

# 求解二维三温能量方程的半粗化代数 多重网格法<sup>\*1)</sup>

肖映雄 舒 适

(湘潭大学计算与应用数学研究所 湖南湘潭 411105)

张平文

(北京大学数学科学学院 北京 100871)

莫则尧

(北京应用物理与计算数学研究所 北京 100088)

许进超

(美国宾州大学计算数学与应用研究中心)

## A KIND OF SEMI-COARSING AMG METHOD FOR TWO DIMENSIONAL ENERGY EQUATIONS WITH THREE TEMPERATURES

Xiao Yingxiong Shu Shi

(*Institute of Computational & Applied Mathematics, Xiangtan Univ, Xiangtan,  
Hunan 411105*)

Zhang Pingwen

(*School of Mathematical Science, Peking University, Beijing, 100871*)

Mo Zeyao

(*Institute of Applied Physics & Computational Mathematics, Beijing, 100088*)

Xu Jinchao

(*Center for Computational Mathematics and Applications, Penn State University, USA*)

### Abstract

In this paper, using the special properties of two dimension energy equations with three temperatures, we construct a kind of semi-coarsing algebraic multi-grid(SAMG) method and the corresponding Krylov subspace iterative methods applied to the coupling equations of energy equations and fluid mechanics equations. Some extensive numerical experiments and comparison results are presented.

\* 2002 年 7 月 25 日收到.

1) 国家 973 项目“大规模科学计算研究”课题资助项目, 国防科技重点实验室基金资助, National High-Tech ICF Committee in China

They clearly demonstrate that our AMG method is of high efficiency and robustness.

**Key words:** Energy equations, algebraic multigrid(AMG), Krylov subspace iterations, semi-coarsing

## §1. 引 言

二维三温辐射流体动力学方程组的求解是数值模拟的重要组成部分, 而求解能量方程是一个十分重要的环节, 而且在整个系统的计算中, 能量方程求解所占的机时比重相当大(约 80% 以上). 因此, 寻求一个收敛快、稳定性好的二维三温能量方程数值解法是一个值得探讨的问题. 二维三温能量方程可表示为非线性抛物型方程组, 在二维柱对称 Lagrange 坐标系下, 二维三温能量方程的标量式经简化得到如下方程组:

$$\begin{cases} C_{ve} \frac{\partial T_e}{\partial t} + \left( P_e + \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial V} \right) \frac{\partial V}{\partial t} - V \cdot \text{div}(K(\rho, T_e) \text{grad} T_e) = \omega_{ei}(T_{ei} \omega_{er}(T_r - T_e)), \\ C_{vi} \frac{\partial T_i}{\partial t} + \left( P_i + q_i + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial V} \right) \frac{\partial V}{\partial t} - V \cdot \text{div}(K(\rho, T_i) \text{grad} T_i) = \omega_{ei}(T_e - T_i), \\ C_{vr} \frac{\partial T_r}{\partial t} \left( P_r + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial V} \right) \frac{\partial V}{\partial t} - V \cdot \text{div}(K(\rho, T_r) \text{grad} T_r) = \omega_{er}(T_e - T_r), \end{cases} \quad (1.1)$$

边界条件为:

1. 固壁和轴对称条件:  $(F_n)_\alpha = 0$ ,  $\alpha = e, i, r$ ,  $n$  为法向.
2. 自由面边界条件:  $(F_n)_{e,i} = 0$ ,  $T_r = T_r(x, y, t)$ .

初始边界条件为:  $T_\alpha(x, y, t^0) = T_\alpha^0(x, y)$ ,  $\alpha = e, i, r$ , 其中  $\varepsilon_e, \varepsilon_i, \varepsilon_r$  分别表示电子、离子和光子单位质量的内能,  $P_e, P_i, P_r$  分别表示电子、离子和光子的压强,  $q_i$  为人工粘性压强,  $C_{ve}, C_{vi}, C_{vr}$  分别为电子、离子和光子的等容比热,  $\rho$  为介质密度,  $V = \frac{1}{\rho}$  为比容,  $\omega_{ei}, \omega_{er}$  分别表示电子与离子、光子与电子的能量交换系数,  $K_\alpha = K(\rho, T_\alpha)$  ( $\alpha = e, i, r$ ) 为热传导系数,  $T_e, T_i$  和  $T_r$  分别表示电子、离子和光子温度函数.

