

约束条件下的 Halo 轨道转移轨道设计

李明涛^{1,2}, 郑建华¹, 于锡峰¹, 高 东¹

(1. 中国科学院空间科学与应用研究中心, 北京 100080; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘 要: 平动点任务的转移轨道往往存在约束条件, 以往的研究集中于无约束条件下的 Halo 轨道转移轨道设计, 研究约束条件下的 Halo 轨道的转移轨道设计问题。首先分析了平动点任务转移轨道的约束条件, 然后给出了一种约束条件下 Halo 轨道转移轨道设计的一般方法, 重点推导了考虑轨道高度、航迹角、轨道倾角、升交点约束的微分修正公式。然后以日地 L_1 点附近的 Halo 轨道为目标轨道, 在约束条件下设计了其转移轨道, 仿真结果验证了本文方法的有效性。

关键词: Halo 轨道; 转移轨道; 约束条件; 微分修正

中图分类号: V412.4; P13

文献标识码: A

文章编号: 1000-1328 (2009) 02-0437-05

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.00.006

0 引言

为了满足发射或返回要求, 平动点任务尤其是取样返回平动点任务的转移轨道往往存在诸多约束条件。SOHO 任务的转移轨道要求停泊轨道倾角为 28.8° ^[1]; Genesis^[2] 任务的返回轨道要求轨道倾角和升交点以及航迹角为特定值。文献 [3] 提出一种基于平动点的低成本星座发射方案设想, 该方案使用一枚运载火箭将全部卫星发射到平动点附近, 然后分不同时间返回经大气捕获减速后将卫星部署到不同的轨道平面。该方案的返回轨道对升交点、轨道倾角以及航迹角均有要求。我国“夸父计划”的 A 星轨道的转移轨道也应有一定的约束条件。因而有必要研究约束条件下的转移轨道设计问题。

以往关于 Halo 轨道转移轨道的研究主要集中于无约束条件下的 Halo 轨道的转移轨道设计^[4-7]。Howell^[2] 等人最早研究了约束条件下的 Halo 轨道转移轨道设计问题, 并将其成功应用到 Genesis 的转移轨道设计。但 Howell 等人提出的两级微分修正方法要求初始猜想足够准确, 并且需要预估转移轨道飞行时间, 同时由于该方法将转移轨道分解成由许多连接点组成的“中间段”并行优化, 需要的计算量比较大。

本文提出一种基于简单微分修正方法的约束条

件下 Halo 轨道转移轨道设计方法, 推导了考虑轨道高度、轨道倾角、升交点、航迹角约束条件的微分修正关系式。在圆型限制性三体问题模型下, 以日地 L_1 点附近的法向幅值为 120000km 的 Halo 为目标轨道, 在约束条件下设计了从停泊轨道到 Halo 轨道的转移轨道。相比 Howell 等人提出的两级微分修正方法, 本文的算法更加简单, 对初始猜想准确程度要求更低, 并且不需要预估轨道转移飞行时间。

1 圆型限制性三体问题模型

假设两个主天体 m_1 和 m_2 ($m_1 > m_2$) 绕其公共质心以角速度 ω 做圆周运动, 第三体 (飞行器) m_3 质量远远小于主天体的质量, 因而第三体不影响主天体的运动。圆型限制性三体问题研究第三体在主天体的引力作用下的运动。以系统的公共质心为原点, 定义会合坐标系。x 轴从 m_1 指向 m_2 , z 轴为 ω 方向, x 轴、y 轴、z 轴构成右手坐标系。

令主天体质量和 $m_1 + m_2 = 1$, 主天体之间的距离 $L = 1$, 系统角速度为 $\omega = 1$, 单位归一化后, 万有引力常量 $G = 1$ 。令 $m_2 = \mu$, 则会合坐标系下第三体的动力学方程如下:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -U_y \\ \ddot{z} &= -U_z \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$U = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\mu(1-\mu) \quad (2)$$

