

有限推力航天器轨迹优化问题的一种 双模型直接配置法

潘 伟¹, 路长厚¹, 葛培琪¹, 冯维明²

(1. 山东大学机械学院, 济南 250061; 2. 山东大学土建学院, 济南 250061)

摘 要: 直接配置法在有限推力航天器的轨迹优化问题中得到了广泛的应用,但它所构造的非线性规划问题存在维数多,求解精度低等困难。针对有限推力航天器最优轨迹由最大推力弧和零推力弧构成这一特点,分别使用球坐标动力学方程和高斯方程对二者建模,并解决了由此带来的配置过程中的区间化分问题。这种双模型的直接配置法易于引入各种摄动因素的影响,从而提高求解精度,同时,构造的非线性规划问题的变量较少,降低了时间消耗。最后通过算例演示了求解过程,并证实了上述优点。

关键词: 有限推力; 摄动; 直接配置法; 轨迹优化

中图分类号: V412 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328 (2009) 02-0442-06

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.007

0 引言

有限推力航天器轨迹优化问题实质上是一个最优控制问题,解决方法有三类:间接法、直接法与混合法。直接法尤其是其中的直接配置法因健壮、适应性强等优点,近来受到了更多的关注^[1-3]。其本质是直接将整个控制历程进行离散,在每个时间区间内用多项式来代替微分方程,将原来的无限维的最优控制问题转化为有限维的非线性规划问题后再求解。直接配置法的主要缺点是当原问题的离散化、参数化程度较高时,引入的参数量增多,会形成所谓的维数灾,导致非线性规划问题的计算时间激增,问题求解困难。

许多学者对直接配置法进行了研究与改进。Enright 和 Conway^[4]用直接配置法解决了有限推力航天器的交会和变轨问题,并对解的正确性和精度进行了分析。有限推力航天器的最优轨迹由若干个最大推力弧和零推力弧交替构成。对于最大推力弧,Enright 和 Conway 用极坐标下的轨道动力学方程进行描述,并将其等分为多个子区间,在各子区间内使用 Hermite-Simpson 偏差等方式来近似动力学方程约束^[2]。对于零推力弧,他们研究了两种方法:“analytical-shooting”法和“matched-integral”法。

前者根据零推力弧起点的数值使用分析的方法来计算零推力弧终点的数值,并将计算得到的终点数值与给定值间的偏差作为非线性规划问题的一个约束,以此来完成零推力弧的配置。这种方法取得了一定的成功,但因其不可避免的敏感性问题,后来很少被使用。“matched-integral”法是根据零推力弧的某些积分项不变(如轨道根数),而将其起点和终点的这些积分项相等作为非线性规划问题的一个约束,以此来完成零推力弧的配置。这种方法的优点是简便,缺点是只适用于理想的二体运动的情况,当存在各种摄动因素时,就会产生较大的误差。Betts^[3]提出了区间优化(mesh refinement)的方法,在区间数目一定的情况下可以获得最高的求解精度,比按时间均匀地划分区间的做法更加合理。Desai^[5]用两种时间尺度来划分节点,对于变化相对缓慢的量(如质心运动的参数)是一种时间尺度,而对变化迅速的量(如姿态运动的参数)用另一种时间尺度,这提高了直接配置法的精度区间数比。另外,国内的孙军伟等^[6]将直接配置法应用于常推力月球软着陆问题。

本文在这些学者工作的基础上,考虑了空间摄动因素的影响,利用最大推力弧和零推力弧各自的特点,对它们使用不同的数学模型进行描述,并解决

由此带来的区间化分问题,从而提高直接配置法的性能。首先给出有限推力航天器轨迹优化问题的数学描述与一般的直接配置解法,然后介绍改进的双模型直接配置法所使用的两种模型,并推导了二者间的切换公式,分析了在最大推力弧与零推力弧间的区间划分问题。最后将此方法应用于考虑摄动的有限推力航天器的轨迹规划问题中,证实了算法精确快速的优点。

