

# 一种卫星编队整体机动的规划方法研究

丁洪波<sup>1</sup>, 田萨萨<sup>2</sup>, 蔡洪<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073; 2. 西安卫星测控中心, 西安 710043)

**摘 要:** 针对卫星编队整体机动的难点, 充分考虑编队的“群”运动特性, 按照先规划参考卫星轨迹, 后规划伴随卫星轨迹的思路, 提出一种整体机动的分步规划策略。采用 Gauss 伪谱法优化参考卫星的轨迹, 并检验优化结果的最优性; 根据整体机动过程中的路径约束, 以参考卫星的轨迹为参考, 规划伴随卫星的可行飞行区域; 根据终端约束条件, 在可行区域规划伴随卫星的飞行轨迹; 引入动态逆的思想, 根据伴随卫星飞行轨迹反推相应的控制量; 最后, 分析了伴随卫星轨迹在控制上的可行性, 并分析了整体机动轨迹最优性性能。仿真分析表明, 该方法计算量小, 能满足整体机动的任务要求。

**关键词:** 整体机动; 规划策略; Gauss 伪谱法; 可行飞行区域; 伴随卫星轨迹; 动态逆方法

**中图分类号:** V448      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1328(2009)05-1848-06

**DOI:** 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.05.017

## 0 引言

编队卫星之间需要进行紧密的星间通信、信息耦合和协同控制, 要求编队在机动过程中不能散开, 其运动具有整体性, 也称为“群”运动特性。相比单个卫星的机动问题, 卫星编队整体机动的规划涉及到多个卫星的运动规划, 同时还需要考虑星间相对状态的协调, 这些都大大增加了问题的复杂性<sup>[2]</sup>。

卫星编队的整体机动涉及卫星的轨迹规划、构形重构等问题。从目前的研究现状看, 关于单颗卫星轨迹规划的文献较多<sup>[3-5]</sup>, 主要方法可以分为间接法、混合法和直接法。间接法运用极大值原理将最优控制问题转化为两点边值问题, 然后采用打靶法求解<sup>[4]</sup>。混合法也可认为是间接法的一种, 它将两点边值问题转化为参数优化问题来求解<sup>[3]</sup>。而直接法将最优控制问题离散化, 转化为非线性规划问题来求解<sup>[5]</sup>。

关于构形重构也有较多的研究<sup>[2]</sup>, 大部分文献采用相对运动模型, 例如 Hill 方程等, 研究基于两种控制方式的构形重构方法, 一种基于冲量控制, 需要研究冲量作用对编队构形的影响, 简便有效的冲量控制方法则需进一步探索; 另一种是基于连续微推力(连续微推力或多冲量)控制实现, 其思路是首先

规划或计算出优化的相对运动转移轨迹, 然后用跟踪控制方法实现转移过程。

关于卫星编队整体机动的文献较少。文献[5]研究了多卫星轨迹优化问题, 文中只考虑了两个卫星, 同时对路径约束作了简单处理。文献[6]研究了多个卫星在有路径约束和姿态约束条件下的编队构形重构, 该文将优化过程分为两步, 首先使用快速随机搜索树(Rapidly-exploring Random Tree, RRT)方法得到一个可行轨迹, 然后以之为初值, 采用 Gauss 伪谱法经过优化得到最终的结果。这种方法具有较强的通用性, 但是实现起来比较复杂, 特别是当卫星数目比较大的情况下, 计算量会成几何级增长。

本文在充分考虑编队卫星“群”运动特性的基础上, 提出一种新的整体机动的规划策略, 将其用于一个具体的例子, 进行了仿真计算。

## 1 卫星编队整体机动的规划策略

卫星编队的整体机动要求编队由起始位置转移到目标位置, 机动后编队参考中心的位置发生变化, 编队构形也发生变化。因为参考中心的位置发生变化, 所以一般不能使用相对运动模型来描述。需要对每个卫星建立动力学方程, 并联立起来成为整体

