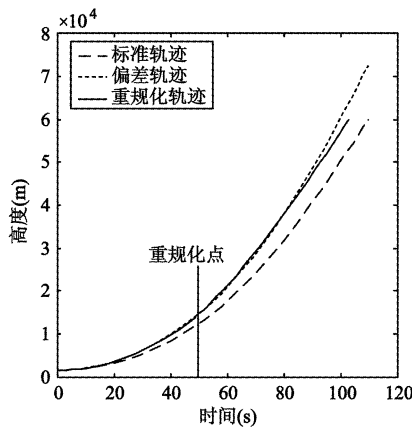


图 10 飞行中的重规划轨迹高度—时间曲线

Fig.10 Height curve of reconstruction trajectory on-line

图 10 给出了三种轨迹的高度—时间变化曲线以及重规划点。表 2 列出了入轨精度以及重规划的时间。从表 2 可以看到,重规划后入轨精度较高。而重规划的时间也比较短,均低于 5s,推力偏差情况下的重规划时间较表 1 中有大幅度提高。这是因为重规划点离目标点更近,所以需要的计算时间较短。

由于环境复杂,一般的轨迹优化方法难于快速地生成大气层内的轨迹,因而一般大气层内的上升段飞行制导一般采用开环控制方式^[10]。开环制导方式具有鲁棒性差、入轨精度差等缺点。文献[14]研究了使用 LPM 进行 RLV 再入轨迹离线规划—在线生成的闭环控制方法,该文中的轨迹在线生成环节即是本文中使用的基于 LPM 的轨迹快速生成方法。本节的仿真表明使用伪谱法进行上升段轨迹优化也具有较快的速度,这为上升段飞行闭环制导提供了一种可行的思路。

5 结论

使用 LPM 进行了 SLV 上升段三维轨迹优化具有精度高等特点,同时还可以验证优化结果是否满足一阶最优性必要条件。基于 LPM 的轨迹快速重规划方法可以用于飞行任务设计,同时也能用于轨迹的在线生成。本文只是在轨迹的在线生成方面进行了初步探讨,关于轨迹在线生成的深入研究以及上升段飞行制导的闭环控制技术是下一步的研究内容。

参考文献:

- [1] Shen Z J, Lu P. On-Board Entry Trajectories Planning Expanded to Sub-Orbital Flight, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Austin, Texas, 2003:1-13
- [2] 闫晓东,唐硕.亚轨道飞行器返回轨道设计方法研究[J].宇航学报,2008,3(2):467-471.[YAN Xiao-dong, TANG Shuo. An alter-native method of entry trajectory design for suborbital launch ve-hicle[J]. Journal of Astronautics, 2008, 3(2): 467-471 (in Chinese).]
- [3] Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1998, 21(2): 193-207.
- [4] 雍恩米,陈磊,唐国金.飞行器轨道优化数值方法综述[J].宇航学报,2008,29(2):397-406.[YONG En-mi, CHEN Lei, TANG Guo-jin. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(2): 397-406(in Chinese).]
- [5] Huntington Geoffrey Todd. Advancement and analysis of a gauss pseudospectral transcription for optimal control problems[D]. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 2007: 115-143.
- [6] Fahroo F, Ross I M. Costate estimation by a legendre pseudospectral method[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 24(2): 270-277.
- [7] 薛毅.数值分析与实验[M].北京:北京工业大学出版社,2005:161-167.[XUE Yi. Numerical Analysis and Experiment [M]. Beijing: Beijing Industrial University Press, 2005: 161-167.]
- [8] Qi G, Ross I M, Wei K, Fahroo F. Connections between the covector mapping theorem and convergence of pseudospectral methods for optimal control. Comput Optim Appl DOI. 10.1007/s10589-007-910-2-4, 2007, 1: 1-29.
- [9] 贾沛然,陈克俊,何力.远程火箭弹道学[M].国防科技大学出版社,1993:57-58.[JIA Pei-ran, CHEN Ke-jun, HE Li. Long-range Rocket Ballistics[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1993: 57-58.]
- [10] Lu Ping, Sun H, Tsai B. Closed-loop endo-atmospheric ascent guidance[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26

- (2): 283 – 294.
- [11] Gath P F, Calise A J, Optimization of launch vehicle ascent trajectories with path constraints and coast arcs[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(2): 296 – 304.
- [12] Bandu N, Pamadi, Gregory J, Brauckmann. Aerodynamic Characteristic Database Development and Flight Simulation of the X-43 Vehicle, AIAA 2000 – 0900.
- [13] 万松. 可重复使用运载器上升段轨道优化方法研究[D], 西安: 西北工业大学, 2007, 28 – 29. [WAN Song. Study of reusable launch vehicle ascent trajectory optimization methods[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2007; 28 – 29.]
- [14] Bollino K P, Ross I M. Nonlinear Feedback Control for Rapid, On-On Trajectory Optimization of Reentry Vehicles. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, 24 Aug 06: 1 – 25.

作者简介: 丁洪波(1982 –), 男, 博士生, 研究方向为飞行器制导与控制。
通信地址: 湖南长沙国防科大航天与材料工程学院学员六队 2007 级(410073)
电话: 15084714391
E-mail: whhplz2000@sohu.com

Ascent Trajectory Optimization and Fast-Reconstruction for Suborbital Launch Vehicle

DING Hong-bo¹, CAO Yuan¹, Tong Wei-ping², CAI Hong¹

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Beijing Aerospace Automatic Control Institute, Beijing 100854, China)

Abstract: A Legendre Pseudospectral Method(LPM) for Suborbital Launch Vehicle(SLV) trajectory optimization was presented and applied to a three dimensional launch problem. The expression for aerodynamic force was specially studied, and the equations of motion were posed. The ascent trajectory of SLV was optimized using LPM, and the results were analyzed. The method was demonstrated work well with high precision. And it can also be used for other vehicles, like rockets. Typical solutions can be obtained in a matter of minutes using crude guesses. Preliminary research on good guesses indicates that it is possible to generate solutions between two and ten seconds thus paving the way for trajectory fast-reconstruction.

Key words: Legendre pseudospectral method; Suborbital launch vehicle; Trajectory optimization; Fast-reconstruction