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}$$

U 仅与系统参数 μ 和第三体的位置有关, 被称为系统的有效势 (effective potential)。

圆型限制性三体问题存在五个平动点, 其中 L_1, L_2, L_3 三个共线平动点是不稳定的。共线平动点在相空间上具有中心和鞍点的双重性质, 因此在共线平动点附近不仅存在 (拟) 周期轨道, 也存在渐近趋近和离开 (拟) 周期轨道的稳定流形和不稳定流形。探测器可以通过流形无动力地趋近或离开 (拟) 周期轨道, 该动力学特性为日地平动点探测器提供了一种节能轨道转移方案。

2 约束条件下的转移轨道设计方法

2.1 转移轨道约束条件

转移轨道的端点一般都有约束条件, 比如高度、轨道倾角、升交点、航迹角等约束。其中高度、轨道倾角、升交点约束一般要求等于某个目标值; 航迹角一般要求为零, 但返回时要求卫星进入大气层时航迹角为小角度负值。

不失一般性, 下面认为约束均在转移轨道末端, 为了便于利用不变流形设计转移轨道, 假设转移轨道的始端在 Halo 轨道上。假设转移轨道的初始状态为 $[R \ V]$, 末端状态为 $[R_f \ V_f]$, 转移时间为 t , 约束为 a , 系统的状态转移阵为 $\Phi = \Phi(t, 0)$ 。保持初始位置不变, 改变初始速度 V 和时间 t 使转移轨道满足末端约束条件。本文使用微分修正方法求解初始速度和时间的改变量。

2.2 微分修正方法

微分修正方法本质上是一种迭代的打靶法, 它使用状态关系矩阵描述约束变量对控制变量摄动的敏感性, 并通过不断地调整控制变量使约束变量满足期望值。本文中控制变量为初始速度 V 和时间 t 。下面求解约束变量和控制变量的状态关系式。

由链式法则, 对于约束变量 a 有

$$\begin{aligned} \delta a &= \frac{\partial a}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a}{\partial t} \delta t \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial R_f} \frac{\partial R_f}{\partial V} + \frac{\partial a}{\partial V_f} \frac{\partial V_f}{\partial V} \right) \delta V + \left(\frac{\partial a}{\partial R_f} \frac{\partial R_f}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial V_f} \frac{\partial V_f}{\partial t} \right) \delta t \end{aligned} \quad (3)$$

由状态转移阵有

$$\begin{bmatrix} \delta R_f \\ \delta V_f \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta V \end{bmatrix} \quad (4)$$

得到

$$\begin{cases} \frac{\partial R_f}{\partial V} = B \\ \frac{\partial V_f}{\partial V} = D \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial R_f}{\partial t} = V_f \\ \frac{\partial V_f}{\partial t} = A_f \end{cases} \quad (5)$$

因此只要求出 $\frac{\partial a}{\partial R_f}$ 、 $\frac{\partial a}{\partial V_f}$ 和 (5), 代入 (3) 就得到控制变量和约束变量之间的状态关系式。

下面分别推导各约束变量对末状态的导数, 并讨论了两种积分终止条件。

(1) 高度约束

假设目标高度 (相对地心) 为 R_{des} , 取约束变量 $a_1 = |R_f| - R_{des}$, R_f 也相应转换为地心坐标。由矢量求导法则

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial R_f} &= \frac{\partial |R_f|}{\partial R_f} = \frac{R_f^T}{|R_f|} \\ \frac{\partial a_1}{\partial V_f} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(2) 轨道倾角约束

此处轨道倾角为相对地惯坐标系的轨道倾角。假设地惯坐标系的坐标轴单位矢量在 t 时刻的会合坐标系下的坐标为 X_t, Y_t, Z_t , 令 t 时刻对应一固定时间历元, 则此时 X_t, Y_t, Z_t 是常量。

