求不稳定温度场的一种显式差分格式*

王润富

(南京华东水利学院)

ON A DIFFERENCE FORMULA TO SOLVE THE NO-STEADY FIELD OF TEMPERATURE

Wang Run-fu

(*The East China Technical University of Water Resources*)

Abstract

In this paper a difference formula was introduced, in which the derivative of the temperature function with respect to time t used second difference formula. It possesses the precision higher than the linear difference formula, i.e. the error of the second difference formula is $O(\Delta t^3)$ less than $O(\Delta t^2)$ of the lineal formula. The conditions of stableness and convergence of this formula is almost same with the linear formula.

一、平面不稳定温度场

基本方程

$$\dot{T} = a\nabla^2 T + \dot{\theta}, \tag{1}$$

其中 θ 表示物体的绝热温升. 如混凝土的内热源强度用绝热温升 θ 表示为

$$\theta = \theta_a t/(m + t).$$

以后凡是 $\dot{T}$、$\ddot{T}$、$\dddot{T}$ 分别表示 T 对时间 t 的一、二、三阶导数，$\dot{\theta}$、$\ddot{\theta}$ 表示 θ 对 t 的一、二阶导数.

边界条件一、二、三类分别为

$$c_1: \qquad T|_s = T_b(t), \tag{2}$$

$$c_2: \qquad q_n|_s = q_b(t), \quad 即 \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s = q_b, \tag{3}$$

$$c_3: \qquad q_n|_s = \beta(T_s - T_a(t)), \quad 即 \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s = \beta(T_s - T_a). \tag{4}$$

初始条件

$$t = t_0: \qquad T = T(x, y, t_0). \tag{5}$$

* 1980 年 9 月 20 日收到.

记 t 时刻的温度为 T，$(t+\Delta t)$ 时刻的温度为 T'，应用台劳公式

$$T' = T + \dot{T}\Delta t + \ddot{T}\frac{\Delta t^2}{2} + \dddot{T}(t+\alpha\Delta t)\frac{\Delta t^3}{6}$$

$$= T + \dot{T}\Delta t + \ddot{T}\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3). \tag{6}$$

(6)式比目前常用的线性差分公式的误差 $O(\Delta t^2)$ 要高一阶.

我们根据(6)式(略去 $O(\Delta t^3)$) 来列出 0 点的差分公式. 注意由方程(1)得到

$$\dot{T} = a\nabla^2 T + \dot{\theta}, \quad \ddot{T} = a\nabla^2\dot{T} + \ddot{\theta},$$

代入(6)式,对 x, y 也用抛物线差分公式,则对 0 点列出差分方程为(见图 1)

$$T'_0 = T_0 + \dot{T}_0\Delta t + [a\nabla^2\dot{T} + \ddot{\theta}]_0\frac{\Delta t^2}{2},$$

而

$$\dot{T}_0 = [a\nabla^2 T + \dot{\theta}]_0 = \frac{a}{h^2}(T_{1,2,3,4} - 4T_0) + \dot{\theta}_0,$$

$$\ddot{T}_0 = [a\nabla^2\dot{T} + \ddot{\theta}]_0 = \frac{a}{h^2}(\dot{T}_{1,2,3,4} - 4\dot{T}_0) + \ddot{\theta}_0.$$

这里记 $T_{1,2,3,4} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$，下同,并记 h 为 x、y 向网格步长，Δt 为时间步长，又记

$$n = a\Delta t/h^2.$$

略去 θ 的三阶量,则

$$\theta' - \theta \doteq \dot{\theta}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}\Delta t^2.$$

