

曲率连续保凸插值四次 Bézier 曲线 及其误差分析*

柳朝阳

(郑州大学数学系 郑州 450052)

摘 要

本文讨论了用四次 Bézier 曲线实现曲率连续的保凸插值曲线的方法, 并给出了当数据点加密时的收敛阶数, 以及给定误差时插值曲线的误差分析. 给出的曲线生成方法具有局部性, 并对凸性数据的曲率没有不必要的限制.

关键词: 收敛阶数, 保凸性, 四次 Bézier 曲线, 曲率连续, 局部性, 插值曲线.

CONVEXITY PRESERVING CURVATURE CONTINUOUS QUADRANTAL BÉZIER CURVES AND THEIR ERRORS

Liu Chaoyang

(Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou, 450052)

Abstract

This paper presents methods for constructing piecewise curvature continuous quadrantal Bézier curves, with locality, convexity preservation and interpolating to data-points. The convergence and the errors of these curves for interpolating to data-points are discussed. Moreover, there is no any unnecessary constraint for curvatures with given convex data-points.

Key words: convergence, convexity preservation, quadrantal Bézier curves, curvature continuity, locality, interpolation.

§1. 引 言

Bézier 曲线是计算机辅助几何设计中最常用的一类曲线, 在计算机辅助设计技术中常用于物体外形边界的设计. 曲线的保凸性是其重要性质之一. [3] 研究实现二阶连续的五次 Bézier 保形插值参数样条曲线. [1] 用三次 Bézier 曲线实现曲率连续的保凸插值曲线, 并证明了这种保凸插值曲线具有 6 阶之高的收敛阶数, 但指出这种曲线的实现依赖于指定的端点处的曲率不能太小, 另外依据三次 Bézier 曲线端点处的曲率性质, 在一端曲率为零, 另一端

* 2003 年 7 月 28 日收到.

曲率非零时无解. 由于实际中总能遇到要求一端曲率为零, 另一端曲率非零的曲率连续保凸插值曲线, 我们尝试用四次 Bézier 曲线实现曲率连续的保凸插值曲线, 并发现这时端点处的曲率可取任何值, 消除了用三次 Bézier 曲线插值时对端点处曲率取值的限制条件.

本文第二部分给出实现曲率连续保凸插值四次 Bézier 曲线生成方法. 生成方法具有局部性, 适宜于对曲线进行交互设计. 第三部分讨论曲线的收敛性质和误差分析. 最后是对三个具体例子的分析解答.

§2. 曲率连续的四次 Bézier 插值保凸曲线

我们要解决的问题可假设为已经知道数据点列 $\{P_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, 每个数据点 P_i 处的切线方向向量 T_i , 曲率 κ_i . 给定的数据满足凸性条件具体是指:

(1) 各个数据点处的曲率 κ_i , 没有相反的符号. 为方便起见, 不妨认为所有 $\kappa_i \geq 0$.

(2) 相邻的两个数据点 P_i, P_{i+1} 及端点处的切线方向向量 T_i, T_{i+1} 具有图 1 所示的关系.

限于 $P_i P_{i+1}$ 之间的一段, 对于满足这些凸性条件的数据我们有:

引理 1. 设给定的数据满足图 1 所示的关系, 即两端点处切线的交点 C_i 存在, 且 $P_i C_i, C_i P_{i+1}$ 分别与切线方向向量 T_i, T_{i+1} 同向. 令

$$\begin{cases} b_0 = P_i, \\ b_4 = P_{i+1}, \\ b_1 = P_i + l_{i0}(C_i - P_i), & 0 \leq l_{i0} \leq 1, \\ b_3 = P_{i+1} + l_{i1}(C_i - P_{i+1}), & 0 \leq l_{i1} \leq 1, \\ b_2 = \sigma_i b_1 + \tau_i b_3 + (1 - \sigma_i - \tau_i)C_i, & 0 \leq \sigma_i, \tau_i \leq 1, \sigma_i + \tau_i \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

则在点 b_0, b_1, b_2, b_3 和 b_4 存在时, 以其为控制点生成的四次 Bézier 曲线 $P(t)$ 具有保凸插值性质, 插值两端点位置, 切线.