取约束变量 $a_2 = \cos i - \cos i_{des}$, i_{des} 为目标轨道倾角。

$$\cos i = \frac{(R_f \times V_f) \cdot Z_t}{|R_f \times V_f|}$$

由矢量乘法法则,

$$(R_f \times V_f) \cdot Z_t = (V_f \times Z_t) \cdot R_f = (Z_t \times R_f) \cdot V_f$$

$$|R_f \times V_f| = \sqrt{|R_f|^2 |V_f|^2 - (R_f \cdot V_f)^2}$$

则由矢量求导法则

$$\frac{\partial a_2}{\partial R_f} = \frac{(V_f \times Z_t)^T}{|R_f \times V_f|} - \cos i \frac{|V_f|^2 R_f^T - (R_f \cdot V_f) V_f^T}{|R_f \times V_f|^2}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \mathcal{V}} = \frac{(Z_I \times R_f)^T}{|R_f \times V_f|} - \cos i \frac{|R_f|^2 V_f^T - (R_f \cdot V_f) R^T}{|R_f \times V_f|^2} \quad (7)$$

(3) 升交点约束

取 $a_{des} = \tan \Omega - \tan \Omega_{des}$, Ω_{des} 为目标升交点经度, 此处要规避角度象限二值问题。

$$\tan \Omega = - \frac{(R_f \times V_f) \cdot X_I}{(R_f \times V_f) \cdot Y_I}$$

由矢量乘法法则

$$(R_f \times V_f) \cdot X_I = (V_f \times X_I) \cdot R_f = (X_I \times R_f) \cdot V_f$$

$$(R_f \times V_f) \cdot Y_I = (V_f \times Y_I) \cdot R_f = (Y_I \times R_f) \cdot V_f$$

则由矢量求导法则

$$\frac{\partial a_3}{\partial \mathcal{R}_f} = - \left(\frac{(V_f \times X_I)^T}{(R_f \times V_f) \cdot Y_I} + \tan \Omega \frac{(V_f \times Y_I)^T}{(R_f \times V_f) \cdot Y_I} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial \mathcal{V}} = - \left(\frac{(X_I \times R_f)^T}{(R_f \times V_f) \cdot Y_I} + \tan \Omega \frac{(Y_I \times R_f)^T}{(R_f \times V_f) \cdot Y_I} \right)$$

(4) 航迹角约束

取 $a_4 = \sin \gamma - \sin \gamma_{des}$, γ_{des} 为目标航迹角。

$$\sin \gamma = \frac{R_f \cdot V_f}{|R_f| |V_f|}$$

则由矢量求导法则

$$\frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{R}_f} = \frac{V_f^T}{|R_f| |V_f|} - \sin \gamma \frac{R_f^T}{|R_f|^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}} = \frac{R_f^T}{|R_f| |V_f|} - \sin \gamma \frac{V_f^T}{|V_f|^2}$$

(5) 积分终止条件

讨论两种积分终止条件, 一种是积分时间固定, 另外一种为航迹角固定; 积分时间固定指的是积分至时间 t 终止, 直接修正初始速度 V 和飞行时间 t ; 航迹角固定指的是积分到目标航迹角终止, 因而积分时间不是固定的, 直接修正初始速度 V 。

(5.1) 积分时间固定:

$$\begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \\ \delta a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \mathcal{V}} & \frac{\partial a_1}{\partial t} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \mathcal{V}} & \frac{\partial a_2}{\partial t} \\ \frac{\partial a_3}{\partial \mathcal{V}} & \frac{\partial a_3}{\partial t} \\ \frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}} & \frac{\partial a_4}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V \\ \delta t \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \delta V \\ \delta t \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \delta V \\ \delta t \end{bmatrix} = M^T (MM^T)^{-1} \begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \\ \delta a_4 \end{bmatrix}$$

(5.2) 航迹角固定:

由 (9) 得到

$$\delta a_4 = \frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}} \delta V + \frac{\partial a_4}{\partial t} \delta t = 0 \Rightarrow \delta t = - \frac{\frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}}}{\frac{\partial a_4}{\partial t}} \delta V \quad (11)$$