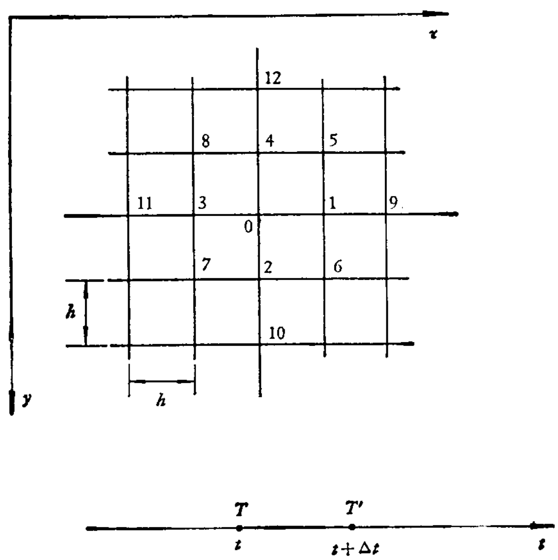

图 1 差分网格图

于是代入后得到内节点 0 的显式差分方程

$$T_0' = T_0(1-4n+10n^2)+T_{1,2,3,4}(n-4n^2)+T_{5,6,7,8}(n^2) + T_{9,10,11,12}\left(\frac{n^2}{2}\right)+(\theta_0'-\theta_0)+\frac{n}{2}(\dot{\theta}_{1,2,3,4}-4\dot{\theta}_0)\Delta t. \tag{7}$$

一般如混凝土的绝热温升 θ 在同一令期的一块中，是不随位置改变的，所以此时可得

$$(\dot{\theta}_{1,2,3,4}-4\dot{\theta}_0)=0.$$

对第一类边界 c_1，设图 1 中 5 1 6 为 c_1 边界，T_5、T_1、T_6 为已知，则对 c_1 边界内的 0 点的显式差分方程为

$$T_0' = T_0\left(1-4n+\frac{19}{2}n^2\right)+T_1(n-2n^2)+T_{2,3,4}(n-4n^2) + T_{5,6}\left(\frac{n^2}{2}\right)+T_{7,8}(n^2)+T_{10,11,12}\left(\frac{n^2}{2}\right)+(\theta_0'-\theta_0) + \frac{n}{2}(\dot{\theta}_{2,3,4}+\dot{T}_1-4\dot{\theta}_0)\Delta t. \tag{8}$$

对第二类边界 c_2，设图 1 中 4 0 2 为 c_2 边界，则 T_4、T_0、T_2 为未知数，由边界条件

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s = q_b,$$

我们得到边界外一行虚结点的 T 值表示如下：

$$T_1 = T_3-\frac{2h}{\lambda}q_0,\quad \dot{T} = \dot{T}_3-\frac{2h}{\lambda}\dot{q}_0,$$

$$T_5 = T_8-\frac{2h}{\lambda}q_4,\quad T_6 = T_7-\frac{2h}{\lambda}q_2,$$

其中 q_0, q_4, q_2 为已知．代入可得 c_2 边界上 0 点的显式差分方程

$$T_0' = T_0(1-4n+10n^2)+T_{2,3,3,4}(n-4n^2)+T_{7,8}(2n^2) + T_{10,11,11,12}\left(\frac{n^2}{2}\right)+(\theta_0'-\theta_0)+\frac{n}{2}(\dot{\theta}_{2,3,3,4}-4\dot{\theta}_0) - \frac{h}{\lambda}n[2(1-2n)q_0+nq_{2,4}+\dot{q}_0\Delta t]. \tag{9}$$

对于第三类边界 c_3，设图 1 中 402 为 c_3 边界，T_4、T_0、T_2 为未知数，由边界条件

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s = \beta(T_s-T_a)$$

得虚结点的 T 值

$$T_1 = T_3-2k(T_0-T_a),\quad \dot{T}_1 = \dot{T}_3-2k(\dot{T}_0-\dot{T}_a),$$
$$T_5 = T_8-2k(T_4-T_a),\quad T_6 = T_7-2k(T_2-T_a),$$