1 有限推力航天器轨迹优化问题

有限推力航天器轨迹优化问题求最优控制历程,使得在客观条件允许的范围内(容许控制等),且满足某种终端约束(变轨、拦截、交会等)的情况下,目标函数(燃料、时间的消耗等)取最小值。其数学描述就是求最优控制历程 $u(t)$, 使性能函数 $J(u)$ 取最小值。其中性能函数为

$$J(u) = \phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (1)$$

式中: t_0 是起点时刻, t_f 是终点时刻, $x(t)$ 是状态变量。同时,必须服从下列动力学方程、起点条件、终点条件、有限推力等约束。

动力学方程:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (2)$$

起点条件:

$$x(t_0) = X_0 \quad (3)$$

终点条件:

$$\psi[x(t_f), t_f] = 0 \quad (4)$$

推力约束:

$$u(t) \in Q \subseteq R^m \quad (5)$$

下面首先给出解决这类最优控制问题的一般的直接配置法的数学表达,然后讨论一种对于有限推力航天器轨迹优化问题来说性能更好的双模型直接配置法。

2 直接配置法基本原理

直接配置法可以将系统的动力学方程约束转化为 N 个关于状态向量的等式约束,并藉此来构成非线性规划问题^[2]。假设系统动力学方程为:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), t \in [0, t_f] \quad (6)$$

其中 x 是系统的状态向量。将时间区间 $[0, t_f]$ 平均分为 N 段,则 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ 。在每一段中,可以用一个 Hermite 三次插值多项式来近

似动力学方程。此多项式应当在两个端点的函数值和导数值、中点的导数值服从动力学方程。则原来的动力学微分方程,就用 $N * m$ (状态向量的维数) 个 Hermite-Simpson 积分形式的约束来代替:

$$x_i = x_{i-1} + \frac{h_i}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(y_i) + f(x_i)] \quad (7)$$

其中,

$$y_i = \frac{1}{2} (x_{i-1} + x_i) + \frac{h_i}{8} [f(x_{i-1}) - f(x_i)] \quad (8)$$

因此,最优控制问题(1) - (5)通过直接配置法,转换成下列形式:寻找最优控制序列 $[u_0, u_1, \dots, u_N]$ 及相关的最优轨迹序列 $[x_0, x_1, \dots, x_N]$ 和持续时间 $[t_{f1}, t_{f2}, \dots, t_{fN}]$, 使价值函数(1)的离散化形式取最小值,并服从下面的约束:

动力学方程约束:

$$\Delta_i = 0, i = 1, \dots, N, x \in R^n, u \in R^m$$

起始条件:

$$x(t_0) = X_0$$

终端条件:

$$\phi[x(t_f), t_f]$$

其中,

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1} - \frac{h_i}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(y_i) + f(x_i)]$$

这样,通过直接配置法,就将一个无限维的最优控制问题,变成了有限维的非线性规划问题。

3 双模型直接配置法

由直接配置法构造的非线性规划问题的时间、空间消耗主要取决于其规模,也就是对状态变量的时间历程进行配置时划分的段数 N 。段数 N 越大,求解的精度越高,但算法所花费的时间急剧增长。因此,如何在保证一定精度的情况下尽可能的减小非线性规划问题的规模是提高算法性能的关键问题。

在保证精度方面,本文考虑了空间摄动因素的影响。这样就不能再像“matched-integral”法那样将零推力弧看成是理想的开普勒轨道,而是必须要在最大推力弧与零推力弧上都进行离散化与配置处理。但这不可避免的会使分段数目增加,从而导致计算时间激增。因此,本文考虑在最大推力弧上使用球坐标形式的动力学模型,在零推力弧上使用高斯方程的动力学模型。由于零推力弧上高斯方程中的状态变量变化非常缓慢,要达到与最大推力弧上

相当的积分精度,离散为很稀疏的几个区间就可以(往往仅需 1、2 个区间),因此就不会过多增加计算时间。这样就兼顾了速度与精度。

3.1 最大推力弧上的球坐标运动方程

$$\begin{cases} \dot{r} = v_r \\ \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r \cos \phi} \\ \dot{\phi} = \frac{v_\phi}{r} \\ \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\phi^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + f_T \alpha_r + f_P \\ \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\phi v_\theta}{r} \tan \phi + f_T \alpha_\theta + f_{P\theta} \\ \dot{v}_\phi = -\frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta^2}{r} \tan \phi + f_T \alpha_\phi + f_{P\phi} \end{cases} \quad (10)$$

此方程中有六个状态变量 $[r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi]$, 它们的物理意义如图 1 所示。 f_T 是推力矢量, f_P 是所有摄动的合力。为提高算法的效率,所有的变量事先都应进行无量纲化。当然,在最大推力弧上也可以使用高斯方程,对于小推力航天器的轨迹优化问题有时就是如此。但一般的有限推力航天器并不合适。