将 (11) 代入 (3) 得到

$$\begin{aligned} \delta a &= \frac{\partial a}{\partial \mathcal{V}} \delta V + \frac{\partial a}{\partial t} \delta t = \frac{\partial a}{\partial \mathcal{V}} \delta V - \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}}}{\frac{\partial a_4}{\partial t}} \delta V \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial \mathcal{V}} - \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}}}{\frac{\partial a_4}{\partial t}} \right) \delta V \end{aligned} \quad (12)$$

因此有修正公式如下:

$$\begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \mathcal{V}} - \frac{\partial a_1}{\partial t} \frac{\frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}}}{\frac{\partial a_4}{\partial t}} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \mathcal{V}} - \frac{\partial a_2}{\partial t} \frac{\frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}}}{\frac{\partial a_4}{\partial t}} \\ \frac{\partial a_3}{\partial \mathcal{V}} - \frac{\partial a_3}{\partial t} \frac{\frac{\partial a_4}{\partial \mathcal{V}}}{\frac{\partial a_4}{\partial t}} \end{bmatrix} \delta V = M \delta V \quad (13)$$

$$\Rightarrow \delta V = M^T (MM^T)^{-1} \begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \end{bmatrix}$$

为了具有一般性, 式 (10) 和 (13) 的右半部分分别使用最小二乘策略解决约束变量和控制变量自由度不相等时的矛盾方程 (但 (10)、(13) 本身不是矛盾方程)。由于式 (13) 需要的控制变量更少, 并且不需要预估转移轨道飞行时间, 实际仿真中我们使用式 (13)。

2.3 微分修正方法的收敛性

作为一种迭代的局部优化方法, 微分修正方法依赖状态关系矩阵描述约束变量对控制变量摄动的敏感性, 状态关系矩阵的求解涉及到非线性方程在当前迭代解附近局部线性化。因而微分修正方法能否收敛到满足约束的解, 初始猜想和状态关系矩阵准确与否至关重要。

本文从初始猜想和状态关系矩阵两方面解决微分修正方法的收敛性问题。首先通过选择合适的 Halo 轨道插入点和历元时间使转移轨道在自然的情况下能够“较好”地满足各种约束条件,这里的“较好”包括各约束指标之间的妥协。其次,为了解决状态关系矩阵的准确性问题,本文在状态关系矩阵前面乘以一个系数,相当于对状态关系矩阵进行比例变换,该系数根据当前迭代解相对上次迭代解对约束条件的满足度自适应增加或减小,从而一定程度上避免了状态关系矩阵的失真。

3 仿真结果及分析

ISEE-3,SOHO 等太阳观测任务的目标轨道均为日地 L_1 点附近法向幅值约 120000km Halo 轨道,我国的“夸父计划”中 A 星的目标轨道也基本类似。因此本文以日地系 L_1 点附近法向幅值为 120000km 的北族 Halo 轨道为目标轨道,在圆型限制性三体模型下,基于本文的方法设计了约束条件下的转移轨道。

考虑到夸父 A 星为太阳观测卫星,因此假设其发射时间在下一个太阳活动峰年即 2011 到 2012 年附近。同时假设转移轨道的起点在 200km 高度的停泊轨道上(即要求轨道高度为 200km、航迹角为 0),经加速后飞向日地 L_1 点,在 Halo 轨道插入点机动后进入 Halo 轨道。

图 1 为该 Halo 轨道及其一条仅考虑轨道高度和航迹角约束条件下设计的转移轨道在会合坐标系的三维视图。该转移轨道从 200km 高度的停泊轨道出发,经过 110.5 天后卫星到达 Halo 轨道插入点,施加 31.35m/s 的机动速度后进入 Halo 轨道。