本文将主要讨论二维三温能量方程在某个时间步和某个线性迭代步下, 相应线性代数方程组的求解. 由于所需求解的线性代数方程组的系数矩阵是大型稀疏矩阵, 所以通常采用的数值求解方法为迭代法.

通过对能量方程 (1.1) 进行全隐式差分格式离散及线性化 (见文 [1]), 设在某个时间步和某个非线性迭代步下, 需要求解如下的非对称稀疏线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

其中  $n$  为网格结点数,  $T_i, b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 均为  $3 \times 1$  的块向量,  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 为  $3 \times 3$  的子块矩阵.

由于实际二维三温辐射流体力学方程组非常复杂, 因此要求在仅知道系数矩阵、右端向量和部分单层网格信息的情况下, 设计一个有效、快速和稳定性好的求解稀疏线性代数方程

组的多重网格算法, 这时一般必须采用代数多重网格法 (AMG 法). 本文针对二维三温能量方程的特殊性, 对离散化线性代数方程组 (1.2), 构造了一类基于半粗化的代数多重网格法, 进而得到以此为预条件子的 Krylov 子空间迭代法.

## §2. 基于半粗化的 AMG 预条件 Krylov 子空间迭代法

为了引出求解非对称线性代数方程组 (1.2) 的基于 AMG 预条件子的 Krylov 子空间迭代法, 我们首先应用目前国际上流行的两类以 ILU(0) 为预条件子的 Krylov 子空间迭代法 (详见文 [2]): ORTHOMIN(m) 和 GMRES(m) 迭代法, 对方程组 (1.2) 进行数值实验和分析.

在 8 千阶网格结点规模 (160×53) 下, 对一组实际的二维三温能量方程离散化线性代数方程组进行了数值计算. 实验结果如表 2.1 – 表 2.5 所示, 其中表 2.1 – 表 2.3 为预条件 ORTHOMIN(m) 迭代法的数值结果, 表 2.4 – 表 2.5 为预条件 GMRES(m) 迭代法的数值结果.

表 2.1 基于 ILU(0) 的预条件 ORTHOMIN(m)(m=1,5,10,15) 数值结果

方程组	$\ r_0\ _2$	m=1		m=5		m=10		m=15	
		itcs	time	itcs	time	itcs	time	itcs	time
0	0.12E+3	7	0.99	6	0.83	6	1.04	6	0.88
1	0.76E+0	**	**	9	1.32	9	1.37	9	1.38
2	0.95E-1	**	**	8	1.20	8	1.26	8	1.26
3	0.79E-2	**	**	**	**	**	**	**	**
4	0.34E-3	**	**	**	**	**	**	**	**
5	0.13E-4	**	**	**	**	**	**	**	**
6	0.21E-5	**	**	**	**	**	**	**	**
7	0.12E-5	**	**	**	**	**	**	**	**
8	0.88E-6	**	**	**	**	**	**	**	**
9	0.82E-6	**	**	**	**	**	**	**	**
10	0.75E-6	**	**	**	**	**	**	**	**

表 2.2 基于 ILU(0) 的预条件 ORTHOMIN(m)(m=20,25,30,35,40) 数值结果

m=20		m=25		m=30		m=35		m=40	
itcs	time	itcs	time	itcs	time	itcs	time	itcs	time
6	0.98	6	0.99	6	0.99	6	0.93	6	1.05
9	1.42	9	1.43	9	1.48	9	1.49	9	1.48
8	1.26	8	1.21	8	1.32	8	1.32	8	1.37
30	5.76	30	6.12	30	6.21	30	6.26	30	6.26
**	**	80	20.1	84	23.5	73	22.1	63	19.3
**	**	**	**	125	36.7	127	41.7	93	31.1
**	**	**	**	**	**	**	**	111	39.8
**	**	**	**	107	30.8	151	50.6	**	**
**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
**	**	**	**	**	**	**	**	98	36.7