机动的动力学模型。假设有  $N$  颗卫星,如果只考虑构形约束则动力学模型的自由度为  $3N$  个,如果还要考虑姿态约束,则自由度为  $6N$  个。这种方法的思路简单,模型准确,通用性强,对于卫星的相对状态没有要求,还能用于星座等其他的多体航天器。但模型复杂,涉及的变量多,约束条件也多,一般的方法难以解决<sup>[6]</sup>。

卫星编队涉及多个卫星运动的协调,给问题增加了复杂性,但编队飞行具有的这种“群”的飞行特性,可以为问题的求解提供一种思路。

作为整体机动的基本要求,编队卫星在机动过程中不能碰撞(相互之间的距离不小于某一个值  $d_{min}$ ),也不能分散(相互之间的距离不大于某一个值  $d_{max}$ )。考虑编队参考中心上的卫星(如果没有,则假设有一个“虚拟卫星”),在机动过程中,编队卫星中的伴随卫星与参考卫星之间距离  $d$  应满足条件:

$$d_{min} < d < d_{max}$$

如果确定了参考卫星的机动轨迹,则伴随卫星在机动过程中只能在以参考轨迹为中心的环形区域内飞行,称该区域为伴随卫星的可行飞行区域,参见图 1 中的阴影部分:

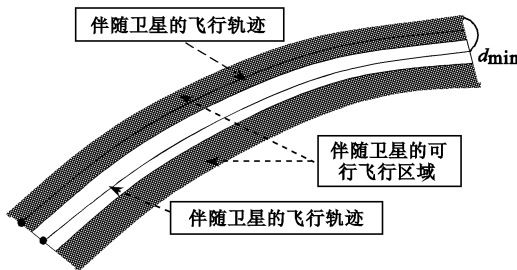


图 1 卫星编队整体机动示意图

Fig. 1 Schematic of satellite formation maneuvering

在可行区域内选择一条连接伴随卫星的起点和终点的路径,则该路径满足路径约束条件,也可以满足端点上的位置约束条件。通过设计卫星在该路径上位置随时间的变化率,可以满足端点的速度约束。飞行路径以及位置在路径上随时间的变化率确定后,就确定了伴随卫星的轨迹。

如果有多个伴随卫星,为了最大限度地避免碰撞,应尽量使卫星在飞行过程中绕参考卫星的相位均匀分布,或保持一定值。具体的选择方法与端点状态以及编队构形有关。

在伴随卫星的轨迹产生后,需要考虑轨迹的实

现问题。卫星的状态可以表达为时间的函数,需要根据这些函数反过来求解所需的控制量。可以借鉴逆系统方法的思想来求解,逆系统理论是动态逆控制方法的基础理论<sup>[7-8]</sup>,其主要思想是根据系统的输出来反推系统的输入。

假设有系统

$$y = \theta u \tag{1}$$

其中,  $y$  为系统输入,  $\theta$  为系统算子,它可以是线性的也可以是非线性的。如果系统是非线性的情况,文献[7]论述了控制量的求法。如果系统为线性系统且输入输出量的个数相等的情况,则

$$u = \theta^{-1}y \tag{2}$$

通过这种方法可以得到的控制量可能会超出卫星的控制能力范围,需要根据计算的结果进行检验。

在设计伴随卫星的路径时,使该路径与参考卫星“类似”,如相对位置或者相位保持不变等,在卫星性能参数相同的情况下,只要参考卫星的轨迹可行,伴随卫星的轨迹在控制上也是可行的。

在求得控制量后,就得到了满足各种约束条件的飞行轨迹。此时,还必须对结果的最优性进行分析。

因为参考轨迹是经过优化后的最优轨迹,在伴随卫星和参考卫星之间的轨迹尽量“类似”的前提下,伴随卫星与参考卫星之间的差别不会很大,所以其最优性性能不会很差。当然,具体应用过程中,以计算的结果为准。如果实现该轨迹所需要的能量过大,应予舍弃,重新进行伴随卫星的轨迹规划。

综上所述,可以给出卫星编队整体机动的规划策略,见图 2:

