求解混合 0-1 线性规划问题的一个分支定界算法*

倪明放　汪泽焱

（南京通信工程学院数学教研室，南京 210016）

A BRANCH AND BOUND ALGORITHM FOR SOLVING MIXED 0-1 LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

Ni Ming-fang　Wang Ze-yan

(Nanjing Institute of Communication Engineering, Nanjing 210016)

Abstract

In this paper, a branch and bound algorithm for solving mixed 0-1 linear programming problem is presented and the effectiveness of the algorithm is illustrated by computation examples.

§1. 引　言

考虑如下的 0-1 混合线性规划问题 (P):

$$(P)\qquad \min cx + dy,$$

$$\text{s.t. } Ax + By \geq b,$$

$$x \geq 0,\quad y \text{ 是 0-1 整数向量},$$

其中 c, d, b 都是已知的具有相应维数的行向量或列向量， A, B 是已知的具有相应行数和列数的矩阵， x 是连续变量， $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ 是 0-1 变量. 为讨论方便，不妨设问题 (P) 没有无界的最优值.

关于问题 (P) 的求解，已经有很多方法，例如割平面方法、分解方法、分支定界方法、隐枚举法 [1-3]. 由于整数线性规划属于 NP 问题，对中等规模和大规模的混合整规划问题尚无成熟可靠的有效方法. 本文利用对偶线性规划，构造定界函数，提出求解问题 (P) 的一个分支定界算法，给出的数值例子表明算法是有效的.

* 1997 年 11 月 28 日收到.

§2. 分支定界算法

先引入一些记号. 用 $f(\cdot)$ 表示问题 $(\cdot)$ 的最优值, 记 $D=\{(x,y)|Ax+By\geq b, x\geq 0, y$ 是 0-1 整数向量 $\}$.

定义 1. 如果 $(x,y)\in D$, 称 (x,y) 为问题 (P) 的可行解.

定义 2. 如果 $(x^*,y^*)\in D$, 且对 D 中任意的 (x,y), 有

$$cx^*+dy^*\leq cx+dy,$$

则称 (x^*,y^*) 为问题 (P) 的最优解.

命题 1. 考虑如下的两个线性规划问题:

$$(LP_1)\qquad \begin{aligned} &\min c_1x,\\ &\text{s.t. } A_1x\geq b_1,\\ &x\geq 0\end{aligned}$$

和

$$(LP_2)\qquad \begin{aligned} &\min c_1x,\\ &\text{s.t. } A_1x\geq b_1+b_2,\\ &x\geq 0,\end{aligned}$$

其中 c_1, b_1 和 b_2 都是已知的具有相应维数的行向量或列向量, A_1 是已知的具有相应行数和列数的矩阵, x 是决策变量. 设问题 (LP_i) 的最优值为 z_i^*, 最优对偶可行解为 u_i^*, $i=1,2$, 那么有

$$z_2^*\geq z_1^*+u_1^*b_2.$$

证明. u_2^* 是问题 (LP_2) 的最优对偶可行解, 而 u_1^* 可以看作是问题 (LP_2) 的对偶可行解. 由线性规划的对偶理论, 有

$$z_2^*=u_2^*(b_1+b_2)\geq u_1^*(b_1+b_2)=z_1^*+u_1^*b_2.$$

记 k 表示求解问题 (P) 的分支定界树生成的第 k 个结点, 记

$$J_k^0=\{j|y_j \text{ 是未取定值的 0-1 变量}, j=1,2,\cdots,n\},$$

$$J_k^+=\{j|y_j=1, j=1,2,\cdots,n\},$$

$$J_k^-=\{j|y_j=0,\ j=1,2,\cdots,n\}.$$

设 $(x^0,y^0)\in D$, 考虑线性规划问题 $(LP(y^0))$:

$$(LP(y^0))\qquad \min\ cx,\quad \text{s.t. } Ax\geq b-By^0,\quad x\geq 0,$$

它的对偶线性规划问题为 $(DLP(y^0))$:

$$(DLP(y^0))\qquad \max\ u(b-By^0),\quad \text{s.t. } uA\leq c,\quad u\geq 0,$$

其中 u 是具有相应维数的对偶乘子.

