

# 应用卡尔曼滤波的线性系统可观测度 实时估计方法

芦佳振, 张春熹, 颜廷洋

(北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京 1000831)

**摘 要:** 针对采用卡尔曼滤波算法进行线性系统状态估计的应用场合,提出了可观测度实时估计方法。该方法通过提取离散卡尔曼滤波迭代计算过程中的矩阵进行分析,因而在无需增加额外计算量的情况下,可获得系统可观测度性能的实时估计。该方法可以指导滤波器的设计过程或者在线估计系统的滤波器性能,具有工程应用价值。给出了应用该方法的原理推导过程,通过 SINS 系统地面单/双位置对准的实例比较分析证明该方法的有效性。

**关键词:** 线性系统; 可观测度; 卡尔曼滤波; 组合导航; 两位置对准

**中图分类号:** U666.11      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1328(2009)03-0982-06

**DOI:** 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.026

## 0 引言

在控制理论中,系统可观测性所研究的是由输出估计状态的可能性。如果动态方程可观测,那么由输出中可以得到状态变量的信息。对于线性时不变系统通过分析可观测性矩阵是否满秩即可判别系统是否可观测;对于线性时变系统来说问题稍微复杂一些,最基本的方法仍然是寻求在特点时间段内的可观测性矩阵,其中有一类特殊的线性系统在每个时间段内可近似为线性定常系统,称为分段线性定常系统(piece-wise constant system,简称为 PWCS),这类系统可应用 PWCS 可观测性理论<sup>[1,2]</sup>进行分析。

在最优估计理论中,卡尔曼滤波<sup>[3]</sup>获得极大应用,滤波效果的好坏和被估计状态变量可观测度密切相关。可观测度是反映系统状态变量估计速度和精度的量化值。然而可观测性的理论和方法具有二值性,即可观或者不可观,这对研究系统的可观测度来说信息量显得很不充分。文献[4]的研究表明卡尔曼滤波中状态变量估计误差协方差阵的小特征根可以反映系统的高可观测度,与之相对应的特征向量则示出系统可观测度的矢量方向。但[4]中的研究方法并未区分各状态变量的可观测度,同时对方差阵使用的归一化方法因为和方差阵初值相关具有

局限性。

此外,文献[5]给出了利用可观测性矩阵的奇异值分解定量分析系统可观测度的方法。文献[6]通过研究状态估计变量误差协方差阵的衰减特性来表征系统的可估计能力。文献[7]首先通过数学推导证明常规可观测度分析方法受估计误差方差阵初始值或系统状态方程的摄动误差的影响较大,然后推导了一种对系统状态方程的摄动误差具有较好鲁棒性、适用于多输入多输出时变系统的可观测性测量方法。但这些方法都属于事后分析方法,计算较复杂,无法实时给出系统可观测性能的估计。

本文综合文献[4][6]的方法,分析状态变量误差阵和可观测度的关系,将可观测度区分为估计速度和估计精度两种量化指标,得到一种系统可观测度以及状态变量可观测度的实时估计方法。这种方法的主要特点在于分析可观测度所用信息矩阵都来自卡尔曼滤波迭代计算过程的中间值,计算简便,可以在线估计系统的滤波器性能;同时也可以用于指导系统的滤波器设计。

## 1 误差方差阵与系统可观测度

令  $\tilde{x}$  为估计误差矢量,那么

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad (1)$$

其中  $x$  是系统状态矢量真值, 而  $\hat{x}$  是状态矢量的最优估计值。用  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  表示  $\hat{x}$  中的各分量, 这样  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  的线性组合可以定义如下:

$$\omega = \nu_1 \tilde{x}_1 + \nu_2 \tilde{x}_2 + \dots + \nu_n \tilde{x}_n = \nu^T \tilde{x} \quad (2)$$

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  为随机变量,  $\omega$  也就是随机变量, 可以求得  $\omega$  的方差为<sup>[4]</sup>

$$D_\omega = \sigma_\omega^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_i \nu_j p_{ij} = \nu^T P \nu \quad (3)$$