表 2.3 基于 ILU(0) 的预条件 ORTHOMIN(m)(m=50,60,70,80) 数值结果

m=45		m=50		m=60		m=70		m=80	
itcs	time	itcs	time	itcs	time	itcs	time	itcs	time
6	0.99	6	0.99	6	0.99	6	1.04	6	0.99
9	1.48	9	1.43	9	1.43	9	1.43	9	1.43
8	1.37	8	1.32	8	1.27	8	1.32	8	1.27
30	6.21	30	6.15	30	6.20	30	6.15	30	6.20
67	21.7	60	19.1	60	19.5	60	19.8	60	19.5
95	34.3	132	54.1	67	23.2	67	23.6	67	23.2
100	36.1	101	39.4	82	32.2	71	25.9	71	26.3
119	45.4	109	43.8	90	36.3	73	27.5	73	27.6
**	**	**	**	88	35.5	77	30.1	77	30.3
**	**	99	38.1	82	32.2	76	29.4	76	29.9
**	**	**	**	78	29.5	76	29.1	76	29.6

注 1. 本节的数值实验是在 PENTIUM III 微机 (内存 =256M, CPU Speed=550MHZ) 的 Window 环境下运行的. 由于实际计算时只需要下降 4 个量级, 因而迭代的终止条件取为 (当前残量的  $L_2$  范数)/(初始残量的  $L_2$  范数) $< 10^{-4}$ . 另外对实际问题中的 11 个线性代数方程组 (分别称之为方程组 0、方程组 1、...、方程组 10), 列出了相应的数值计算结果.

注 2. 表中 “\*\*” 表示在当前的回头数  $m$  下, 相应算法迭代到我们所设置的最大迭代次数 (=1000 次) 时, 仍然没达到所需的误差精度要求 (即要求当前残量比初始残量下降 4 个量级).

注 3. “itcs” 表示达到控制精度所需的迭代次数, “time” 表示迭代所需的 CPU 时间 (单位为秒).

从表 2.1—表 2.5 可见, 利用以 ILU(0) 为预条件子的 ORTHOMIN(m) 和 GMRES(m) 迭代法求解 8 千阶网格点规模的方程组时, 其收敛性和收敛速度依赖于回头数  $m$  的选取, 并且对不同的系数矩阵, 运算效率差异很大. 对矩阵性态良好的情形, 其运算效率十分理想, 反之则运算效率低. 对 ORTHOMIN(m) 迭代法, 当回头数  $m > 70$  时, 算法已基本稳定, 这时运算时间接近最优; 而对 GMRES(m) 迭代法, 当回头数  $m$  增大时, 尽管迭代次数将减少, 但运算时间并不单调减少.

多重网格法是求解偏微分方程离散化方程组的最为有效的方法之一, 下面我们希望构造以 AMG 法为预条件子的 Krylov 子空间迭代法, 以克服上述基于 ILU(0) 预条件子的 Krylov 子空间迭代法在求解二维三温能量方程的离散化方程组中的缺陷.

由于实际的二维三温能量方程组具有许多特性, 如系数的多尺度性, 局部网格比大等等, 要设计一个高效 AMG 算法就必须将这些因素考虑进去. 我们采用的基本思想是: 利用网格的半粗化技术和点块 Gauss-Seidel 迭代消去系数的多尺度性和网格比大带来的影响. 基于此思想, 我们将设计求解线性代数方程组 (1.2) 的 AMG 方法和以它为右预条件子的 GMRES(m) 和 ORTHOMIN(m) 迭代法, 下面给出该 AMG 算法.

表 2.4 基于 ILU(0) 的预条件 GMRES(m)(m=1,5,10,15) 数值结果

方程组	m=1		m=5		m=10		m=15	
	itcs	time	itcs	time	itcs	time	itcs	time
0	19	2.59	3	1.70	2	2.25	1	1.98
1	**	**	**	**	56	46.6	24	35.1
2	**	**	166	62.7	**	**	32	46.2
3	**	**	**	**	180	151.5	33	48.1
4	**	**	**	**	195	167.8	68	104.3
5	**	**	**	**	**	**	97	139.4
6	**	**	**	**	**	**	108	168.8
7	**	**	**	**	**	**	116	168.8
8	**	**	**	**	**	**	104	149.1
9	**	**	**	**	**	**	103	148.1
10	**	**	**	**	**	**	124	177.6