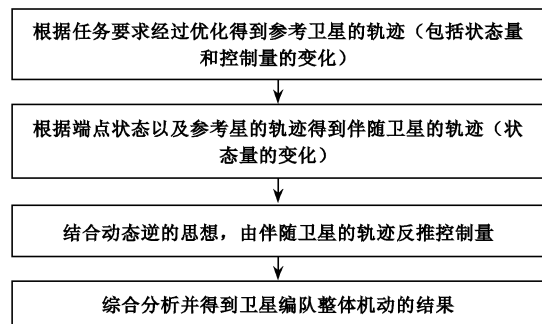


图 2 卫星编队整体机动的规划策略

Fig. 2 Planning strategy of satellite formation maneuvering

下面按照上述规划策略,研究具体的编队飞行

任务下的整体机动规划方法。

假设有如下任务:有一个共面串行编队,参考卫星的轨道根数为

$$\begin{cases} a_0 = 6878137\text{m}, e_0 = 0, i_0 = 0 \\ \Omega_0 = 30^\circ, \omega_0 = 45^\circ, f_0 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

该参考卫星有两个伴随卫星,其真近点角与参考卫星的真近点相差  $\pm 0.0898^\circ$ , 其它的轨道根数均相同。

$$f_{10} = f_0 + 0.0898^\circ, f_{20} = f_0 - 0.0898^\circ \quad (4)$$

要求经过机动后,参考卫星的轨迹为

$$\begin{cases} a_f = 7378137\text{m}, e_f = 0, i_f = 10^\circ \\ \Omega_f = 30^\circ, \omega_f = 45^\circ, f_f = 180^\circ \end{cases} \quad (5)$$

伴随卫星的真近点角与参考卫星的真近点仍相差  $\pm 0.0900^\circ$ , 其它的轨道根数均相同。

$$f_{1f} = f_f + 0.0900^\circ, f_{2f} = f_f - 0.0900^\circ \quad (6)$$

优化性能指标为编队机动所需的时间最短。

在整体机动过程中,要求每两颗卫星之间的距离大于 5km,且伴随卫星与参考卫星之间的距离小于 15km。

参考卫星初始质量 500kg,燃料质量为 300kg,

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{2p}{\omega} \sqrt{\frac{p}{\mu}} a_t \\ \dot{P}_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -a_r \cos L + [(\omega + 1) \sin L + P_1] \frac{a_t}{\omega} + [Q_2 \sin L - Q_1 \cos L] \frac{P_2 a_n}{\omega} \right\} \\ \dot{P}_2 = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ a_r \sin L + [(\omega + 1) \cos L + P_2] \frac{a_t}{\omega} + [Q_2 \sin L - Q_1 \cos L] \frac{P_1 a_n}{\omega} \right\} \\ \dot{Q}_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left( \frac{s^2}{2\omega} \right) a_n \sin L \\ \dot{Q}_2 = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left( \frac{s^2}{2\omega} \right) a_n \cos L \\ \dot{L} = \sqrt{\mu p} \left( \frac{\omega}{p} \right)^2 + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{Q_2 \sin L - Q_1 \cos L}{\omega} a_n \end{cases} \quad (7)$$

$$\omega = 1 + P_1 \sin L + P_2 \cos L, s^2 = 1 + Q_1^2 + Q_2^2 \quad (8)$$

$$a_t = \frac{T_t}{m}, a_r = \frac{T_r}{m}, a_n = \frac{T_n}{m} \quad (9)$$

$$m = m_0 - \frac{T}{g_0 I_{sp}} t \quad (10)$$

其中,  $p, P_1, P_2, Q_1, Q_2, L$  为改进的春分点轨道根数,具体含义见文献[3],  $T_t, T_r, T_n$  是沿春分点坐标三个方向上的推力分量大小,  $m_0$  是初始质量,  $T$  是推力大小<sup>[5]</sup>。