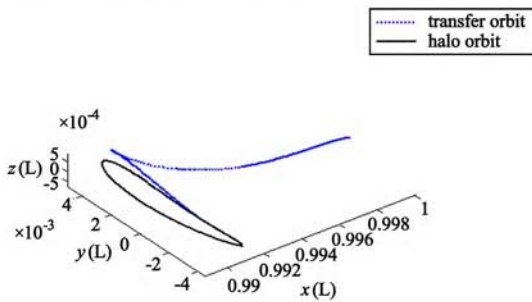


图 1 Halo 轨道及其一条转移轨道

Fig.1 Halo orbit and its transfer trajectory

图 2 给出了该转移轨道从停泊轨道出发时间以

2011 年 6 月 1 日为起点,2 年时间的轨道倾角、升交点经度的时间历程曲线。可以看出,该转移轨道的轨道倾角和升交点的变化周期都约为一年,其中轨道倾角的变化范围是 $[16.4^\circ 30.4^\circ]$,升交点经度的变化范围是 $[-17.8^\circ 17.8^\circ]$ 。

下面分别研究施加轨道倾角和升交点经度约束条件后的转移轨道设计。首先根据图 2 选取合适的时间从停泊轨道出发,此时轨道倾角、升交点经度应尽可能地接近目标值,然后使用微分修正方法改变初始速度使转移轨道的轨道倾角和升交点经度满足要求,最后调整从停泊轨道出发时间以优化所需要的机动速度。

表 1 给出了施加轨道倾角约束条件后的转移轨道设计结果,从表 1 可以看出,基于本文的算法可以设计出从任意轨道倾角的停泊轨道到目标 Halo 轨道的转移轨道。

表 2 给出了施加升交点经度约束条件后的转移轨道设计结果,从表 2 可以看出,基于本文的算法可以设计出从任意升交点经度的停泊轨道到目标 Halo 轨道的转移轨道。

表 1 考虑轨道倾角约束的转移轨道

Table 1 Transfer trajectory design with inclination constraints

轨道倾角 ($^\circ$)	机动速度 (m/s)	到达时间 (yy-mm-dd)	飞行时间 (day)
0	41.75	2011-09-21	113.2
5	38.83	2011-09-30	110.2
15	32.23	2011-11-12	111.6
30	31.34	2011-06-04	110.8
45	40.70	2011-03-23	111.4
60	56.42	2011-03-11	116.0
75	74.76	2011-03-01	116.7
90	92.72	2011-03-07	115.6

表 2 考虑升交点经度约束的转移轨道

Table 2 Transfer trajectory design with RAAN constraints

升交点经度 ($^\circ$)	机动速度 (m/s)	到达时间 (yy-mm-dd)	飞行时间 (day)
0	31.35	2011-05-10	110.5
60	39.75	2011-08-18	115.4
120	55.69	2011-09-19	122.0
180	42.55	2011-09-20	113.5
240	62.39	2011-09-20	123.2
300	39.81	2011-10-22	115.5

需要指出的是,从停泊轨道到 Halo 轨道的转移轨道不是唯一的,不同类型转移轨道需要的机动速度、转移时间并不相同,这里研究是目前大多数平动

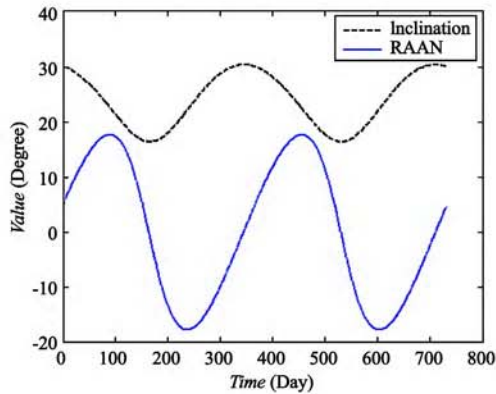


图 2 轨道倾角和升交点经度的时间历程曲线
Fig. 2 Time history of Inclination and RAAN

点任务卫星采用的、在能量上比较节省的、转移时间为 110 天左右的转移轨道。采用不同类型的转移轨道可能为设计提供更多灵活性,大幅值 Halo 轨道的转移轨道设计的灵活性也更大。