表 2.5 基于 ILU(0) 的预条件 GMRES(m)(m=20,25,30,40) 数值结果

m=20		m=25		m=30		m=35		m=40	
itcs	time	itcs	time	itcs	time	itcs	time	itcs	time
1	2.74	1	3.68	1	4.67	1	5.93	1	7.20
3	6.92	2	6.76	2	8.73	2	11.1	1	7.25
13	28.4	7	22.1	5	21.0	4	21.7	2	13.8
25	54.1	14	43.7	9	37.3	6	32.4	4	27.0
62	132.8	20	62.1	13	53.7	11	58.7	11	73.3
85	184.0	33	108.8	17	74.8	15	80.1	14	93.2
79	171.3	42	145.8	24	98.6	17	90.2	12	85.5
78	167.2	42	145.8	23	94.7	22	117.1	15	103.8
45	96.7	34	108.1	25	102.7	20	106.3	17	112.5
65	139.6	35	114.3	29	119.5	22	117.3	16	106.4
54	117.3	41	130.1	26	106.7	23	121.2	13	88.8

网格粗化技术是 AMG 方法的关键技术之一, 为了给出网格粗化算法的描述, 首先引入若干记号和约定. 考虑  $J$  个网格层的情形,  $J$  为最细网格层的层数,  $n_J := n$  为最细网格层的节点数,  $3n_J$  阶矩阵  $A_J$  为线性代数方程组 (1.2) 的系数矩阵. 设  $n_k$  是第  $k$  个网格层的节点数, 相应的离散解空间为  $V_k$ ,  $A_k$  为该网格层下的粗化线性代数方程组的系数矩阵,  $k = J, \dots, 1$ . 下面利用矩阵  $A_J$  定义如下  $n_J$  阶矩阵  $\tilde{A}_J = (\tilde{a}_{ij})$ , 即

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } A_{ij} = 0, \\ 1, & \text{if } A_{ij} \neq 0. \end{cases}$$

上式中  $A_{ij} = 0$  中的 0 表示  $3 \times 3$  的零矩阵.

利用图论知识可知, 矩阵  $\tilde{A}_J$  对应一个图, 记为  $G_J = (V_J, E_J)$ , 这里  $V_J, E_J$  分别表示顶点集合和边集合, 我们称该图为最细层 (第  $J$  层) 网格剖分图. 下面给出求解方程组 (1.2) 的网格粗化算法, 为此需引入 MIS 集的概念.

**定义 2.1.** 称一个网格剖分图的节点集合的一个子集合为其最大不相交集 (即 MIS 集). 如果孩子集合满足:

- (1)无关性, 即该子集中任意两个顶点之间无边相连;  
 (2)在该子集中任意再添加一个顶点, 则不满足无关性.

### 算法 2.1 (网格粗化算法)

步 1. 生成各网格层的节点集合和相邻两网格层间的初始插值算子及系数矩阵.

步 1.1.  $k = J$

步 1.2. 利用以下两步, 生成从第  $k - 1$  层到第  $k$  层网格间的插值 (提升) 算子  $I_{k-1}^k$ .

1. 利用聚集法 (文 [3]), 求第  $k$  层网格剖分图  $G_k = (V_k, E_k)$  的 MIS 集, 将它作为粗网格层 (即  $k - 1$  层) 节点集合, 并记  $n_{k-1}$  为其节点数.

2. 在对第  $k$  层网格节点仅考虑由其相邻粗网格节点进行插值的前提下, 利用加权平均构造从第  $k - 1$  层网格到第  $k$  层网格间的插值算子  $I_{k-1}^k$ .

步 1.3. 利用算法 2.2 对  $n_k \times n_{k-1}$  阶插值算子  $I_{k-1}^k$  进行扩充, 得到  $(3n_k) \times (3n_{k-1})$  阶扩充插值算子  $\tilde{P}_{k-1}^k$ .

步 1.4. 利用文 [6] 中的算法对  $\tilde{P}_{k-1}^k$  进行磨光, 得到能量极小意义下的插值算子  $P_{k-1}^k$ .

步 1.5. 作代数运算  $A_{k-1} = (P_{k-1}^k)^T A_k P_{k-1}^k$ , 得到粗网格层下的系数矩阵.