其中  $p_{ij}$  是卡尔曼滤波器的估计误差协方差阵  $P$  的元素。

假定系统验前信息已知, 误差阵初始值为  $P_0$ , 那么对应初始时刻有

$$D_0 = \nu^T P_0 \nu \quad (4)$$

$D_\omega$  可看成误差能量函数, 对应系统估计精度的评判;  $D_\omega$  看成误差能量下降速率, 对应系统估计速度的评判。 $D_\omega$  越大,  $-\dot{D}_\omega$  越小, 说明系统沿着向量  $\nu$  的方向可观测性越弱。令

$$\eta_1 = -\frac{\dot{D}_\omega}{D_0} \quad (5)$$

$$\eta_2 = \frac{D_0}{D_\omega} \quad (6)$$

那么  $\eta_1, \eta_2$  的大小成为衡量系统可观性强弱的指标, 其中  $\eta_1$  是衡量系统可观测度中估计速度的量化指标,  $\eta_2$  是衡量系统可观测度中估计精度的量化指标。下面进一步对  $\eta_1, \eta_2$  作几点说明。

(1)  $\eta_1, \eta_2$  是关于时间  $t$  变化的, 对应于某一时刻,  $\eta_1, \eta_2$  本质上是随机变量。

(2)  $\eta_1$  的量纲可以看成  $1/s$ ,  $\eta_2$  可看成无量纲, 因而无须再进行额外的标准化计算。

(3)  $-\dot{D}_\omega$  越小, 则  $\eta_1$  越小, 对应于系统可观测速度越慢;  $D_\omega$  越大, 则  $\eta_2$  越小, 对应于系统可观测精度越低。

考虑到直接运用  $\eta_1, \eta_2$  无论对于计算还是估计都将是不方便的, 下面将先推导计算  $\eta_1$  的极值。

在约束条件  $D_0 = 1$  下求  $\eta_1$  的极值。这里运用 Lagrange 乘数法, 方程为

$$(\partial/\partial \nu)[\eta_1 - \lambda(D_0 - 1)] = 0 \quad (7)$$

其中  $\lambda$  是 Lagrange 乘数。

由于

$$\eta_1 = -\frac{\dot{D}_\omega}{D_0} = -\nu^T \dot{P} \nu \quad (8)$$

将(4)、(8)代入(7)得

$$(\partial/\partial \nu)[- \nu^T \dot{P} \nu - \lambda(\nu^T P_0 \nu - 1)] = 0 \quad (9)$$

求解方程(9)得到

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial/\partial \nu)[\nu^T (\dot{P} + \lambda P_0) \nu] \\ &= 2(\dot{P} + \lambda P_0) \nu \\ &= 2P_0(\lambda I + P_0^{-1} \dot{P}) \nu \\ &= (\lambda I + \dot{P} P_0^{-1}) 2P_0 \nu \end{aligned} \quad (10)$$

考虑到  $D_0 = \nu^T P_0 \nu = 1$ , 从而有  $\nu \neq 0$ , 而对于具备验前信息的卡尔曼滤波误差方差阵初值  $P_0$  应该非奇异的, 那么从式(10)可以推得  $\lambda I + P_0^{-1} \dot{P}$ ,  $\lambda I + \dot{P} P_0^{-1}$  均为奇异矩阵。因此有

$$|\lambda I + P_0^{-1} \dot{P}| = 0 \quad (11)$$

$$|\lambda I + \dot{P} P_0^{-1}| = 0 \quad (12)$$

因此  $\lambda$  为矩阵  $(-P_0^{-1} \dot{P})$ , 矩阵  $(-\dot{P} P_0^{-1})$  的特征根。

此外

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1 - \lambda(D_0 - 1) \\ &= -\nu^T \dot{P} \nu - \nu^T (\lambda P_0) \nu + \lambda \\ &= -\nu^T (\dot{P} + \lambda P_0) \nu + \lambda \end{aligned} \quad (13)$$