最大推力为 1000N,比冲为 2857s。认为伴随卫星性能参数与参考卫星相同。

## 2 参考卫星轨迹优化

首先规划参考卫星的轨迹。这是一个典型的性能指标为时间最短的异面轨道规划问题。本文在文献[5,9]的基础上,采用 Gauss 伪谱法进行求解。

Gauss 伪谱法 (Gauss Pseudospectral Method, GPM) 是一种直接数值解法<sup>[9-10]</sup>,它将状态变量和控制变量在一系列 Gauss 点上离散,并以离散点为节点构造 Lagrange 插值多项式来逼近状态变量和控制变量。通过对全局插值多项式求导来近似状态变量对时间的导数,从而将微分方程约束转换为一组代数约束。对于性能指标中的积分项由 Gauss 积分计算。终端状态由初始状态加右函数在整个过程的积分获得。经上述变换,可将最优控制问题转化为具有一系列代数约束的参数优化问题。

采用改进的春分点轨道根数作为状态量,建立参考的卫星动力学方程如下<sup>[1,3]</sup>:

初始点参数见式(3),终端点见式(4)。目标函数为时间最短。就目前编队飞行的研究而言,参考卫星飞行轨道必须是圆轨道或椭圆轨道,所以需要参考卫星的偏心率增加约束,使其在0到

1 之间。

采用 80 个节点,得到的优化结果见图 3:

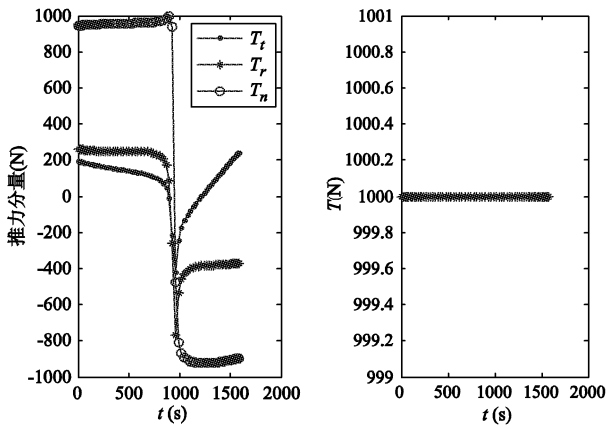


图 3 控制量随时间变化曲线  
Fig. 3 Control variables curves

图 3 中的左图是三个方向的推力合力的值,可以看到,轨道转移过程中推力一直保持最大值,这和文献[5]的结果是一致的。

GPM 得到的优化结果需要进行可信性分析。使用 GPM 得到的结果不仅包括控制量还包括状态量,而根据控制量对动力学方程进行积分可以得到状态量的值,只有当优化得到的状态量和积分得到的状态量一致时才能说明优化结果是可信的。图 4 显示了两种状态量的比较,图上可以看到,二者得到的结果几乎完全重合,说明优化结果是可信的。

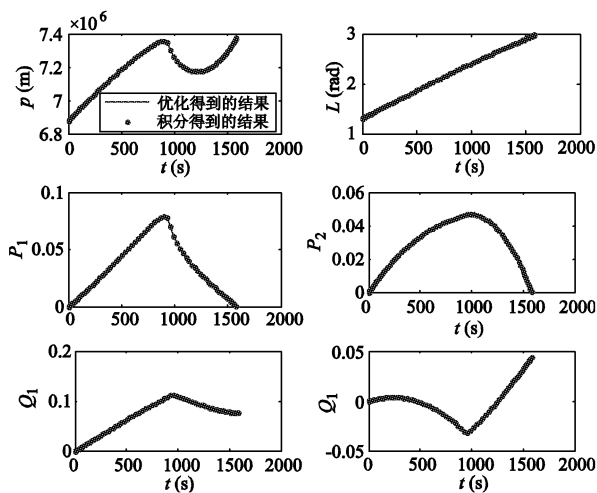


图 4 优化结果的可信性分析  
Fig. 4 Feasibility analysis of the results

GPM 将最优控制问题转化为非线性规划问题后,根据 Qi Gong 等人提出的协状态映射原理<sup>[11]</sup>,

可以通过求得哈密顿函数的值以检验优化结果是否满足一阶最优性必要条件。因为优化目标为时间最短,最优解对应的哈密顿函数的值恒为  $-1$ <sup>[5]</sup>。根据 GPM 得到的哈密顿函数值见图 5。从图上可以看到,哈密顿函数的值在  $-1$  的附近,最大相差不超过 1.82%,可以认为结果是满足最优性必要条件的。