证明. 如果数据具有图 1 所示的关系, 则由 (2.1) 定义的点 b_0, b_1, b_2, b_3 和 b_4 构成的控制多边形是凸的. 因此相应的 Bézier 曲线 $P(t)$ 也是凸的, 其插值性质可由 Bézier 曲线端点性质得出.

进一步如果在 $\tau_i > 0$ 或 $\sigma_i > 0$ 时定义

$$R_{i0} = \frac{2 |P_i C_i|^3 \kappa_i}{3 \tau_i S_i} \text{ 或 } R_{i1} = \frac{2 |P_{i+1} C_i|^3 \kappa_{i+1}}{3 \sigma_i S_i}, \quad (2.2)$$

其中 $S_i (> 0)$ 是图 1 中 P_i, C_i 和 P_{i+1} 三点所指定三角形的面积, 则有:

定理 2. 如果 $\kappa_i = 0$ 或 $\kappa_{i+1} = 0$, 则取 $\tau_i = 0$ 或 $\sigma_i = 0$ 即可. 否则, 令引理 1 的 l_{i0}, l_{i1} 满足方程组

$$l_{i1} = 1 - R_{i0} l_{i0}^2, \quad l_{i0} = 1 - R_{i1} l_{i1}^2, \quad (2.3)$$

则引理 1 中定义的保凸曲线 $P(t)$ 插值于两端点处事先给定的位置, 切线和曲率. 并且满足

关系 (2.1) 和 (2.3) 的 l_{i0}, l_{i1} 一定存在.

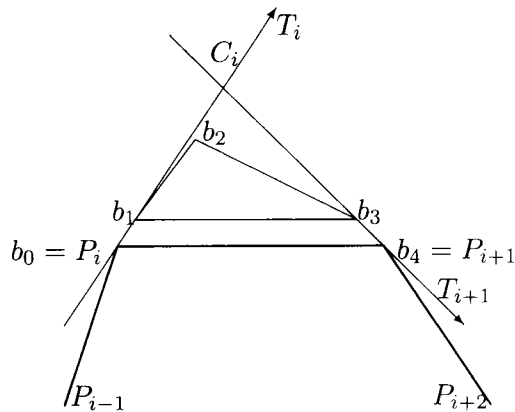


图 1 凸性数据示意图

证明. 引理 1 所给四次 Bézier 曲线 $P(t)$ 保凸, 且插值两端点处位置, 切线, 其插值两端点的曲率可证明如下:

四次 Bézier 曲线 $P(t)$ 两端点 P_i, P_{i+1} 处的曲率 κ_i, κ_{i+1} 可由其控制点分别表示为

$$\frac{3(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{4|b_1 - b_0|^3} = \kappa_i \quad \text{和} \quad \frac{3(b_2 - b_3) \times (b_3 - b_4)}{4|b_3 - b_4|^3} = \kappa_{i+1}. \quad (2.4)$$

此方程中的 κ_i, κ_{i+1} 分别与 $(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_2 - b_3) \times (b_3 - b_4)$ 符号一致. 为方便起见我们不妨认为这些值都是非负的而不影响结论的一般性.

依据 $(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)$ 的几何意义, 端点处的曲率可进一步用几何关系表示为

$$\kappa_i = \frac{3}{2} \frac{\tau_i S_i}{|P_i C_i|^3} \frac{1 - l_{i1}}{l_{i0}^2}, \quad \kappa_{i+1} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i S_i}{|P_{i+1} C_i|^3} \frac{1 - l_{i0}}{l_{i1}^2}. \quad (2.5)$$

如果 $\kappa_i = 0$ 或 $\kappa_{i+1} = 0$, 则取 $\tau_i = 0$ 或 $\sigma_i = 0$ 即可. 否则, 式 (2.5) 成立等价于

$$l_{i1} = 1 - R_{i0} l_{i0}^2, \quad \text{或} \quad / \quad \text{和} \quad l_{i0} = 1 - R_{i1} l_{i1}^2, \quad (2.6)$$

其中 R_{i0}, R_{i1} 在式 (2.2) 中定义.