其中

$$k = h\beta/\lambda.$$

代入得到 c_3 边界上 0 点显式差分方程

$$T_0' = T_0[(1-4n+10n^2)+2kn(kn+4n-1)] + T_{2,4}(n-4n^2-2kn^2)+2T_3(n-4n^2-kn^2)$$

$$+T_{7,8}(2n^2)+T_{10,11,11,12}\left(\frac{n^2}{2}\right)+(\theta_0'-\theta_0)$$

$$+\frac{n}{2}(\dot{\theta}_{2,3,3,4}-4\dot{\theta}_0)\Delta t+knT'_a\Delta t+2knT_a(1-n-kn). \quad (10)$$

二、一维不稳定温度场

设温度场T只沿x向变化,则

$$T_5=T_6=T_1,\quad T_7=T_8=T_3,$$
$$T_4=T_2=T_{10}=T_{12}=T_0.$$

代人,简化(7—10)公式可得一维不稳定温度场的显式差分公式如下:

内点0的方程

$$T_0'=T_0(1-2n+3n^2)+T_{1,3}(n-2n^2)+T_{9,11}\left(\frac{n^2}{2}\right)$$
$$+(\theta_0'-\theta_0)+\frac{n}{2}(\dot{\theta}_{1,3}-2\dot{\theta}_0)\Delta t; \quad (11)$$

c_1 边界内0点方程

$$T_0'=T_0\left(1-2n+\frac{5}{2}n^2\right)+T_1(n-n^2)+T_3(n-2n^2)$$
$$+T_{11}\left(\frac{n^2}{2}\right)+(\theta_0'-\theta_0)+\frac{n}{2}(\dot{\theta}_3+\dot{T}_1-2\dot{\theta}_0)\Delta t; \quad (12)$$

c_2 边界点0的方程

$$T_0'=T_0(1-2n+3n^2)+T_3(2n-4n^2)+T_{11}(n^2)$$
$$+(\theta_0'-\theta_0)+n(\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_0)\Delta t-\frac{h}{\lambda}n[(2-2n)q_0+\dot{q}_0\Delta t]; \quad (13)$$

c_3 边界点0的方程

$$T_0'=T_0[(1-2n+3n^2)+2kn(kn+2n-1)]+T_3(2n-4n^2-2kn^2)$$
$$+T_{11}(n^2)+(\theta_0'-\theta_0)+n(\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_0)\Delta t$$
$$+kn[\dot{T}_a\Delta t+2T_a(1-n-kn)]. \quad (14)$$

三、关于稳定性和收敛性的分析

对于迭代格式

$$u_{j+1}=Au_j+B,\quad u_0=\varphi, \quad (15)$$

其中A为系数矩阵,u为未知数列阵,B为自由项列阵,u_0 为初值, u_{j+1}, u_j 分别为第 $j+1$, j 次迭代值. 这种差分格式的稳定性和收敛性的充分条件可以用矩阵A的范数表示如下[2,3,4]:

$$\|A\|\leqslant 1. \quad (16)$$

这里范数$\|A\|$取

$$\|A\|_m = \max_{k} \sum_{l} |a_{kl}| \leqslant 1. \tag{17}$$

满足条件(16)或(17)便保证了差分格式的稳定性（即误差向量 ρ_j 的范数小于初始误差向量 ρ_0 的范数）和收敛性(即当 $\Delta t \to 0$, $h \to 0$ 时差分方程的解逼近微分方程的解).

1. 下面按(17)式讨论平面不稳定温度场的显式格式，分析(7)—(10)式的稳定性和收敛性条件.