从图 6 可以看到,在飞行过程中,参考卫星的偏心率一直小于 1。

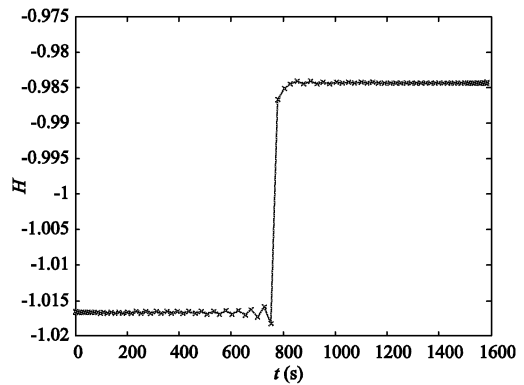


图 5 哈密顿函数随时间变化曲线  
Fig. 5 Hamiltonian curves

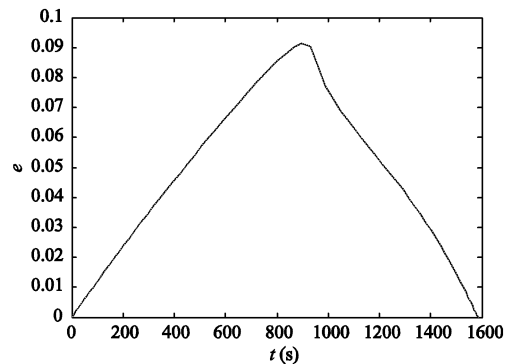


图 6 机动过程中参考卫星的偏心率的变化  
Fig. 6 Eccentricity curves

### 3 伴随卫星轨迹规划

#### 3.1 状态量的变化

在参考卫星的轨迹确定后,根据路径约束条件,可以确定伴随卫星的可行飞行区域的内环半径为 5km,外环半径为 15km。

编队在初始时刻和终端时刻均为串行编队,根据这个特点,可以设计伴随卫星的轨迹,使它们一直保持以参考卫星为中心的串行编队飞行,且飞行的时间与参考卫星飞行时间  $t_f$  相同。

令两个伴随卫星的轨道根数满足条件:

$$\begin{cases} L_1(t) = L(t) + \frac{L_{1f} - L_{10}}{t_f}t \\ L_2(t) = L(t) + \frac{L_{2f} - L_{20}}{t_f}t \end{cases} \quad (11)$$

其他的轨道根数与参考卫星相同。因为参考卫星的偏心率  $e$  在 0 到 1 之间,编队仍会保持伴飞构形<sup>[12]</sup>。

设伴随卫星 1 与参考卫星之间的距离为  $d_{01}$ , 伴随卫星 2 与参考卫星之间的距离为  $d_{02}$ , 伴随卫星之间的距离为  $d_{12}$ , 图 7 给出了在飞行过程中,三颗卫星之间的距离变化曲线:

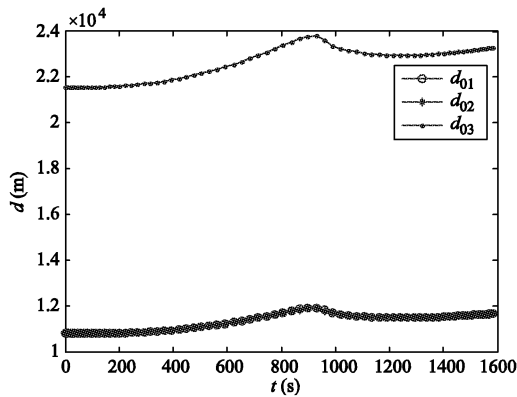


图 7 三颗星之间的距离变化曲线

Fig. 7 Curves of distance between the three satellites

可以看到,两个伴随卫星与参考卫星之间的距离相同。在飞行过程中,逐渐变大,然后变小。最大距离为 11.907km,最小距离为 10.778km,在 5km 到 15km 之间。两个伴随卫星之间的距离一直大于 21.776km,不会碰撞。所以两个伴随卫星的轨迹满足路径约束条件。