命题 2. 设 z^* 和 u^* 分别是对偶线性规划 $(DLP(y^0))$ 的最优值和最优解，在分支定界树的任一结点 k 处，考虑优化问题 $(p(k))$:

$$(p(k))\qquad \min\ cx+\sum_{j\in J_k^0}d_jy_j+\sum_{j\in J_k^+}d_jy_j,$$

$$\text{s.t. } Ax\geq b-By^0-\sum_{j\in J_k^0}y_jb^j-\sum_{j\in J_k^+}b^j+By^0,$$

$$x\geq 0,\ y_j\in\{0,1\},j\in J_k^0.$$

这里，b^j 表示矩阵 B 的第 j 列向量，则有

$$f(p(k))\geq z^*+u^*By^0+\sum_{j\in J_k^+}(d_j-u^*b^j)+\sum_{j\in J_k^0}\min\{d_j-u^*b^j,0\}.$$

证明. 由命题 1 可知

$$\begin{aligned}f(p(k))\geq& z^*+u^*By^0+\sum_{j\in J_k^0}d_jy_j+\sum_{j\in J_k^+}d_jy_j+u^*\Big(-\sum_{j\in J_k^0}y_jb^j-\sum_{j\in J_k^+}b^j\Big)\\ =&z^*+u^*By^0+\sum_{j\in J_k^+}(d_j-u^*b^j)+\sum_{j\in J_k^0}(d_j-u^*b^j)y_j\\ \geq& z^*+u^*By^0+\sum_{j\in J_k^+}(d_j-u^*b^j)+\sum_{j\in J_k^0}\min\{d_j-u^*b^j,0\}.\end{aligned}$$

注. 对分支定界树的任一结点 k 处的优化问题 $(p(k))$, 命题 2 给出了一个估计最优值 $f(p(k))$ 下界 LB 的公式

$$LB = z^* + u^*By^0 + \sum_{j\in J_k^+}(d_j - u^*b^j) + \sum_{j\in J_k^0}\min\{d_j - u^*b^j, 0\}.$$

据此公式, 下面提出了求解问题 (P) 的分支定界算法. 该算法需要求出一个初始可行解 (x,y) 和初始上界 $UB = cx + dy$. 关于求混合整数线性规划的初始可行解的方法可参考文献 [4].

求解问题 (P) 的分支定界算法:

第 1 步. 置 $N = 0$, $k = 0$, $J_k^0 = \{1,2,\cdots,n\}$, $J_k^+ = J_k^- = \emptyset$(空集), $(x,y) = (x^*,y^*)$, $UB = cx^* + dy^*$, 其中 (x^*,y^*) 是执行算法前已经求出的问题 (P) 的一个初始可行解. 求解对偶线性规划问题 $(DLP(y^*))$

$$(DLP(y^*)) \qquad \begin{aligned} &\min\ u(b - By^*),\\ &\text{s.t. } uA \le c,\\ &u \ge 0. \end{aligned}$$

设最优值和最优解分别为 z^* 和 u^*, 置 $L(j) = d_j - u^*b^j$, $j = 1,2,\cdots,n$.

第 2 步. 置 $N = N+1$, $k = k+1$, $J_k^0 = J_{k-1}^0\backslash\{N\}$, $J_k^- = J_{k-1}^- \cup \{N\}$.

第 3 步. 计算 $LB = z^* + u^*By^0 + \sum_{j\in J_k^+} L(j) + \sum_{j\in J_k^0}\min\{L(j), 0\}$.

第 4 步. 如果 $LB \ge UB$, 转第 6 步.

第 5 步. 如果 $N = n-1$, $N = N+1$, $k = k+1$, $J_k^0 = J_{k-1}^0\backslash\{N\}$, $J_k^- = J_{k-1}^- \cup \{N\}$ 由 J_k^- 和 J_k^+ 唯一确定 y'(此时 $J_k^0 = \emptyset$), 转第 8 步; 否则返回第 2 步.