(7)式，我们对第一个因子 $f_1 = (1 - 4n + 10n^2)$ 补充两个加强性的附加条件：在迭代过程中，①为防止 T_0 值正负变号令 $f_1 \geqslant 0$，显然由于 $f_1 = [(1-2n)^2 + 6n^2] \geqslant 0$，所以自然满足；②为防止 T_0 值不收敛，令 $f_1 \leqslant 1$，因为 f_1 是 n 的二次式，可得出当 $0 \leqslant n \leqslant \frac{4}{10}$ 时，$f_1 \leqslant 1$，否则 $f_1 > 1$. 又由定义 $n = \frac{a\Delta t}{h^2}$，显然 $n \geqslant 0$，所以由上面条件得出

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{4}{10}. \tag{a}$$

为取第二个因子 $f_2 = (n - 4n^2)$ 的绝对值，在不违背条件 (a) 下，只能取 $f_2 \geqslant 0$，所以得

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{4}. \tag{b}$$

再求范数

$$\|A\|_m = (1 - 4n + 10n^2) + 4(n - 4n^2) + 6n^2 = 1,$$

满足条件(17). 比较 (a)、(b) 条件，得内点对 n 的限制条件是

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{4}. \tag{18}$$

对(8)、(9)进行讨论的结果完全同(18)式.

关于第三类边界点的(10)式，我们对第一个因子

$$g_1 = [(1 - 4n + 10n^2) + 2kn(kn + 4n - 1)]$$

补充条件：① 令 $g_1 \geqslant 0$，由于 $g_1 = \{[1-(2+k)n]^2 + (6 + 4k + k^2)n^2\} \geqslant 0$，自然满足；② 令 $g_1 \leqslant 1$，g_1 为 n 的二次式，可得当

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{(2+k)}{(2+k)^2 + 1} \tag{c}$$

时 $g_1 \leqslant 1$，否则 $g_1 > 1$.

其次对第二个因子 $g_2 = (n - 4n^2 - 2kn^2)$ 取绝对值，在不违背条件 (c) 下，只能取 $g_2 \geqslant 0$，得到

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2(2+k)}\text{1)}. \tag{d}$$

对第三个因子 $g_3 = (n - 4n^2 - kn^2)$ 取绝对值，在 (c) 条件下只能取 $g_3 \geqslant 0$，得到

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{(4+k)}\text{2)}. \tag{e}$$

---

1) 设 $k + 2 > 0$.
2) 设 $k + 4 > 0$.

代入求范数 $\|A\|_m$，得

$$\|A\|_m = [(1-4n+10n^2)+2kn(kn+4n-1)$$
$$+2(n-4n^2-2kn^2)+2(n-4n^2-kn^2)+6n^2$$
$$=[1-2kn+2k(k+1)n^2].$$

为了使 $\|A\|_m \leqslant 1$，必须取

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{(k+1)}. \tag{f}$$

比较 (c)、(d)、(e)、(f)，可见对(10)式 n 应取为

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2(2+k)}. \tag{19}$$

2. 对于一维问题的不稳定温度场的显式差分方程,同样可以导出稳定性、收敛性的充分条件.

对于内结点和 c_1、c_2 边界点上的方程(11)、(12)、(13)的条件是

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}. \tag{20}$$

对于 c_3 边界点方程(14)的条件是

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{(2+k)}. \tag{21}$$

3. 我们将对 t 的线性显式差分公式[1] 和本文对 t 的抛物线显式差分公式的稳定性、收敛性条件相比较,见表 1,可以看出两者对 n 的要求几乎相同.

表 1 稳定性、收敛性条件比较

	对 t 差分公式	内结点、c_1、c_2 边界点	c_3 边界点
平面问题	抛物线公式	$n \leqslant \frac{1}{4}$	$n \leqslant \frac{1}{2(2+k)}$
	线性公式	$n \leqslant \frac{1}{4}$	$n \leqslant \frac{1}{2(2+k)}$
一维问题	抛物线公式	$n \leqslant \frac{1}{2}$	$n \leqslant \frac{1}{(2+k)}$
	线性公式	$n \leqslant \frac{1}{2}$	$n \leqslant \frac{1}{2(1+k)}$ 1)

注 1) 此式与第三式未完全匹配.