### 3.2 控制量的变化

通过前面的轨迹规划,得到了伴随卫星轨迹,也就是状态量的变化曲线,而系统的状态是通过控制量的输入来驱动的,还必须求解相应的控制量。

观察公式(7)可以发现,系统的状态量的个数大于控制量的个数,难以直接求出控制量<sup>[8]</sup>。此时,可以采用地心惯性系中的动力学模型

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = \vec{u} - \frac{1}{r^3} \vec{r} \end{cases} \quad (12)$$

并进一步写成以下形式

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{u} - \frac{1}{r^3} \vec{r} \quad (13)$$

则

$$\vec{u} = \ddot{\vec{r}} + \frac{1}{r^3} \vec{r} \quad (14)$$

由此式可直接求解控制量。式中  $\ddot{\vec{r}}$  代表位置矢量的二次导数,也就是对速度矢量的一次导数。GPM 使用拉格朗日多项式拟合变量,因而只需要按照多项式求导法则就可以很容易地得到  $\ddot{\vec{r}}$ 。

根据文献[3],通过坐标转换可以将改进的春分点轨道根数转化为地心惯性系中的位置和速度。使用公式(14)就可以得到伴随卫星的控制量在地心惯性系中的值,为了方便与参考卫星的控制量进行对比,仍将得到的控制量投影到春分点坐标系上(见图 8)。

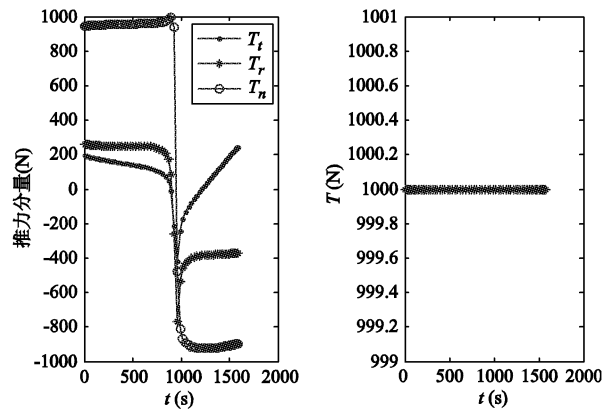


图 8 伴随卫星 1 的控制量随时间的变化曲线

Fig. 8 Curves of control variables of satellites 1

可以发现,控制量的大小和方向均在允许的范围,说明这种轨迹是可行。而且,比较图 3 和图 8 可以发现,该卫星的控制量随时间变化曲线与参考卫星差别很小,这是因为二者的轨迹类似,决定了控制量也类似。

下面分析规划结果的最优性。优化的指标函数是整体机动的时间最短,因为参考卫星的飞行时间已经确定了,因此只要伴随卫星 1 的飞行时间不大于参考卫星的飞行时间,则结果就是最优的。而伴随卫星的飞行时间与参考卫星的飞行时间相同,满足要求。

采用相同的方法分析卫星 2 的飞行轨迹,可以得到类似的结果。所以,通过这种规划方法得到的结果满足各种约束条件(端点约束、路径约束、控制量约束)和最优性条件。

#### 4 结论

本文提出了一种卫星编队整体机动的规划方法,并根据实例对该方法进行了初步的分析研究。该方法充分考虑编队机动的“群”运动特性,将复杂的整体规划分解,先规划参考卫星的轨迹,然后以之为参考,规划伴随卫星的路径,求解相应的控制量,并分析了规划结果的最优性以及控制上的可行性。