第 6 步. 如果 $N \in J_k^-$, 置 $k = k+1$, $J_k^+ = J_{k-1}^+ \cup \{N\}$, $J_k^- = J_{k-1}^-\backslash\{N\}$, 返回第 3 步.

第 7 步. 置 $J_k^+ = J_k^+\backslash\{N\}$, $J_k^0 = J_k^0 \cup \{N\}$, $N = N-1$, 如果 $N = 0$(此时分支定界树无活的结点), 转第 11 步; 否则返回第 6 步.

第 8 步. 求解线性规划问题 $(LP(y'))$:

$$(LP(y')) \qquad \begin{aligned} &\min\ cx,\\ &\text{s.t. } Ax \le b - By',\\ &x \ge 0. \end{aligned}$$

如果 $(LP(y'))$ 不可行, 转第 10 步; 否则, 设其最优解为 x', 置 $z' = cx' + dy'$.

第 9 步. 如果 $z' < UB$, 令 $(x,y) = (x',y')$, $UB = z'$, 转第 10 步.

第 10 步．如果 $N \in J_k^-$，置 $k = k+1$，$J_k^+ = J_{k-1}^+ \cup \{N\}$，$J_k^- = J_{K-1}^- \backslash \{N\}$．返回第 8 步；否则返回第 7 步．

第 11 步．停止计算，(x,y) 是问题 (P) 的最优解，$cx+dy$ 是最优值．

算法的第 1 步是初始步，第 2 步是分支，第 3 步是在分支的结点处定出下界，第 4 步和第 5 步是探测、剪支或产生新的结点，第 6 步和第 9 步是改进上界（当前已知的最好的目标函数值）．如果分支定界树没有活结点，算法在第 11 步终止．

§3. 数值例子

例 1.

$$\min\ 2x_1+3x_2+y_1+4y_2,$$

$$\text{s.t.}\ -x_1+2x_2-y_1+3y_2 \geq 2,$$

$$x_1+3x_2+y_1+y_2 \geq 3,$$

$$x_1,x_2 \geq 0, y_1,y_2 \in \{0,1\}.$$

这个问题的最优解是 $(x^*,y^*) = (0,1.5,0,0)^T$，最优值是 3．取 $y^* = (0,0)^T$．求解线性规划 $LP(y^*)$，得到最优解 $x^* = (0,1.5)$，从而初始可行解 $(x,y) = (0,1.5,0,0)^T$．初始上界 $UB = 3$，执行算法过程如下：

第 1 步．$N = 0, k = 0, J_0^0 = \{1,2\}$，$J_0^+ = J_0^- = \varnothing$，$(x,y) = (0,1.5,0,0)^T$，$UB = 3$，$z^* = 3$，$u^* = (0,1)$，$L(1) = 0$，$L(2) = 1$．

第 2 步．$N = 1, k = 1, J_1^0 = \{2\}$，$J_1^- = \{1\}$．

第 3 步．$LB = 3 \geq UB$，转第 6 步．

第 6 步．$k = 2$，$J_2^+ = \{1\}$，$J_2^- = \varnothing$，返回第 3 步．

第 3 步．$LB = 3 \geq UB$，转第 6 步．

第 6 步．$1 \notin J_2^-$，转第 7 步．

第 7 步．$J_2^+ = \varnothing$，$J_2^0 = \{1,2\}$，停止计算，初始可行解就是最优解．

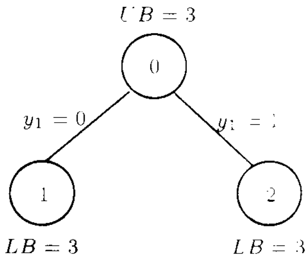

图 1　例 1 的分支定界树

在例 1 的全枚举树的结点总数是 $2^{2+1}-1 = 7$，需要枚举计算的结点数是 $2^2 = 4$．但分支定界树生成的结点数是 3 个，对应的分支定界树见图 1．计算初始可行解枚举了一个节点．虽然初始可行解恰好为最优解，但在结点处定出的下界只要严格小于当前上界，就需要继续分支或进行结点的枚举计算，由于在结点①和②处定出的下界等于初始上界，其余的分支和 3 个结点的枚举计算都不需要，效果是不错的．