3.2 零推力弧上的高斯运动方程

高斯运动方程的六个状态变量分别是: $[a, e, i, \Omega, w, nu]$, 前两个表示平面内椭圆的形状,中间三个表示轨道平面的方向,最后一个是真近角。

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{2}{n \sqrt{1-e^2}} [S e \sin f + T(1 + e \cos f)] \\ \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [S \sin f + T(\cos f + \cos E)] \\ \frac{di}{dt} = \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-S \cos f + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{dnu}{dt} = n - \frac{1-e^2}{nae} \left[-S \left(\cos f - 2e \frac{r}{p} \right) + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] \end{cases} \quad (11)$$

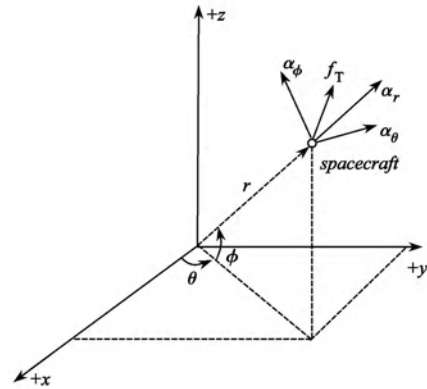


图 1 球坐标示意图

Fig. 1 Spherical coordinates

3.3 两模型间的转换

下面给出动力学方程 (10) 与 (11) 的状态变量 $[r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi]$ 与 $[a, e, i, \Omega, w, nu]$ 之间的转换公式。

首先是从 $[a, e, i, \Omega, w, nu]$ 到 $[r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi]$ 的转换,算法如下:

- (1) 根据轨道根数 $[a, e, nu]$, 求球坐标系中的状态变量 $[r, v_r, v_\theta]$;
- (2) 根据 $[i, \Omega, w]$ 和上一步得到的 r , 计算航天器的直角坐标 $[x, y, z]$;
- (3) 根据上一步得到的 $[x, y, z]$, 计算球坐标系中的状态变量 $[\theta, \phi]$ 。

限于篇幅,不再罗列具体公式。

其次是从 $[r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi]$ 到 $[a, e, i, \Omega, w, nu]$ 的转换:

$$\begin{cases} a = \frac{r}{\left(2 - \frac{r}{\mu} v^2 \right)} \\ e = \sqrt{\left(\frac{r}{\mu} v^2 - 1 \right)^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta} \\ nu = \arctan \left(\frac{\frac{r}{\mu} v^2 \sin \beta \cos \beta}{\frac{r}{\mu} v^2 \cos^2 \beta - 1} \right) \\ \Omega = \theta - \arctan \left(\frac{v_\theta \sin \phi}{v_\phi} \right) \\ i = \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \phi + \frac{v_\phi}{v_\theta}}}{\cos^2 \phi} \right) \\ \omega = \arcsin \left(\frac{\sin \phi}{\sin i} \right) - nu \end{cases} \quad (12)$$

式中:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2}, \beta = \arctan\left(\frac{v_r}{\sqrt{v_\theta^2 + v_\phi^2}}\right)$$

3.4 区间划分问题

确定了最大推力弧与零推力弧上的模型之后,下面就是如何在二者间进行区间划分的问题了,目标是区间数目一定的情况下达到高的求解精度,同时不过分增加算法的复杂度。

Enright 和 Conway 使用的是等分方法,简便但非最优^[4]。Betts^[3]提出了区间优化(mesh refinement)的方法。优点是可以比较准确的估算和控制算法的总体误差;缺点是得到的区间优化结果并不一定是最优、算法比较复杂,而且为了使节点分配合理需反复计算误差并迭代整个优化过程,时间消耗较大。实际上,由于区间化分问题需要以误差估计为基础,这就需要知道协态变量的值,但直接法并不计算它们,所以直接法中准确的分析误差或划分区间需要花费很大的时间代价。

因此,我们使用一种按照在最大推力弧与零推力弧上状态变量关于时间的函数的平均曲率来划分区间的方法。虽然,这只能得到近似最优的区间分配方案,但其对基于 Hermite-Simpson 公式的直接配置法实际效果不错,可以节省许多计算时间。其步骤如下:

