求解板材排料问题的新方法*

陈锦昌　韩锷春

(华南理工大学制图教研室 510641)

THE NEW METHOD SOLVING THE CUTTING-STOCK PROBLEM

Chen Jinchang　Han Echun

(The researching and teaching section of engineering graphics of SCUT)

Abstract

Starting with the substance of the cutting-stock problem, a new method to that problem is developed, that is, converting two-dimensional layout into one-dimensional layout and converting overall optimal solution into local optimal solution to get the approximate overall optimal solution. The three problems in the method, the construction of blocks, the layout of the blocks on standard boards, the check-ups on the straight cutting of the blocks and the automatic marking of the cutting size of blocks, are discussed in this paper.

Key words: cutting-stock, layout, approximate optimal solution

§ 1. 引　言

板材排料问题是家具、包装、地毯等行业常见的一个问题. 它是指将一批不同种类的待排矩形件全部排放在给定的板材上, 使排料所用的板材数量尽可能地少, 即板材的利用率尽可能地高. 实质上是一个组合优化的二维布局问题, 从计算复杂性来看, 是一个 NP 完全问题, 但至今还没有找到解决该问题的有效多项式时间算法. 寻求其近似最优解的近似算法是目前解决该问题的途径之一.

国内外已有不少学者在布局问题方面作了一些研究. 如有用模拟退火算法解决大规模排料问题, 但其解过分依赖于模拟退火算法冷却进度表的参数的选取, 而且该算法较适合于并行计算. 还有用线性规划或动态规划的方法, 但只适合于小规模的排料问题.

本文从板材排料问题的实质入手, 结合前人提出的一些理论和方法, 提出了化二维布局为一维布局, 化全局最优为局部最优求其近似最优解的优化解决方法.

§ 2. 优化的板材排料方案

2.1. 问题的描述

* 1999 年 3 月 9 日收到.

我们称排料所用的待排小矩形件为矩形件或零件，用来排放小矩形件的大矩形件为规格板材．设排料所用的规格板材的长度为 L，宽度为 W，数量足够多．所要排放的矩形件共有 k 种，第 i 种矩形件的长度为 l_i，宽度为 w_i，数量为 n_i，$1 \leq i \leq k$，并确保任一矩形件在满足约束的情况下在规格板材上可排．问题的基本约束条件为：

1. 任意两个矩形件之间不能互相重叠；
2. 有纹理要求时，矩形件的纹理方向应与规格板材的纹理方向一致；
3. 保证规格板材切割时满足通裁的要求.

设所有的可行布局的集合构成解空间 S，即 $S = \{$ 所有满足约束的排料方式的布局 $\}$．目标函数为

$$f(i) = N(i), \quad i \in S. \tag{1}$$

当问题是规格板材数量无限，而需要的零件 (待排矩形件) 数量是固定的，要求耗用规格板材数量最少时，$N(i)$ 为所耗规格板材的数量，目标是求 $i_{opt} \in S$，使 $f(i_{opt}) \leq f(i)$，对所有 $i \in S$ 成立．这是一个最小化问题.

当问题是规格板材数量固定，要求切割出尽可能多的零件时，$N(i)$ 为切割零件 (矩形件) 的数量，目标是求 $i_{opt} \in S$，使 $f(i_{opt}) \geq f(i)$，对所有 $i \in S$ 成立．这是一个最大化问题.

显然，解决板材排料的最大化问题和最小化问题的核心算法是相同的，因而二者之间的转化也是容易的．本文着重阐述板材排料最小化问题的解决方法.

2.2. 问题的解决思路

排料问题的解空间 S 范围太大是造成其计算复杂性差的主要原因．因此，在满足对问题解的质量要求的前提下，要提高排料速度，就必须使问题的解空间 S 范围减小.

在理论上，对于如何解决板材排料问题本文提出一个新的思路：化二维布局为一维布局，化全局最优为局部最优，求板材排料问题近似最优解.