步 1.6. 利用由  $A_J$  得到  $\tilde{A}_J$  同样的方法, 由  $3n_{k-1}$  阶矩阵  $A_{k-1}$  生成  $n_{k-1}$  阶矩阵  $\tilde{A}_{k-1}$ .

步 1.7. 由  $\tilde{A}_{k-1}$  得到第  $k - 1$  层网格剖分图  $G_{k-1} = (V_{k-1}, E_{k-1})$ , 令  $k := k - 1$ . 如果  $k \geq 2$ , 则转步 1.2, 否则, 进入步 2.

步 2. 对由步 1 得到的各相邻网格层的初始插值算子进行如下校正:

Do  $k = J, J - 1, \dots, 2$ .

对初始插值矩阵 (算子)  $P_{k-1}^k$  进行检测, 当  $P_{k-1}^k$  中存在非零元素过少 (如小于 2) 的行, 则需对它进行如下校正处理:

1. 在该行中增加适当的非零元素, 它可通过在步 1.2 的第 2 步中增加适当的邻近粗节点, 并经过加权平均、步 1.3 的扩充和步 1.4 的磨光后得到, 仍记该校正后的插值矩阵为  $P_{k-1}^k$ .

2. 修改系数矩阵  $A_j, j = k - 1(1)1$ .

Do  $j = k, k - 1, \dots, 2$ .

$$A_{j-1} = (P_{j-1}^j)^t A_j P_{j-1}^j,$$

End Do.

End Do.

### 算法 2.2 (插值算子扩充算法)

For  $i = 1, 2, \dots, n_k$

For  $j = 1, 2, \dots, n_{k-1}$

$$(P_{k-1}^k)_{3i-2, 3j-2} = (P_{k-1}^k)_{3i-1, 3j-1} = (P_{k-1}^k)_{3i, 3j} = (I_{k-1}^k)_{i, j}$$

$$(P_{k-1}^k)_{3i-2, 3j-1} = (P_{k-1}^k)_{3i-2, 3j} = (P_{k-1}^k)_{3i-1, 3j-2} = (P_{k-1}^k)_{3i-1, 3j}$$

$$= (P_{k-1}^k)_{3i, 3j-2} = (P_{k-1}^k)_{3i, 3j-1} = 0$$

End For.

End For.

基于上述算法 2.1, 我们可得到求解方程组 (1.2) 的如下代数多重网格 V-Cycle 算法:

**算法 2.3** (*V-Cycle* 算法) (假设最粗网格层为  $L$  层 ( $L \geq 1$ ))

For  $k=J, J-1, \dots, L+1$

$$T_k \leftarrow T_k + G_k(b_k - A_k T_k), j=1 \quad (1) \quad m_1$$

$$R_k \leftarrow b_k - A_k T_k$$

$$b_{k-1} \leftarrow (P_{k-1}^k)^t R_k$$

End For

$$T_L \leftarrow (A_L)^{-1} b_L$$

For  $k = L+1, L+2, \dots, J$

$$T_k \leftarrow T_k + P_{k-1}^k T_{k-1}$$

$$T_k \leftarrow T_k + G_k(b_k - A_k T_k), j=1 \quad (1) \quad m_2$$

End For

其中  $A_J$  为最细网格层的系数矩阵,  $P_{k-1}^k$  和  $A_{k-1}$  ( $k = J(-1)L$ ) 为由网格粗化算法 2.1 所产生的各网格层的插值矩阵和系数矩阵,  $G_k$  为磨光算子,  $m_1$  和  $m_2$  分别为前后光滑次数.

下面讨论磨光算子的选取. 在经典的 *V-Cycle* 算法 2.3 中, 常将磨光算子选为点 *Gauss-Seidel* 迭代法. 但对实际的二维三温能量方程组, 通过局部 *Fourier* 分析, 发现点 *Gauss-Seidel* 迭代法和以沿环线方向的线块 *Gauss-Seidel* 迭代的磨光效果要比沿径线方向的线块 *Gauss-Seidel* 迭代的磨光效果差得多. 因此, 在程序设计中, 我们采用了沿径线方向的线块 *Gauss-Seidel* 迭代作为磨光算子的所谓半粗化 AMG 算法, 并简称它为 SAMG 方法. 进一步, 以 SAMG 法为预条件子, 我们建立了相应的 *Krylov* 子空间迭代法即 GMRES(m) 和 ORTHOMIN(m) 迭代法.