将(9)代入(13)得

$$\eta_1 = \lambda \quad (14)$$

因此  $\eta_1$  的极值点为矩阵  $(-P_0^{-1} \dot{P})$  或矩阵  $(-\dot{P} P_0^{-1})$  的特征根。

同理, 可求得  $\eta_2$  的极值点为矩阵  $(P_0^{-1} P)$  或矩阵  $(PP_0^{-1})$  的特征根的倒数。

为方便记, 令

$$M = -P_0^{-1} \dot{P}, N = -\dot{P} P_0^{-1} \quad (15)$$

$$T = P_0^{-1} P, S = PP_0^{-1} \quad (16)$$

那么矩阵  $M$  或者  $N$  最大的特征根是可观测性速度最快的状态线性组合的方差, 与之对应的特征向量  $\nu$  给出了可观测性速度最快的方向,  $\nu$  的元素是线性组合中各状态估计误差的系数, 显然系数越大的状态可观测速度越快。

类似的, 矩阵  $T$  或者  $S$  最小的正特征根是可观测性精度最高的状态线性组合的方差, 与之对应的特征向量  $\nu$  给出了可观测性精度最高的方向,  $\nu$  的元素是线性组合中各状态估计误差的系数, 显然系

数越大的状态可观测精度越高。

现在回顾连续型线性卡尔曼滤波基本方程中的 Riccati 方程<sup>[8]</sup>。

当外部有量测更新时, Riccati 方程为

$$\dot{P} = FP + PF^T + GQG^T - PH^T R^{-1} HP \quad (17)$$

通过求解 Riccati 方程可以得到式(13)中的矩阵元素  $\dot{P}$  和  $P^{-1}$ , 这表明上述计算可观测度的方法利于实现在线递推估计系统性能。

在没有过程噪声和验前信息时, 连续系统的 Riccati 方程为

$$\dot{P} = FP + PF^T - PH^T R^{-1} HP, P(0) \rightarrow \infty \quad (18)$$

(15)式可改写为

$$\dot{P}^{-1} = -F^T P^{-1} - P^{-1} F + H^T R^{-1} H, P^{-1}(0) = 0 \quad (19)$$

方程(16)的解为

$$P^{-1}(t) = \int_0^t \Phi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (20)$$

其中  $\Phi$  是对应于  $F$  的转移矩阵。如果(17)中的积分对于某个  $t > 0$  是正定且有界的, 那么这个系统是一致完全可观测的; 此外本文可观测度量化值和误差阵初始值有关。这些因素表明本文所述计算可观测度的方法适用范围为具备验前信息的随机一致完全可观测线性时变系统。

### 2 状态变量可观测度的实时估计方法

现在可以通过计算矩阵  $M$  和  $T$  (或者  $N$  和  $S$ ) 的特征根和对应的特征向量获得有关系统可观测度的有用信息, 但是仍无法直接获得某个状态变量的可观测度信息。

还是从(3)出发分析状态变量可观测度。以随机变量  $\tilde{x}_i (1 \leq i \leq n)$  为例, 它的方差为

$$D_{\tilde{x}_i} = p_{ii} \quad (21)$$

设  $D_{\tilde{x}_i}$  的初始值为  $p_{ii}(0)$ 。令

$$\xi_1 = -\frac{\dot{p}_{ii}}{p_{ii}(0)} \quad (22)$$

$$\xi_2 = \frac{p_{ii}(0)}{p_{ii}} \quad (23)$$

与系数  $\eta_1, \eta_2$  类似,  $\xi_1, \xi_2$  的大小成为衡量状态变量  $x_i$  可观性强弱的指标, 其中  $\xi_1$  是衡量  $x_i$  可观测度中估计速度的量化指标,  $\xi_2$  是衡量  $x_i$  可观测度中

估计精度的量化指标。当然, 使用(22)、(23)的前提条件是  $p_{ii} > 0$ 。

现在讨论本文可观测度计算方法的具体操作步骤。卡尔曼滤波每一步的迭代过程实际分为时间传播和量测更新两个阶段, 如果没有外部量测信息时, 只进行时间传播, 显然此时分析可观测度也是没有意义的; 一旦有外部信息, 即时进行量测更新, 利用更新后得到的误差阵  $P$  以及求解 Riccati 方程(17)得到的即时矩阵  $\dot{P}$  可以计算式(5)、(6)、(22)、(23), 从而分析系统可观测度以及状态变量可观测度。