四、例 题

设有一平面长条，初始温度 $T_0 = 100°$，边界条件 $T_s = 0$，图 2. 物理常数(以米、吨、天、度为单位)为 $\lambda = 46$，$c = 230$，$p = 2$，$a = \frac{\lambda}{cp} = 0.1$，$\beta = 480$. 取 $h = 1$ 米，$n = 0.1\Delta t$，$k = 10.436$. 由稳定性和收敛性条件要求 $n \leqslant \frac{1}{2}$，所以 $\Delta t \leqslant 5$ (天).

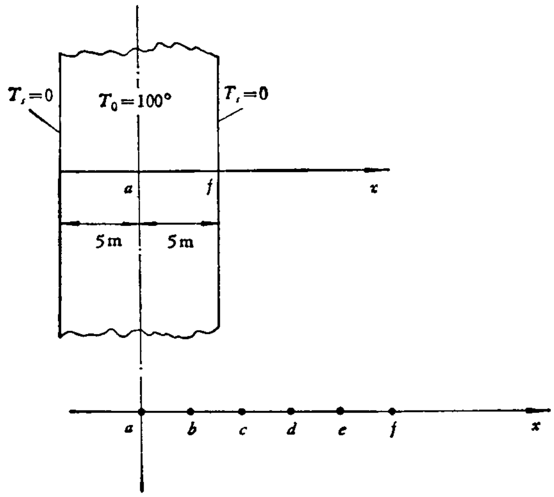

图 2　一维问题的差分计算

表 2　一维温度场例题计算，a 点 T 值(度)

t (天)	0	5	10	15	20	25	30	35
解析解	100	100	99.918	99.221	97.515	94.931	91.754	88.244
本文公式	100	100	100	99.219	97.559	95.164	92.241	88.976
误差 %						0.7	0.5	0.8
线性公式	100	100	100	100	100	93.750	93.750	85.938
误差 %				0.8	2.5	−1.2	2.2	−2.6
t (天)	40	45	50	55	60	65	70	75
解析解	84.578	80.883	77.231	73.667	71.220	66.902	63.722	60.680
本文公式	85.519	81.980	78.438	74.947	71.541	68.242	65.063	62.010
误差 %	1.1	1.3	1.6	1.7	0.04	2.0	2.1	2.2
线性公式	85.938	78.125	78.125	70.801	70.801	64.087	64.087	57.984
误差 %	1.6	−3.4	1.2	−3.9	−0.6	−4.2	0.6	−4.4

以下取时间步长 $\Delta t=5$ 天，空间步长 $h=1$ 米，在 a—f 线上(图 2)仅取六点进行计算．我们根据抛物线公式(11)、(12)进行计算，又对比了线性显式公式[1] 的计算结果及理论解[5] 的结果，列于表 2.

从结果比较可以看出，本文的显式差分公式在精度上优于一般的线性显式差分公式．

五、结　论

1. 本文导出对 t 的抛物线显式差分公式与对 t 的线性显式差分公式[1]相比，两者的稳定性、收敛性条件相似，见表 1.

2. 本文公式从精度上讲，要比线性公式好，前者误差为 $O(\Delta t^3)$，后者为 $O(\Delta t^2)$，这方面精度提高了一阶. 从例题看，前者精度也优于后者，得到了验证.

3. 本文对 t，对坐标 x，y 均采用抛物线差分公式，两者是匹配的.

所以，本文可作为显式差分公式的一种改进.

参　考　文　献

[1] 徐芝纶，弹性力学(上)，人民教育出版社，1979.
[2] 清华大学、北京大学，计算方法(下册)，科学出版社，1980.
[3] 胡祖炽，计算方法，高等教育出版社，1959.
[4] 北京大学、吉林大学、南京大学，计算方法，人民教育出版社，1961.
[5] 潘家铮，混凝土坝的温度控制计算，上海科学技术出版社. 1959