把二维布局转化为一维布局的方法是：首先，根据一定的局部最优规则产生一些由矩形件组成的条料，条料的长小于或等于规格板材的长，条料的宽等于规格板材的宽；然后，只需再根据一定的局部最优规则沿规格板材长度方向排放前面所产生的那些条料即可，这已经是一个一维布局问题．同时，通过上述各个环节中的局部最优规则来求问题近似的全局最优解．从而把板材排料问题转化为下面三个问题：

1. 优化地产生适当的条料.
2. 将所产生的条料排放在规格板材上.
3. 检验条料是否通裁及条料开料尺寸的自动标注.

2.3. 条料的生成

2.3.1. 条料主体部分的生成

给定矩形件在规格板材上生成条料时的两种排放方式：(1) 沿着规格板材宽度 W 方向对同一矩形件 i 连续横排；(2) 沿着规格板材宽度 W 方向对同一矩形件 i 连续纵排．其对应的效果图分别如图 1 a), b) 所示

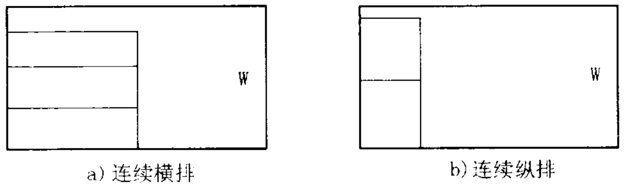


图 1　生成条料时矩形件的排放方式

令 f_h, f_v 分别为上述两种排放方式下规格板材宽度 W 方向上剩余的宽度，则

$$\begin{cases} f_h = W - h_i w_i, \\ f_v = W - v_i l_i, \end{cases} \tag{2}$$

其中 h_i, v_i 分别为上述两种排放方式下矩形件 i 连续排放的最大可能数量. 令标志

$$flag = \begin{cases} 1, & \text{若} f_h \le f_v, \\ 2, & \text{若} f_h > f_v. \end{cases} \tag{3}$$

若 $flag = 1$, 则条料主体部分由矩形件 i 沿规格板材宽度 W 方向上连续排放 h_i 块产生. 条料的长为 l_i, 条料的宽即是规格板材宽 W; 条料主体部分长为 l_i, 宽为 $w_i \times h_i$; 条料非主体部分长为 l_i, 宽为 f_h, 即 $W - w_i \times h_i$. 如图 2 a).

若 $flag = 2$, 则条料主体部分由矩形件 i 沿规格板材宽度 W 方向上连续排放 v_i 块产生. 条料的长为 w_i, 条料的宽即是规格板材宽 W; 条料主体部分长为 w_i, 宽为 $l_i \times v_i$; 条料非主体部分长为 w_i, 宽为 f_v, 即 $W - l_i \times v_i$. 如图 2 b).

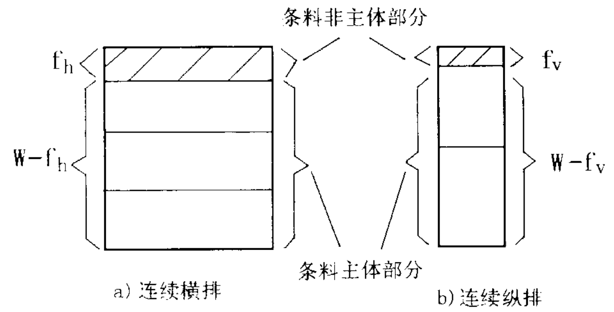


图 2　条料主体部分的产生

2.3.2. 条料非主体部分的生成

对条料非主体部分的填充也是一个二维布局的问题，只不过因为该部分的大小与待排放的矩形件大小往往相差不大，填充更易于进行. 设条料非主体部分长为 x_0, 宽为 y_0. 对于任一矩形件 i, 给定四种排放方式： 1) 沿 x_0 方向连续横排； 2) 沿 x_0 方向连续纵排； 3) 沿 y_0 方向连续横排； 4) 沿 y_0 方向连续纵排. 对应的效果图分别如图 3 a), b), c), d) 所示.