### §3. 数值实验与进一步讨论

将上述基于 SAMG 预条件子的 GMRES(m) 和 ORTHOMIN(m) 迭代法用于二维三温能量方程组的数值求解.

首先, 对 11 个 8 千阶网格点规模的实际二维三温能量方程组, 在 PENTIUM III 微机 (内存 = 256M, CPU Speed = 550MHZ) 的 Window 环境下, 利用以 SAMG 法为预条件子的 GMRES(m) 迭代法进行求解, 将达到稳定状态 (最佳时间) 的以 ILU(0) 为预条件子的 ORTHOMIN(80) 的运算时间与以 SAMG 为预条件的 ORTHOMIN(11) 的运算时间做了比较, 并给出了相应的加速比, 数值结果如表 3.1 所示.

同时, 我们还在 SGI 工作站 (内存 512MB, CPU Speed = 400MHZ) 上对这 11 个 8 千阶规模的方程组, 利用基于 SAMG 预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法进行求解, 并与上节的基于 ILU(0) 预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法 (称为原解法器) 的性能做了对比, 得到如表 3.2 所示的数值实验结果.

为了进一步说明 SAMG 方法的高效性和健壮性, 我们从下述两个方面进行了数值实验. 一方面, 对  $160 \times 53$  网格规模, 将多重网格解法器 (MultiGrid) 应用于将能量方程与流体力学方程耦合后得到的应用程序中, 进行长时间的测试实验. 在所有计算最艰难的物理时刻, 替换掉原程序中采用的线性代数解法器 (ILU), 比较全过程数值模拟时间和计算精度, 计算结果如图 1, 图 2 及表 3.3 所示.

表 3.1 两种迭代法的最佳 CPU 时间比较

方程组	$T_{ILU}$	$T_{SAMG}$	加速比
0	0.99	2.19	0.45
1	1.43	3.19	0.45
2	1.27	3.18	0.39
3	6.20	4.17	1.48
4	19.5	6.15	3.17
5	23.2	7.69	3.01
6	26.3	8.24	3.19
7	27.6	8.24	3.35
8	30.3	8.30	3.65
9	29.9	8.73	3.42
10	29.6	8.19	3.61
总和	197.09	68.27	2.89

表 3.2 SGI 处理机上 11 个 8 千阶非对称稀疏线性代数方程组性能测试结果

方程组	收敛迭代次数比较		CPU 时间 (秒) 比较		速度倍数
	原解法器	多重网格	原解法器	多重网格	
1	6	2	0.15	0.50	0.30
2	9	4	0.19	0.70	0.27
3	8	4	0.16	0.70	0.23
4	30	6	1.11	0.94	1.17
5	60	10	4.25	1.47	2.90
6	67	15	5.26	2.14	2.46
7	71	15	5.88	2.14	2.75
8	73	16	6.20	2.28	2.72
9	77	16	6.84	2.28	3.00
10	76	16	6.68	2.28	2.93
11	76	16	6.69	2.28	2.94
总和	—	—	43.41	17.71	2.45

表 3.3 SGI 处理机上多重网格解法器性能测试结果 (时间单位为分钟)

原解法器			多重网格解法器				
总计算时刻	总计算排数	CPU 时间	总计算时刻	总计算排数	多重网格应用总排数及比例	CPU 时间	提高比例
9.0000~16.4226	76317	4119.0	9.0000-16.4086	76178	6493 (8.52%)	3576	13.18%



表 3.4 SGI 处理机上 11 个 6 万阶非对称稀疏线性代数方程组性能测试结果

方程组	收敛迭代次数比较		CPU 时间 (秒) 比较		速度倍数
	原解法器	多重网格	原解法器	多重网格	
1	6	2	2.32	2.24	1.04
2	9	4	2.92	4.34	0.67
3	9	4	2.87	4.32	0.65
4	28	7	13.24	7.63	1.74
5	122	6	181.41	18.76	9.67
6	272	35	693.45	44.77	15.49
7	> 300	35	> 790	44.24	> 17.86
8	> 300	44	> 790	57.08	> 13.84
9	> 300	39	> 790	50.37	> 15.68
10	> 300	34	> 790	43.29	> 18.25
11	> 300	34	> 790	42.97	> 18.38
总和	—	—	> 4846.21	319.95	> 15.15