(1) 确定将要划分的区间的总数,这决定了非线性规划问题的规模。

(2) 计算某段最大推力弧上的近似平均曲率 K_i , 由于尚未计算出最优轨迹,按照初值近似计算:

$$K_i = \frac{1}{a_{i0} + b_{i0}} + \frac{1}{a_{i1} + b_{i1}}$$

其中, a_{i0}, b_{i0} 是第 i 段最大推力弧起点处瞬时椭圆轨道的长半轴和短半轴, a_{i1}, b_{i1} 是终点处瞬时椭圆轨道的长半轴和短半轴。

(3) 计算某段零推力弧上的近似平均曲率 K_j , 同样按照初值近似计算:

$$K_j = \left| \frac{0.5 \cdot \ddot{y}_{j0}}{(1 + \dot{y}_{j0})^{\frac{3}{2}}} \right| + \left| \frac{0.5 \cdot \ddot{y}_{j1}}{(1 + \dot{y}_{j1})^{\frac{3}{2}}} \right|$$

其中, y_{j0} 是第 j 段零推力弧起点处某个变化较快的轨道根数, y_{j1} 是第 j 段零推力弧终点处某个变化较快的轨道根数。例如,可以取轨道根数 a 。

(4) 在节点总数一定的情况下,按与每段弧上近似平均曲率成反比的规律分配节点数目,弧内按相等的时间间隔平均划分节点。

这种方法实际上是按照状态变量的波动程度来

划分子区间的,状态变量的波动剧烈的地方节点密度大,反之则节点密度小。虽然以上划分子区间的方法得到的只是近似最优的方案,但在直接配置法不计算协态变量,算法误差精确估计的时间代价很大的情况下,这么做不失为一种效果较好的折中策略。由于摄动力与发动机推力相比要小得多,零推力弧上轨道根数变化很小,往往只需划分为一两个区间即可。

对于以上方法最终构成的非线性规划问题,我们使用序列二次规划法(SQP)进行了求解。

4 算例与分析

两异面椭圆轨道航天器间的最优交会问题,要求燃料最省。初始条件:目标航天器所在的大椭圆轨道的长轴长度为追踪航天器所在的小椭圆轨道的 3 倍,两共轴椭圆面的夹角为 0.3 弧度,目标航天器在追踪航天器前大约 $2/3 \pi$ 弧度处,追踪航天器从近拱点开始轨道机动。

建立了包含 J2 项摄动的动力学模型。在两个最大推力弧和一个零推力弧上,共划分了 25 个子区间。按照 3.4 节的区间划分方法,其中,最大推力弧上共使用了 24 个,零推力弧上使用了 1 个,形成了一种比较合理的分配。

结果如图 2 和图 3 所示。异面椭圆轨道交会问题的最优轨迹由三个弧构成。图 2 中两个带箭头的弧表示最大推力弧,箭头表示此刻推力矢量的方向,两个最大推力弧由中间没画箭头的零推力弧连接在一起。图 3 表示两次点火过程中,推力矢量随时间的变化。其中的 (a)、(b)、(c) 三图分别表示第一次点火过程中,推力矢量在 $\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_\phi$ 方向的分量随时间的变化,(d)、(e)、(f) 三图表示第二次点火过程中推力矢量随时间的变化。