令 f_a, f_b, f_c, f_d 分别为上述四种排放方式下 x_0, y_0 方向上剩余的长度或宽度，则

$$\begin{cases} f_a = x_0 - u_a l_i, \\ f_b = x_0 - u_b w_i, \\ f_c = y_0 - u_c w_i, \\ f_d = y_0 - u_d l_i, \end{cases} \tag{4}$$

其中 u_a、u_b，u_c，u_d 为四种排放方式下矩形件 i 连续排放的最大可能数量. 令标志

$$flag=\begin{cases}1, & 若 f_a=\min(f_a,\ f_b,\ f_c,\ f_d),\\ 2, & 若 f_b=\min(f_a,\ f_b,\ f_c,\ f_d),\\ 3, & 若 f_c=\min(f_a,\ f_b,\ f_c,\ f_d),\\ 4, & 若 f_d=\min(f_a,\ f_b,\ f_c,\ f_d).\end{cases} \tag{5}$$

$flag$ 等于 1, 2, 3, 4 分别表示图 3 a), b), c), d) 所示的四种排放方式.

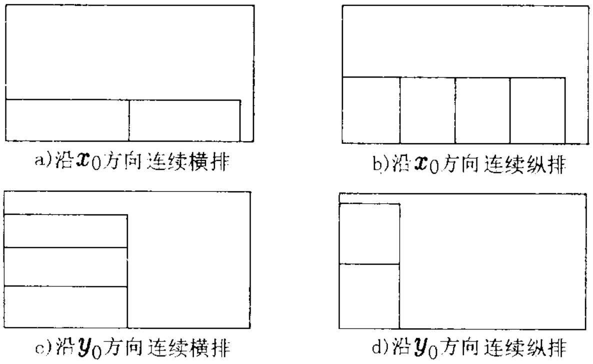


图 3 矩形件在条料非主体部分中的排放方式

上述过程称为对条料非主体部分的第一次填充. 对于条料非主体部分第一次填充后的剩余部分，可重复前面的填充方法，直至产生的矩形都不可排或待排矩形件全部用光.

§ 3. 条料在规格板材上的优化排放方法

3.1. 问题的描述

设规格板材的长度为 L, 共生成 m 种条料，每种条料的长度为 l_i, $l_i \le L$, 每种条料的数量为 n_i, $1 \le i \le m$. 所有的条料构成一个集合 $V=\{v_{ij}|1\le i\le m,\ 1\le j\le n_i\}$, 集合中的元素总数为 $n=\sum\limits_{i=1}^{m} n_i$, 即共有 n 块条料需要排放. 所需规格板材的总数为 t, 其集合 $B=\{b_i|1\le i\le t\}$. 对于某块规格板材，条料在其上的排放方案为 $[x_1,x_2,\cdots,x_m]$, 其中 x_i 为条料 i 在该块规格板材排放的数量.

问题的目标是寻求合理的条料排放方案，使得所需规格板材的数量 t 尽可能地少.

3.2. 条料排放的优先策略解法

优先策略解法是从问题的某一初始出发，按照一定的优先策略，向给定的目标递推. 但与动态规划解法不同的是，推进的每一步不是依据某一固定的递推式，而是做一个当时是看似最优的选择，不断地将问题实例归纳为更小的子问题，并期望通过所做的局部最优选择产生一个全局最优解或近似最优解.

对于条料排放问题，采用的是长度优先策略，即每次从条料集合 V 中选长度最大的能

排入规格板材剩余空白部分的区域的条料排入规格板材，直至

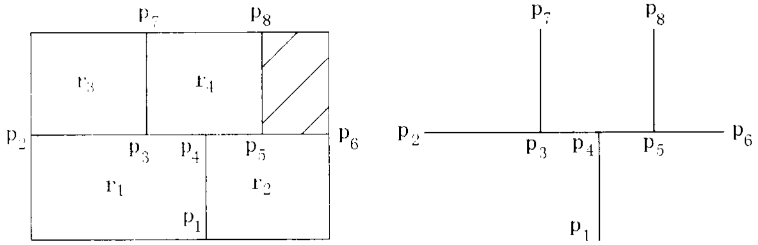
$$L-\sum_{i=1}^{m}x_il_i<\min\{l_i|1\leq i\leq m\}.$$

规格板材剩余的部分长度对任何剩余的条料都不可排时，再取另一块规格板材，重复上述过程，直至所有条料排放完.