正如 [1] 指出, (2.6) 有解的一个充分条件是

$$(1 - R_{i0})(1 - R_{i1}) \geq 0. \quad (2.7)$$

在指定端点处切向量和曲率 κ_i 和 κ_{i+1} 后, 可通过调节 σ_i 和 τ_i 的大小, 改变 R_{i0} 和 R_{i1} 的大小, 使得 (2.7) 成立.

给定端点切线后, 三次 Bézier 曲线的 R_{i0} 和 R_{i1} 分别仅依赖于 κ_i 和 κ_{i+1} . 为了保证 (2.7) 成立, 曲率不得不适当调整. 对于四次 Bézier 曲线, 我们只需调整 σ_i 或 τ_i 即可, 如令其足够小使得 $R_{i0} \geq 1$ 和 $R_{i1} \geq 1$ 同时成立. 不需调整曲率值 κ_i 或 κ_{i+1} , 就可使 (2.7) 成立, 由此保证 (2.6) 总有解, 于是可知结论成立.

注解 3. 满足方程 (2.1) 和 (2.3) 的 l_{i0}, l_{i1}, σ_i 和 τ_i 并不唯一, 一般情况下也没有简单的解析表达式. 如果选取 σ_i 和 τ_i 满足

$$\frac{\tau_i}{\kappa_i |P_i C_i|^3} = \frac{\sigma_i}{\kappa_{i+1} |P_{i+1} C_i|^3}, \quad (2.8)$$

并记 $\gamma_i = \sigma_i + \tau_i$, 则有

$$R_{i0} = R_{i1} \equiv R_i = \frac{2 |P_i C_i|^3 \kappa_i + |P_{i+1} C_i|^3 \kappa_{i+1}}{S_i \gamma_i} > 0 \quad (2.9)$$

和

$$0 < l_{i0} = l_{i1} \equiv l_i = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4R_i}} < 1 \quad (2.10)$$

为满足要求的解. 进一步取 $\gamma_i = \sigma_i + \tau_i = 1$, 则 b_2 位于直线段 $b_1 b_3$ 上. 这时的求解计算就比较简单了, 且这个解是唯一确定的.

§3. 曲率连续保凸插值曲线的误差分析

[1] 给出了误差收敛阶数为 $O(6)$ 的三次保凸插值曲线, 但这个三次保凸插值曲线仅对足够小的曲率有解, 且给出了当曲率为 0 时误差收敛阶数仅为 $O(4)$ 的例子. 事实上对三次 Bézier 曲线而言, 一端的零曲率对另一端的曲率是有影响的, 因此对给定的曲率就可能不存在曲率连续的插值曲线, 而应用四次 Bézier 曲线就总有结果 (参考下节的例 7).

关于四次 Bézier 保凸插值曲线的收敛阶数, 我们有:

定理 4. 如果 $y = f(x)$ 是曲率连续的凸曲线, 并且

$$h \equiv \sup_i |x_{i+1} - x_i| \quad (3.1)$$

充分小, 则对数据点列

$$P_i \equiv (x_i, f_i \equiv f(x_i)),$$

按前一节方法对每对相邻点之间进行插值求得的曲率连续插值曲线 $P(t)$ 一般地有

$$\text{dist}(f, P(t)) = O(h^6).$$

大多数情况下 $\text{dist}(f, P(t)) = O(h^7)$ 对适当选取的 $P(t)$ 成立.

[2] 对这一类问题有一个一般性的结果, 并包括 定理 4 作为特例. 我们略去这个定理的证明.

上述近似误差的分析依赖于数据点任意加密的极限过程 $h \rightarrow 0$. 实际实现时针对的是一个具体的 h . 下面就对具体的 h , 给出其具体的近似误差.