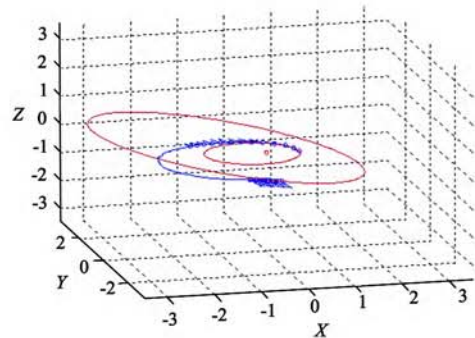


图 2 异面椭圆轨道交会问题的最优轨迹

Fig. 2 Optimal rendezvous trajectory

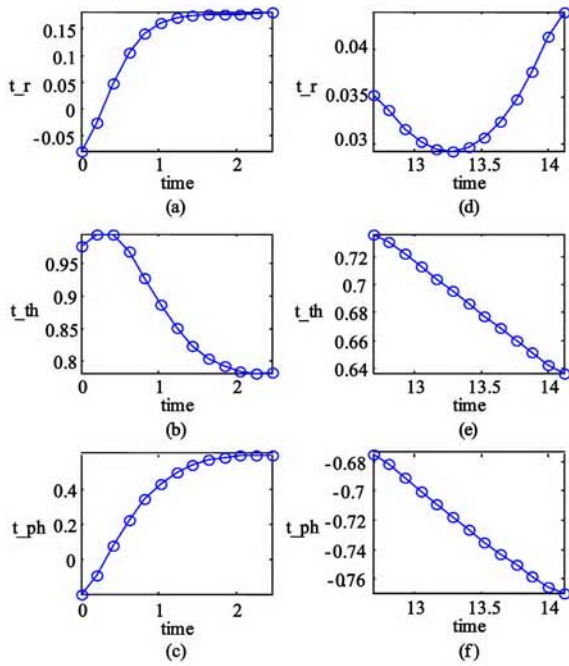


图 3 推力矢量随时间的变化

Fig. 3 Time histories for optimal control steering

下面将双模型直接配置法得到的上述结果,与单模型方法以及“matched-integral”法得到的结果进行比较。此处所说的单模型方法,是在最大推力弧和零推力弧上使用相同的动力学模型(球坐标方程),

并都使用多项式配置成非线性规划问题的方法。由此可见,上述三种方法主要是在零推力弧上的处理方法不同。同样的问题同样的初值,其它两种方法的结果与双模型方法的结果从整体上看相似(图 2 和图 3),难以看出差别。因此对它们之间的差异(相减)做图。图 4 (a)中是双模型方法与“matched-integral”法得到的最优轨迹的差异,其中“+”表示第一段最大推力弧的差异,虚线表示零推力弧的差异,“o”表示第二段最大推力弧的差异。

“matched-integral”法中无法引入摄动的影响,两种方法的结果相差大约在 10^{-3} 数量级(与图 2 所示的最优轨迹相比)。图 4 (b)中是双模型方法与“matched-integral”法得到的最优控制的差异,其中虚线、点划线和实线分别表示推力矢量在 $\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_\phi$ 三个方向的分量随时间变化的差异,为表示得更加清楚,添加了空白代表零推力弧。最优控制矢量的差异大约在 10^{-2} 数量级。图 4 (c)与 (d)表示双模型方法与单模型方法(都考虑了 J_2 摄动)得到的最优轨迹及最优控制的差异,数量级分别为 10^{-5} 与 10^{-4} 。由此可见,对于同一个问题使用同一个初值,双模型方法与单模型方法的结果几乎相同,而由于双模型方法的动力学模型可以包含摄动因素,比“matched-integral”法的结果准确。

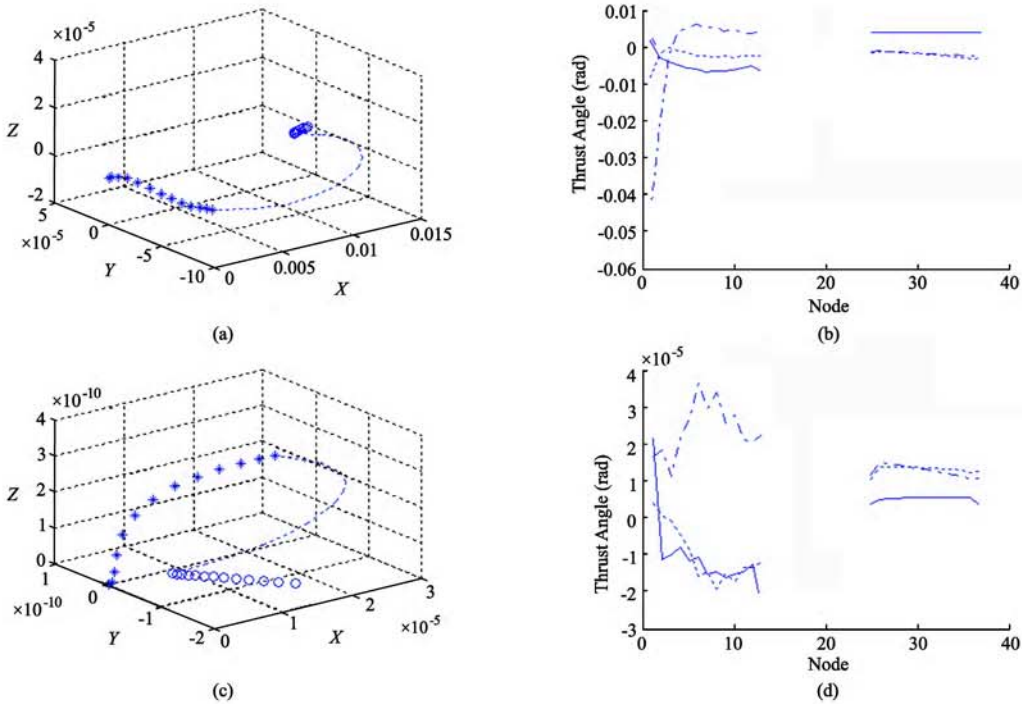


图 4 双模型方法与两种传统算法的结果对比

Fig. 4 Result of dual-model method vs. single-model method and matched integral method