### 3 仿真实例

捷联惯导系统的误差方程为<sup>[9]</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{nav} \\ \dot{X}_{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{nav} \\ X_{ir} \end{bmatrix} + \mu \quad (24)$$

其中,  $X$  是状态变量, 由 9 个导航参数误差  $X_{nav}$  和 6 个器件误差  $X_{ir}$  两部分组成。 $X_{nav}$  包括系统三维位置、速度、姿态误差,  $X_{ir}$  包括陀螺和加速度计的零偏随机误差。 $A_1, A_2, A_3$  和  $A_4$  分别表示导航参数与器件误差的动力学特性。 $\mu$  表示量测噪声。表 1 为状态变量具体名称汇总表。

式(24)也是捷联系统初始对准时所用卡尔曼滤波器的状态方程。为了对系统的各种初始误差进行估计, 还需建立观测方程。一般依据零速修正原理(ZUPT), 可建立式(25)。

$$\begin{bmatrix} \delta Z_1 \\ \delta Z_2 \\ \delta Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \nu \quad (25)$$

其中,  $\delta Z_1, \delta Z_2, \delta Z_3$  分别为  $x, y, z$  方向的速度测量误差;  $A$  为  $3 \times 18$  阶零子阵。 $\nu$  表示测量噪声。

表 1 状态变量汇总表

Table 1 Variable states

状态变量名称	排列序号	状态变量符号
位置误差	1, 2, 3	$\delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta h$
速度误差	4, 5, 6	$\delta V_x, \delta V_y, \delta V_z$
姿态误差	7, 8, 9	$\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$
陀螺零漂	10, 11, 12	$B_x, B_y, B_z$
加速度计偏置	13, 14, 15	$A_x, A_y, A_z$

仿真的器件误差指标见下表 2。

表 2 仿真器件指标

Table 2 Simulation instrument parameters

误差源	个数	指标
陀螺零偏稳定性	3	0.02°/hr
陀螺标度稳定性	3	$50 \times 10^{-6}$
陀螺失准角误差	6	20"
陀螺噪声	3	$0.0015^\circ / \sqrt{hr}$
加速度计零偏稳定性	3	100 $\mu g$
加速度计标度稳定性	3	$100 \times 10^{-6}$
加速度计失准角误差	6	20"
加速度计噪声	3	$10 \mu g / \sqrt{hr}$

初始水平姿态角以及航向角误差均设为 0.5°。

应用式(24)、(25)建立离散卡尔曼滤波器:

滤波器状态变量的各初始值设为 0;

状态变量误差方差阵初始值设为

$$P_0 = \text{diag}[(10'')^2, (10'')^2, (10m)^2, (0.15m/s)^2, (0.15m/s)^2, (0.15m/s)^2, (0.5^\circ)^2, (0.5^\circ)^2, (2^\circ)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2, (100\mu g)^2, (100\mu g)^2, (100\mu g)^2]$$

系统噪声方差阵初始值为

$$Q_0 = \text{diag}[0, 0, 0, (10\mu g)^2, (10\mu g)^2, (10\mu g)^2, (0.002^\circ/h)^2, (0.002^\circ/h)^2, (0.002^\circ/h)^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

观测噪声方差阵初始值为

$$R_0 = \text{diag}[(0.001m/s)^2, (0.001m/s)^2, (0.001m/s)^2]$$

惯导系统在静基座初始对准时常为不完全可观测系统,而通过改变航向角 180°的最优两位置对准能使系统成为完全可观测的,大大提高系统对准精度。本文首先对单位置对准进行仿真(case1),总时间 600s;然后仿真双位置对准过程(case2):第一位置对准 300s,绕航向轴以 90°/s 的转速转动 2s 至第二位置,在第二位置对准 298s。经过若干步的递推计算,可得到仿真过程中各迭代时刻的估计误差协方差阵及其导数。为了分析简便,系统 xyz 轴初始朝向设定为东北天。