优先策略法求解排料问题得出的解是一个近似最优解而不是一个全局最优解.

§ 4. 通裁的检验与开料图尺寸的自动标注

因为条料排放在规格板材上，条料的宽度与规格板材的宽度相等，所以规格板材是否能通裁，其实就是条料是否能通裁. 开料图尺寸的自动标注，也就是条料开料尺寸的自动标注.



a) 排列图　　b) 线框图

图 4　条料 R

如图 4 a) 为一条料 R 的排列图. 我们称条料 R 为矩形 R. r_1，r_2，r_3，r_4 为排放在矩形 R 上的四个矩形件，阴影部分为 R 上未排放矩形件的空白区域. 设 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 表示 r_1，r_2，r_3，r_4 四个矩形件的边，其中不包括与 R 重合的边以及四个矩形件之间互相重合的边. 将所有这些边用集合表示为 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$，用各边的两端点表示各边为 $a_1(P_2,P_4)$，$a_2(P_4,P_6)$，$a_3(P_1,P_4)$，$a_4(P_3,P_7)$，$a_5(P_5,P_8)$(图 4b). 显然所有这些边都为水平线或垂直线，若 $A=\Phi$，则矩形不需裁剪，即矩形上只排放有一个矩形件，且矩形的长度和宽度与矩形件的长度和宽度相等.

一般地，设有矩形 R，其边集合为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，若过某一边 $a_i\in A$ 的两端点至少存在一条直线 l，使得当 l 为水平线时，对任意 $a_i\in A$ 的两端点纵坐标值分别与 l 的纵坐标值之差积大于或等于零. 当 l 为垂直线时，对任意 $a_j\in A$ 的两端点横坐标值分别与 l 的横坐标值之差积大于或等于零. $1\leq i\leq n,1\leq j\leq n$，$n$ 为边集合 A 中边的总数，则称矩形 R 可通切一次.

通切一次的结果是将矩形 R 分为两个子矩形 R_1，R_2.

若对矩形 R 及其子矩形都递归通切一次，最后生成的子矩形的边集合都为空集 Φ，则证明矩形 R 可通裁，否则证明矩形 R 不可通裁.

在检验矩形是否通裁的过程中，条料开料尺寸的标注也可完成. 若直线 l 为水平线，则尺寸线方向为垂直方向，尺寸线的基点在直线 l 所分的矩形的左下角，尺寸大小为尺寸线的基点至直线 l 的距离. 若直线 l 为垂直线，则尺寸线方向为水平方向，尺寸线的基点在直线

l 所分的矩形的左下角，尺寸大小为尺寸线的基点至直线 l 的距离．如图 5 所示．

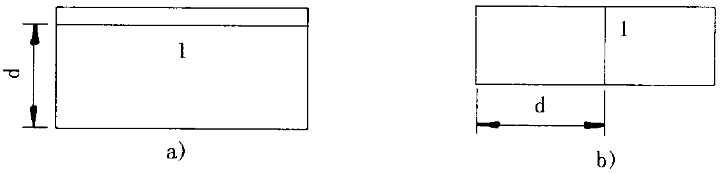


图 5 尺寸的标注

要注意的是，一块条料的通裁可能存在几种切割方式，各种切割方式需要的切割次数也可能不同．从提高生产效率角度出发，我们应该选择切割次数最少的切割方式．

§ 5. 应用举例

按照上面的分析，解决了板材排料中的几个关键问题．作者编制了一套简明实用高效的软件．下面以一个六门柜为例来说明本方法的效果．设六门柜中的板材数据如表 5-1 所示．