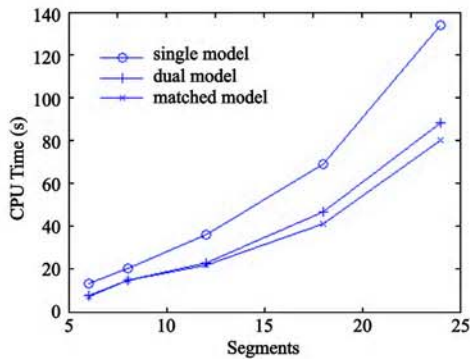


图5 计算时间随区间数目的变化

Fig.5 CPU time vs. segments

图5比较了三种算法的时间消耗。横坐标代表最大推力弧上的区间数目,纵坐标是算法所花费的时间,其中所有算例构造的非线性规划问题的收敛结束的条件(价值函数和迭代变量的终止偏差)相同。图中可以看出,随着划分的区间数目的增加,三种算法的时间消耗都急剧上升。双模型方法的时间消耗比“matched-integral”法稍多一点,但比单模型方法要少很多。这是由于单模型方法在零推力弧段使用了与最大推力弧上相同的模型与直接配置方法,不得不划分相当多的区间,造成非线性规划问题的规模增大,因此算法的时间消耗大大增加。而双模型方法在零推力弧上使用与最大推力弧上不同的动力学模型,只需划分很少几个区间即可,从而避免了上述问题。

5 结论

本文采用了双模型直接配置法,在零推力弧上使用与最大推力弧上的不同的动力学模型进行配

置,可以包含各种摄动因素的影响,并提出了一种简易而有效的区间划分方法。算例表明,方法改善了“matched-integral”法不够精确的问题,时间消耗上比单模型的方法节省很多。今后,还需对直接配置法的误差估计和精确节点分配问题进一步讨论。

参考文献:

- [1] Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of guidance, control, and dynamics* [J]. 1998, 21 (2): 193 - 207.
- [2] Enright P J. Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using direct transcription and nonlinear programming [D]. University of Illinois, 1991.
- [3] Betts J T, Huffman W P. mesh refinement in direct transcription methods for optimal control [J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 1998, 19 (1): 1 - 21.
- [4] Enright P J, Conway B A. Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using collocation and nonlinear programming [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1991, 14 (5): 981 - 985.
- [5] Desai P N, Conway, B A. A two-timescale discretization scheme for collocation [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 119 (2): 2053 - 2063.
- [6] 孙军伟,等. 基于SQP方法的常推力月球软着陆轨道优化方法[J]. *宇航学报*, 2006, 27 (1): 99 - 103. [SUN Jun-wei, et al. Study on the optimal trajectories of lunar soft-landing with fixed-thrust using sqp method [J]. *Journal of Astronautics*, 2006, 27 (1): 99 - 103.]

作者简介:潘伟(1976-),男,博士生,讲师,研究方向为航天动力学与数学问题。

通信地址:山东大学南校区机械工程学院机电研究所(250061)

电话:13964169633

E-mail:panw@sdu.edu.cn

Optimization of Finite-Thrust Spacecraft Trajectories Using Dual-Model Direct Collocation Method

PAN Wei¹, LU Chang-hou¹, GE Pei-qi¹, FENG Wei-ming²

(1. Mechanical Engineering College, Shandong University, Jinan 250061, China;

2. School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

Abstract: The direct collocation method for solving optimal finite-thrust spacecraft trajectory problems involves the use of a discrete approximation to the original dynamics differential functions. In this paper, dynamics differential functions in Spherical coordinates are used for maximum thrust arcs, and Gaussian functions for coast arcs. A technique for changing the discretization in both kinds of arcs to improve the accuracy of the approximation is described. When compared with the standard method, the dual-model direct collocation method has the advantage of higher solution accuracy with minimal additional computational effort. A rendezvous trajectory optimization problem for a finite-thrust spacecraft is used to demonstrate the benefits of using such a method.

Key words: Finite thrust; Perturbation; Direct collocation method; Optimal trajectory