### 3.1 系统可观测度分析

下面应用式(15)、(16)分析系统的可观测度。以系统对准完 600s 时刻为例,分别计算出 case1 和 case2 中矩阵  $M$  和  $T$  的特征根及其对应的特征向量,  $M$  的 15 个特征根和关于最大特征根的特征向量如表 3 所示,  $T$  的 15 个特征根和关于最小正特征根的特征向量如表 4 所示。

表 3  $M$  的特征根及其特征向量

Table 3 Eigenvalues and eigenvector of  $M$

Case1		Case2	
特征根	特征向量	特征根	特征向量
0.00092376	4.1813e-005	0.0012268	-1.37E-05
0.0001018	-2.3594e-006	0.00098282	1.41E-06
0.00021927	-4.6993e-014	0.00021927	-2.71E-16
1.7946e-006	-5.2598e-008	-2.7396e-005	-2.93E-10
-1.3375e-006	1.1845e-009	-2.7556e-005	-5.09E-08
-1.1548e-006	-4.1349e-011	-3.1746e-006	-2.23E-13
-5.912e-007	-2.3961e-008	-2.8625e-006	-6.49E-08
6.408e-007	6.1306e-008	2.6928e-006	5.75E-11
4.8943e-007	1.7096e-009	7.2874e-007	1.39E-07
1.8847e-009	-0.015562	6.0536e-007	-0.99071
2.7866e-009	-0.99987	2.7866e-009	-0.0030574
7.1951e-011	0.0044513	-2.4466e-011	-0.13594
6.6502e-011	-1.2134e-006	6.6709e-011	1.91E-07
1.2129e-011	1.8685e-005	1.2386e-011	-1.47E-06
1.2253e-011	-1.6161e-009	1.2732e-011	-3.48E-12

表 4  $T$  的特征根及其特征向量

Table 4 Eigenvalues and eigenvector of  $T$

Case1		Case2	
特征根	特征向量	特征根	特征向量
0.056456	0.049611	0.99235	0.0065527
1	-0.00027878	0.99969	2.2505e-005
0.99998	-3.6827e-010	0.99998	-7.2264e-012
0.99881	-1.345e-006	0.063856	-5.3954e-008
0.97761	-0.00018954	0.063809	-1.1426e-005
0.9821	1.7037e-009	0.0053952	1.4444e-011
0.98022	0.049612	0.0011414	0.0065522
0.00073545	-0.00032245	0.00073545	-2.7073e-005
0.00013481	5.8181e-005	3.0741e-005	6.608e-005
5.4225e-006	0.99748	4.4689e-006	-0.99991
5.4254e-006	0.0096068	4.6153e-006	0.00067118
4.0571e-006	0.00091487	4.0571e-006	0.0099475
1.1503e-007	3.7765e-005	3.3844e-008	-1.0043e-006
7.3561e-008	0.0050613	3.3893e-008	-0.00030453
7.3562e-008	-5.47e-007	1.1503e-007	1.7114e-009

根据前面推导的理论,关于  $M$  最大特征根的特征向量给出系统可观测性速度最快的方向。那么从表 3 可以看出,在 case1 中对应第一个特征根的特征向量在  $x_{11}$  坐标方向上明显大于其他方向,这表明系统对北向陀螺零偏有更快的可观测性速度;而在 case2 中第 1、2 特征根大小接近,由于第 1 特征根所对应的特征向量和 case1 中类似,表 3 中列出对应第二个特征根的特征向量,它在  $x_{10}$  坐标方向上明显大于其他方向,这表明系统对东向陀螺零偏有更快的可观测性速度。事实上,根据理论分析可以知道,