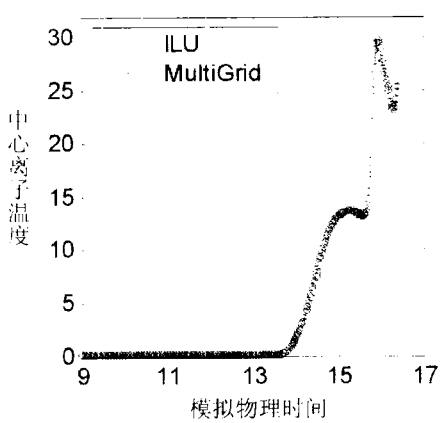


图 1 中心离子温度曲线比较

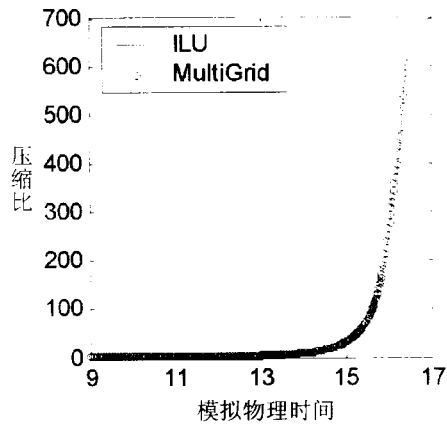


图 2 压缩比曲线比较

另一方面,对 6 万阶网格点规模 ( $1280 \times 53$ ) 的实际二维三温能量方程组,我们在 SGI 处理机上对 11 个 6 万阶非对称稀疏线性代数方程组,利用基于 SAMG 预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法进行求解,并与原解法器性能做对比,得到如表 3.4 所示的数值实验结果.表中“> 300”表示经过 300 步迭代后,算法仍然没有收敛,“> 790”表示所需要的 CPU 计算时间不小于 790 秒.如果取更小的回头数 ( $< 150$ ),则原解法器收敛更缓慢.

上述各表中:(1)对 8 千阶和下面的 6 万阶运算规模,多重网格解法器是回头数分别为 10 和 20 的代数多重网格为预条件的 ORTHOMIN(m) 迭代法;(2)对 8 千阶和下面的 6 万阶运算规模,原解法器是回头数分别为 70 和 150 的以 ILU(0) 为预条件的 ORTHOMIN(m) 迭代法;(3)迭代收敛条件为:稀疏线性代数方程组残差下降 4 个数量级.

综合以上数值实验结果,我们可以得到如下结论:

∴ 对 8 千阶网格点规模,预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法的运算时间要优于预

条件 GMRES(m) 的运算时间 (尽管对大多数 m 来说, 后者的迭代次数要比前者少). 对于性态好的矩阵 (方程 0 - 方程 2), 以 ILU(0) 为预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法具有优势, 其运算时间比以 SAMG 为预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法要少 (尽管后者迭代次数较前者少). 而对于性态差的矩阵 (方程 3 - 方程 10), 以 SAMG 为预条件子的 ORTHOMIN(m) 具有明显的优势, 无论是运算时间还是迭代次数均优于以 ILU(0) 为预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法.

二. 对 6 万阶网格点规模, 对于性态差的矩阵, 如方程组 3 - 方程组 10, 以 SAMG 为预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法较原解法器具有明显的优势 (是原解法器性能的 15 倍以上). 无论是运算时间还是迭代次数均优于以 ILU(0) 为预条件子的 ORTHOMIN(m) 迭代法. 特别值得注意的是我们的新解法器还具有很强的健壮性和稳定性, 这点对原解法器有时不能保证.

三. 由图 1、图 2 可知, 多重网格解法器已经成功应用于将能量方程与流体力学方程耦合后得到的应用程序 (160×53 网格规模) 中, 计算结果与原解法器的计算结果完全一致, 因此多重网格解法器正确. 在 6493 个计算艰难时刻 (占整体计算时刻的 8.53%), 用多重网格解法器替原解法器, 该应用程序 (160×53 网格规模) 的整体数值模拟速度提高 13.18%.