4 结论

本文给出了一种约束条件下 Halo 轨道转移轨道设计的一般方法,并以日地 L_1 点附近 $Az = 120000\text{km}$ 的 Halo 轨道为目标轨道,基于本文的方法设计了约束条件下的转移轨道。仿真结果验证本文提出的方法用于处理复杂约束条件的有效性。本文提出的方法对夸父 A 星轨道设计具有参考作用。

虽然本文以 Halo 轨道为目标轨道研究约束条件下的转移轨道设计问题,本文的方法同样适用于目标轨道为 Lissajous 轨道的转移轨道设计。

参考文献:

[1] Dunham D W, Jen S J, Robert C E, et al. Transfer trajectory design for the SOHO libration-point mission [C] // 43rd Congress of the International Astronautical Federation, Washington, DC, 1992.
[2] Howell K C, Barden B T, Wilson R S, and Lo M W. Trajectory design using a dynamical systems approach with application to Genesis [C] // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Sun Valley, Idaho, 1997.
[3] Normi Chow, Erica Gralla, James Chase, and Kasdin N J. Low earth constellation design using the earth-moon L_1 point [C] // 14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Maui, Hawaii, 2004.

[4] Gomez G, Jorba A, Masdenmont J, and Simo C. Study of the transfer from the Earth to a halo orbit around equilibrium point L_1 [J]. Celestial Mechanics, 1993, 56: 541 - 562.
[5] Franco Bernelli Zazzera, Francesco Toppoto, and Mauro Massari. Assessment of mission design utilization of libration points and weak stability boundaries [R]. ESOC Contract 18147/04/NL/MV, Final Report, 2004.
[6] Howell K C, Barden B T, and Lo M W. Application of dynamical systems theory to trajectory design for a libration point mission [J]. Journal of Astronautical Sciences, 1997, 45: 161 - 178.
[7] LI Ming-tao, ZHENG Jian-hua. The optimization of transfer trajectory for small amplitude halo orbits [J]. Measurement and Control, 2008, 41 (3): 81 - 84.
[8] Faquhar R W, Mulhonen D P, and Richardson D L. Mission design for a halo orbiter of the earth [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1977, 14 (3): 170 - 177.
[9] 郑建华, 高怀宝, 刘正常, 高东, 于锡峥. IPS 理论与技术在深空探测中的应用 [J]. 宇航学报, 2008, 29 (1): 13 - 17. [ZHENG Jian-hua, GAO Huai-bao, LIU Zheng-chang, GAO Dong, YU Xi-zheng. The application of interplanetary superhighway in deep space exploration missions [J]. Journal of Astronautics, 2008, 29 (1): 13 - 17 (in Chinese).]
[10] 周天帅, 李东, 陈新民, 杨虎军. 国外日地动平衡点卫星应用及转移轨道实现方式 [J]. 导弹航天运载技术, 2004, 272 (5): 30 - 34. [ZHOU Tian-shuai, LI Dong, CHEN Xin-min, YANG Hu-jun. Application of foreign spacecrafts of sun-earth libration points and manners of transfer trajectory [J]. Missiles and Space vehicles, 2004, 272 (5): 30 - 34 (in Chinese).]
[11] 李明涛, 郑建华, 于锡峥, 等. IPS 转移轨道设计技术 [J]. 宇航学报, 2009, 30 (1): 72 - 81. [LI Ming-tao, ZHENG Jian-hua, YU Xi-zheng, et al. On transfer trajectory design technologies of interplanetary superhighway [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30 (1): 72 - 81 (in Chinese).]

作者简介:李明涛(1982 -),男,博士生,研究方向为航天动力学与控制,平动点相关问题。
通信地址:北京市海淀区中关村南二条 1 号空间中心信息仿真室(100190)
电话:(010) 62582675
E-mail: sinoips@126.com

(下转第 509 页)