第一节中关于系统可观测性速度的论述和实际过程吻合。

同样根据前面推导的理论,关于  $T$  最小正特征根的特征向量给出系统可观测性精度最高的方向。那么从表 4 可以看出,在 case1 中第 14、15 特征根大小接近,第 14 特征根所对应的特征向量在  $x_{10}$  坐标方向上明显大于其他方向;表 4 中列出对应第 15 个特征根的特征向量,它在  $x_{11}$  坐标方向上明显大于其他方向,这表明系统对北向陀螺零偏有更高的可观测性精度。而在 case2 中第 13、14 特征根大小接近,第 13 特征根所对应的特征向量在  $x_{11}$  坐标方向上明显大于其他方向;表 4 中列出对应第 13 个特征根的特征向量,它在  $x_{10}$  坐标方向上明显大于其他方向,这表明系统对东向陀螺零偏有更高的可观测性精度。这些情况表明了本文方法在分析系统可观测性精度方面的作用。

3.2 状态变量可观测度分析

首先以航向角误差状态变量为例,利用公式(22)、(23)进行计算,比较两种情形下 300 ~ 550s 之间的可观测度变化情况。图 1 所示为两种情形下的可观测度速度量化指标  $\xi_1$  随时间变化的曲线;图 2 所示为两种情形下的可观测度精度量化指标  $\xi_2$  随时间变化的曲线。图 1、图 2 清晰地表明两位置对准过程中当转动至第二位置时系统对航向误差的可观测性能有明显的改善,这与实际情况相吻合。

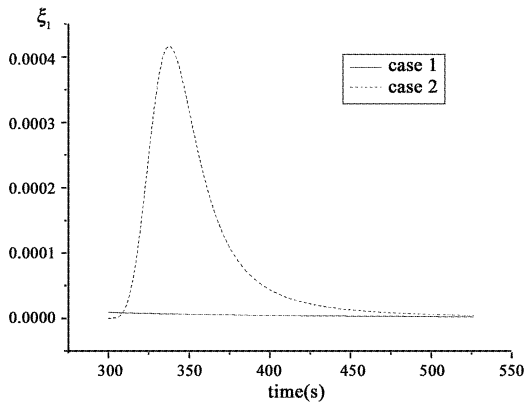


图 1  $\xi_1$  的变化曲线

Fig.1 Chart of variable  $\xi_1$

图 1、图 2 反映的仅是航向角误差状态变量的可观测指标随时间变化曲线,仍需进一步分析其他状态变量可观测指标。选取两位置对准起始时刻点  $t = 303s$ , 计算并比较两种情形下在该时刻下各状

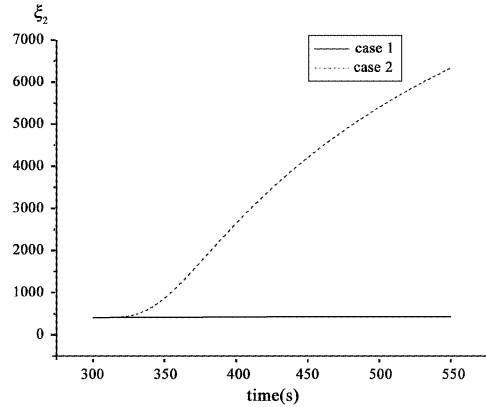


图 2  $\xi_2$  的变化曲线

Fig.2 Chart of variable  $\xi_2$

态变量可观测指标  $\xi_1$ 、 $\xi_2$  的大小,具体数值见表 5。经过 case1 和 case2 比较可以发现,对于指标  $\xi_1$ , case2 中滤波器状态水平姿态角误差以及水平方向加速度计零偏误差有明显改善;而对于指标  $\xi_2$ ,情况和  $\xi_1$  类似;此外值得注意的是由于高度方向采用了精确已知点的高度进行阻尼,所以高度误差的可观测精度指标非常高。这与实际情况相吻合。

表 5 各状态变量可观测指标 ( $t = 303s$ )

Table 5 Observability index of variable states ( $t = 303s$ )