表 3.5

方程组	itcs	time
0	98	37.1(s)
1	151	62.5(s)
2	155	64.5(s)
3	209	90.5(s)
4	**	**
5	260	114.8(s)
6	248	109.2(s)
7	**	**
8	**	**
9	250	110.0(s)
10	**	**

表 3.6

方程组	itcs	time
0	18	10.8(s)
1	28	16.2(s)
2	30	17.4(s)
3	32	18.4(s)
4	38	21.8(s)
5	44	25.2(s)
6	44	24.9(s)
7	45	25.5(s)
8	42	23.8(s)
9	47	26.5(s)
10	46	25.9(s)

表 3.7

方程组	itcs	time
0	83	119.9(s)
1	174	265.2(s)
2	198	300.0(s)
3	152	219.6(s)
4	229	339.2(s)
5	258	374.5(s)
6	321	498.4(s)
7	305	440.9(s)
8	234	338.2(s)
9	266	383.9(s)
10	285	437.4(s)

表 3.8

方程组	itcs	time
0	2	16.9(s)
1	3	24.7(s)
2	3	24.8(s)
3	3	24.7(s)
4	3	24.7(s)
5	4	33.1(s)
6	4	32.8(s)
7	4	32.8(s)
8	4	32.5(s)
9	4	32.5(s)
10	4	32.5(s)

为了进一步说明新算法的优势,我们对 8 千阶网格点规模的方程组,作了提高控制精度的数值实验,迭代终止的条件取为(当前残量的范数)/(初始残量的范数) $< 10^{-12}$ ,计算结果见表 3.5-表 3.8,其中,表 3.5 和表 3.6 分别为以 ILU(0) 为预条件子的 ORTHOMIN(50) 和以 SAMG 为预条件子的 ORTHOMIN(10) 迭代法的运算次数和时间,表 3.7 和表 3.8 分别为以 ILU(0) 为预条件子和以 SAMG 为预条件子的 GMRES(15) 迭代法的运算次数和时间.

从表中可见,这时,对上述所有方程组,我们的新算法在计算效率和算法稳定性等方面均全面占优,这充分表明了多重网格法非常适合于实际的大规模二维三温能量方程组的数值求解.

致谢 在我们的数值实验过程中,得到了沈隆钧研究员、符尚武研究员等同志的大力支持和协助,并给我们提出了许多有益的建议.对此,我们表示衷心的感谢!

### 参 考 文 献

- [1] 符尚武等, 二维三温能量方程的九点差分近似及其迭代解法, 计算物理, 15:4(1998).
- [2] Y.Sadd. Iterative methods for Sparse Linear Systems,PWS Publishing Company, 1995.
- [3] T.F.Chan, J.Xu,and L.Zikatanov, An agglomeration multigrid method for unstructured grids. Proceedings of 10-th International conference on Domain Decomposition methods, edit by J.Mandel, C.Farhat, and X.J.Cao. AMS, Providence, RI.
- [4] J.W.Ruge and K.Stuben Algebraic mutigrid, Multigrid methods, SIAM, 1987.
- [5] Bank,J.Xu, An algorithm for coarsing unstructured meshes, Numer. Math.,73:1(1996), 1-36.
- [6] J.Mandel, Denver, CO, M.Brezina, Boulder, CO,and P.Vanek, Los Angeles, CA, Energy optimization of algebraic multigrid bases, Computing 62, (1999) 205-228.
- [7] 莫则尧, 符尚武, 求解二维三温能量方程的 Krylov 子空间迭代法, 计算物理实验室年报, 2000 年卷.
- [8] 舒适, 肖映雄等, 求解二维三温能量方程的一种多重网格法, 计算物理实验室年报, 2000 年卷.
- [9] Shu shi, Xu jinchao, Xiao yingxiong and L.Zikatanov, *Algebraic Multigrid Method on Lattice Block Materials*, Recent Progress in Computational and Applied PDEs, Edited by Tony.F.Chan. et.al.. Boston/London, (2002) 287-307.
- [10] P.Vanek, J.Mandel, and M.Brezina, Algebraic multigrid on unstructured meshes,UCD/CCM Report 34. Center for Computational Mathematics, University of Colorado at Denver. December 1994.