这种方法思路清晰,将复杂问题简单化。如果伴随卫星数目增大,也只是增加了路径规划的难点,计算量不会增加很大。该方法适用于圆轨道编队和椭圆轨道编队,能用于近地轨道也能用于深空卫星编队整体机动,对卫星编队的构形也没有要求。

本文对该方法进行了初步的分析,还有一些问题需要进一步的研究。在编队数目较多,构形较复杂的条件下,伴随卫星的轨迹规划是难点问题。同时,伴随卫星轨迹的最优性性能以及控制上的可行性等问题,还需要深入研究,探寻其可能存在的理论基础。这些是下一步的工作重点。

#### 参考文献:

- [ 1 ] Zanon D J, Campbell M E. Optimal planning for tetrahedral formations near elliptical orbits[J]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 16 - 19, 2004, 8: 1 - 15.
- [ 2 ] Xin M, Balakrishnan S N, Pernicka H J. Position and attitude control of deep-space spacecraft formation flying via virtual structure and  $\theta$ -d technique[J]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 15 - 18, 2005, 8: 1 - 15.
- [ 3 ] 梁新刚, 杨涤. 有限推力下时间最优轨道转移[J]. 航天控制, 2007, 25(1): 46 - 51. [ LIANG Xin-gang, YANG Di. Time-optimal orbital transfer under finite thrust[J]. Aerospace Control, 2007, 25(1): 46 - 51. ]
- [ 4 ] 吴德隆, 王小军. 航天器气动力辅助变轨动力学与最优控制[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2006: 244 - 250. [ WU De-long, WANG Xiao-jun. Aeroassisted orbit transfer dynamics and optimal control for spacecraft[J]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2006: 244 - 250. ]
- [ 5 ] Mendy P B, Jr. Multiple satellite trajectory optimization[D]. Monterey, Naval Postgraduate School, 2004: 15 - 92.
- [ 6 ] Aoudé G S. Two-stage path planning approach for designing multiple spacecraft reconfiguration maneuvers and application to SPHERES onboard ISS[D]. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 2007: 3 - 66.
- [ 7 ] 杜金刚. 基于动态逆方法的飞行控制系统设计与仿真[D]. 西北工业大学研究生院, 2007: 10 - 19. [ DU Jin-gang. The design and simulation of the fly control system based on dynamic inversion control[D]. Xi'an: The Graduate School of Northwest University, 2007: 10 - 19. ]
- [ 8 ] 李林侃. 无人机鲁棒动态逆控制研究[D]. 西北工业大学研究生院, 2007: 21 - 23. [ LI Lin-kan. Studies on the robust dynamic inversion control of unmanned aerial vehicle[D]. Xi'an: The Graduate School of Northwest University, 2007: 10 - 19. ]
- [ 9 ] Huntington Geoffrey Todd. Advancement and analysis of a gauss pseudospectral transcription for optimal control problems[D]. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 2007: 115 - 143.
- [ 10 ] 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨道优化数值方法综述[J]. 宇航学报, 2008, 29(2): 397 - 406. [ YONG En-mi, CHEN Lei, TANG Guo-jin. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(2): 397 - 406 (in Chinese). ]
- [ 11 ] Qi G, Ross I M, Wei K, Fahroo F. Connections between the covector mapping theorem and convergence of pseudospectral methods for optimal control[J]. Comput Optim Appl DOI. 10.1007/s10589-007-910-2-4, 2007, 1: 1 - 29.
- [ 12 ] 安雪滢. 椭圆轨道航天器编队飞行动力学及应用研究[D]. 国防科技大学研究生院, 2006, 6: 32 - 48. [ AN Xue-ying. Dynamic and application of the spacecraft formation flight in elliptic orbits[D]. Changsha: The Postgraduate School of The National University of Defense Technology, 2006, 6: 32 - 48. ]

作者简介:丁洪波(1982 -),男,博士生,研究方向为飞行器制导与控制。

通信地址:湖南长沙国防科大航天与材料工程学院学员六队07级(410073)

电话:15084714391

E-mail:whhplz2000@sohu.com