	$\xi_1$		$\xi_2$	
	Case1	Case2	Case1	Case2
1.	5.882e-006	7.3496e-007	1.0005	1.0005
4.	2.873e-009	1.2643e-007	1.0001	1.0001
6.	9.101e-008	1.887e-007	5.5855e + 006	4.4296e + 006
6.	7.902e-006	0.00032568	1.8087e + 005	26358
6.	8.273e-006	0.00032569	1.8038e + 005	26357
6.	2.778e-006	1.5001e-005	1.8813e + 005	1.2519e + 005
5.	2.762e-008	6.2293e-005	6260.8	25742
4.	3.999e-008	6.2314e-005	6255.3	25739
9.	3.488e-006	1.4732e-006	402.64	402.21
1.	6.473e-006	5.716e-006	1.0237	1.0237
0.	0.003376	0.00048255	9.1036	9.0202
1.	4.939e-005	7.4565e-007	1.0001	1.0001
0.	0.0001026	0.47248	1.0186	15.595
0.	0.00013653	0.47245	1.0191	15.587
0.	0.00021293	0.00048245	1362.1	1235.9

4 结论

以上研究表明误差协方差阵及其导数包含了系统、各状态变量的可观测度信息。为了对可观测度进行准确地定量分析,本文将可观测度区分为精度和速度两项指标。本文方法的优势在于针对应用卡

尔曼滤波器的场合可以实时对系统可观测性能进行估算;此外在系统设计的初级阶段,也可以用来指导或评价滤波器设计的合理性。

#### 参考文献:

- [1] GOSHEN-MESKIN D, BAR-MESKIN D, BAR-ITZHACK I Y. Observability analysis of piece - wise constant system, Part I : theory [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 1992, 28(4): 1056 - 1067.
- [2] GOSHEN-MESKIN D, BAR-ITZHACK I Y. Observability analysis of piece-wise constant system, part II : application to inertial navigation in-flight alignment [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 1992, 28(4): 1068 - 1075.
- [3] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, 1960: 35 - 45.
- [4] HAM F M, BROWN R G. Observability, eigenvalues, and Kalman filtering [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1983, 19(2): 269 - 273.
- [5] 程向红,万德钧,仲巡. 捷联惯导系统的可观测性和可观测度研究 [J]. 东南大学学报, 1997, 27(6): 6 - 10. [CHENG Xiang-hong, WAN De-jun, ZHONG Xun. Study on observability and its degree of strapdown inertial navigation system [J]. Journal of Southeast University, 1997, 27(6): 6 - 10 (in Chinese).]
- [6] Baram Y, Kailath T. Estimability and regulability of linear systems [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1988, 33(12): 1116 - 1121.
- [7] Hong S, Chun H H, Kwon S H, et al. Observability measures and their application to GPS/INS [J]. IEEE Trans. On Vehicular Technology, 2008, 57(1): 97 - 106.
- [8] Gelb A. Applied Optimal Estimation [M]. Cambridge, Mass: M.I.T. Press, 1974: 119 - 133.
- [9] 宋凝芳,张春熹,朱奎宝. 高精度光纤陀螺捷联系统设计 [J]. 北京航空航天大学学报, 2006(11): 1380 - 1384. [SONG Ning-fang, ZHANG Chun-xi, ZHU Kui-bao. Design of high precision fiber optic gyro strapdown system [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006(11): 1380 - 1384 (in Chinese).]

作者简介:芦佳振(1982 - ),男,博士生,研究方向为 GPS/INS 组合导航技术。

通信地址:北京市海淀区学院路 37 号北京航空航天大学光电技术研究所(100083)

电话:(010)82316906

E-mail:ljzh100@aspe.buaa.edu.cn

## A Real Time Estimation Method of Degree of Observability for Linear System Using Kalman Filter

LU Jia-zhen, ZHANG Chun-xi, YAN Ting-yang

(School of Instrument Science and Opto-electronics Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** In applications of state estimation in a linear system via kalman filter, a real time estimation method of degree of observability was proposed. Degree of observability could be obtained through matrix analysis during iterative computation of discrete Kalman filter without extra computation. The proposed method is very useful for filter design or online performance estimation. Principle of this estimation method was derived and efficiency was proved by contrast between single and double position ground alignment process of strapdown inertial system.

**Key words:** Linear system; Degree of observability; Kalman filter; Integrated navigation; Double position ground alignment