例 2.

$$\begin{aligned}
&\min\ 3x_1+2x_2+8y_1+16y_2+2y_3+4y_4,\\
&\text{s.t. } 2x_1-x_2+2y_1+5y_2-y_3-4y_4\ge 8,\\
&\qquad x_1+x_2-3y_1-4y_2+2y_3+5y_4\ge 7,\\
&\qquad x_1,x_2\ge 0, y_i\in\{0,1\}, i=1,2,3,4.
\end{aligned}$$

这个问题的最优解是 $(x^*,y^*)=(4.67,0.33,0,0,1,0)^T$, 最优值是 16.67. 计算初始上界是特别选取 16 个枚举计算的结点计算出的最大的上界, 即取 $y^*=(1,1,0,0)^T$. 求解线性规划 $LP(y^*)$, 得到最优解 $x^*=(5,9)^T$, 从而初始可行解 $(x,y)=(5,9,1,1,0,0)^T$ 初始上界 $UB=57$, 下面略去执行算法过程的说明. 例 2 的全枚举树的结点总数是 $2^{4+1}-1=31$, 需要枚举计算的结点数是 $2^4=16$, 但算法生成的分支定界树的结点总数是 10. 包括计算初始上界时枚举计算的结点在内共枚举计算了 5 个结点. 对应的分支定界树见图 2. 定界函数的定界效果是非常好的.

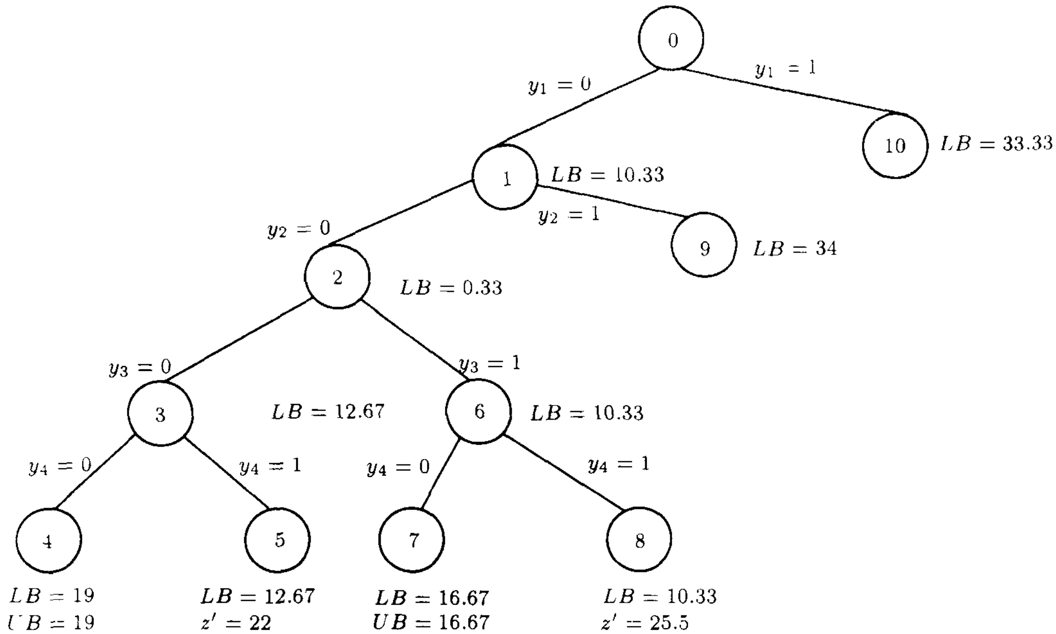

图 2 例 2 的分支定界树

参 考 文 献

[1] Garfinkel R S, Nemhauser G L., Integer Programming. Wiley, New York 1972.

[2] Nemhauser G L, Wolsey L A., Integer and Combinational Optimization, Wiley, New York, 1986.

[3] 马仲蕃, 线性整数规划的数学基础, 北京, 科学出版社, 1995.

[4] 倪明放, 徐南荣, 混合整数线性规划的初始可行解, 东南大学学报, **22**:6 (1992), 121-126.