表 5-1

序 号	名 称	长 度	宽 度	数 量	规 格 板 材
1	顶板	2361	595	1	480# 双面三聚氰氨板
2	侧板	2135	572	2	微粒板 (18)
3	内山	2057	567	2	480# 双面三聚氰氨板
4	底板	2323	572	1	480# 双面三聚氰氨板
5	层板	768	560	7	480# 双面三聚氰氨板
6	脚板	2323	70	1	微粒板 (18)
7	脚板	2323	70	1	480# 双面三聚氰氨板
8	脚板	520	70	4	480# 双面三聚氰氨板
9	背板	2074	396.5	6	中纤板 (3)
10	门板	2078	396	6	微粒板 (18)
11	面板	766	473	1	480# 双面三聚氰氨板
12	挡板	400	60	1	480# 双面三聚氰氨板
13	挡板	666	70	2	480# 双面三聚氰氨板
14	侧板	400	450	2	480# 双面三聚氰氨板
15	底板	666	70	2	480# 双面三聚氰氨板
16	屉面	662	199	2	480# 双面三聚氰氨板
17	屉尾	616	150	2	中纤板 (12)
18	屉侧	410	150	4	中纤板 (12)
19	屉底	409	627	2	中纤板 (3)

所用的规格板材数据如表 5-2 所示．

表 5-2

序 号	名 称	长 度	宽 度
1	480# 双面三聚氰氨板	2440	1840
2	微粒板 (18)	2440	1220
3	中纤板 (12)	2440	1220
4	中纤板 (3)	2440	1220

分别对 1 件 (单件), 10 件 (多件), 50 件 (批量) 六门柜进行排料，每种规格板材的总利用率及所需要的数量如表 5-3 所示.

表 5-3

生产批量 / 名称	1 件		10 件		50 件	
	利用率	数量	利用率	数量	利用率	数量
480# 双面三聚氰氨板	70.97%	3 块	88.71%	24 块	90.99%	117 块
中纤板 (12)	14.47%	1 块	72.36%	2 块	90.45%	8 块
中纤板 (3)	60.99%	3 块	79.56%	23 块	79.56%	115 块
微粒板 (18)	84.64%	3 块	81.73%	31 块	82.80%	153 块

分析： 1. 在单件排料的情况下，由于待排零件的数量很小，所以可能会出现一块规格板材足以排下所有零件而且绰绰有余的情况，导致利用率较低，如中纤板 (12) 的利用率只有 14.47%. 在这种特殊的情况下，要尽量让零件向左排放，使余下的规格板材部分尽可能地长，可以更好的再利用.

2. 在小批量生产 (5–50 件) 的情况下，家具厂经手工试算后的规格板材的利用率一般为 70%–80%. 用本系统后利用率一般能提高 5%–8%.

3. 在中等或大批量生产 (50 件以上) 的情况下，家具厂已基本上不能进行手工试算，只能凭经验开料，其利用率一般为 75%–85%. 用本系统后利用率一般能提高 5%–10%, 达到 80%–95% 以上.

4. 对于排料速度，用目前市场上主流的微机配置，在大批量情况下，排料所耗时间不到 1 秒，即提供用户排料效果图 (含板材名称、板材长宽数据、板材数量、板材利用率等信息). 其排料速度已非用手工试算的排料速度可比.

§6. 结　论

本文在理论上提出了化二维布局为一维布局，化全局最优为局部最优的求板材排料问题近似最优解的新思路，并解决了从条料的生成，条料的排放，到开料图尺寸的自动标注等板材排料关键环节的几个问题，从而编制出一套简明实用高效的软件. 很好地解决了在板材排料中板材利用率、排料速度、加工工艺等几个主要问题. 这对降低生产成本，提高生产效率，从而提高企业产品的市场竞争力方面起到了积极作用.

参 考 文 献

[1] 吴文虎等，实用算法分析与程序设计，电子工业出版社，北京， 1998.
[2] 王金敏等，布局问题的模拟退火算法，计算机辅助设计与图形学学报， 3 (1998).
[3] 曹炬等，矩形件排样优化的一种近似算法，计算机辅助设计与图形学学报， 3 (1995).