假设由数据点列 $\{P_i, i = 0, \dots, n\}$ 形成的折线段对原始曲线 Γ , 有一个最大误差 $\varepsilon > 0$. 即

$$\text{dist}\{P_i P_{i+1}, \Gamma\} \leq \varepsilon, \forall i = 0, \dots, n, \quad (3.2)$$

则有:

定理 5. (a). 不等式

$$\text{dist}\{P(t), \Gamma\} \leq 2\varepsilon \quad (3.3)$$

对每一个由定理 2 确定的 $P(t)$ 成立, 如果各数据点处的曲率 $\{\kappa_i\}$ 满足

$$\kappa_i \geq \max\{\kappa_{(i-1)1}, \kappa_{i0}\}, \quad (3.4)$$

而 κ_{i0}, κ_{i1} 为

$$\begin{cases} \kappa_{i0} = \max\left\{0, \frac{21}{512} \frac{(7d_i - 8\varepsilon)d_i^2 |P_i P_{i+1}|}{|P_i C_i|^3 \varepsilon^2}\right\}, \\ \kappa_{i1} = \max\left\{0, \frac{21}{512} \frac{(7d_i - 8\varepsilon)d_i^2 |P_i P_{i+1}|}{|P_{i+1} C_i|^3 \varepsilon^2}\right\}. \end{cases} \quad (3.5)$$

(3.5) 中 d_i 为

$$d_i = \text{dist}(C_i, P_i P_{i+1}) = \frac{|P_i C_i \times P_i P_{i+1}|}{|P_i P_{i+1}|} \quad (3.6)$$

是点 C_i 到直线 $P_i P_{i+1}$ 的距离.

(b). 如果多边形 $\{P_i\}$ 保持 Γ 的凸性, 则 (3.3) 可修改为

$$\text{dist}\{P(t), \Gamma\} \leq \varepsilon. \quad (3.7)$$

证明. 如图 1 所示, 可以给出满足 (2.8)–(2.10) 的特定解答, 并沿用那里的符号. 为简单计, 假设 $P_i = (0, 0)$, $P_i P_{i+1}$ 重合于 X -轴, 则有

$$\text{dist}(P_i(t), P_i P_{i+1}) = |y_i(t)| \quad \text{和} \quad \text{dist}(b_j, P_i P_{i+1}) = |y_j|. \quad (3.8)$$

这里需要说明的是 $P_i(t)$ 为 P_i, P_{i+1} 两点间的插值曲线段, 所有 $P_i(t)$ 一起组成 $P(t)$. 对作为四次 Bézier 曲线 y -坐标分量的 $y_i(t)$, 进一步有

$$\begin{aligned} \text{dist}(P_i(t), P_i P_{i+1}) = |y_i(t)| &\leq \left(\frac{1}{2}l_i + \frac{3\gamma_i}{8}l_i + \frac{3(1-\gamma_i)}{8}\right)d_i \\ &= \frac{7}{8}l_i d_i, \quad \text{如果 } \gamma_i = 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

结合 (2.10) 可以看出

$$\frac{7}{8}l_i d_i = \frac{7}{4(1 + \sqrt{1 + 4R_i})} d_i \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

等价于

$$|P_i C_i|^3 \kappa_i + |P_{i+1} C_i|^3 \kappa_{i+1} \geq \frac{21}{128} \frac{(7d_i - 8\varepsilon)d_i^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{2} |P_i P_{i+1}|. \quad (3.11)$$

依据 (3.4) 和 (3.5), 不等式 (3.10), (3.9) 成立. 于是由 (3.9) 可得

$$\text{dist}(P_i(t), \Gamma) \leq \text{dist}(P_i(t), P_i P_{i+1}) + \text{dist}(P_i P_{i+1}, \Gamma) \leq 2\varepsilon \quad (3.12)$$

对所有 i 成立, 因此有

$$\text{dist}(P(t), \Gamma) \leq \max_i \{\text{dist}(P_i(t), \Gamma)\} \leq 2\varepsilon. \quad (3.13)$$

如果 (b) 中条件满足, $P(t)$ 和 Γ 总是位于控制多边形的同一侧, 因此

$$\text{dist}(P(t), \Gamma) \leq \max_i \{ \text{dist}(P(t), P_i P_{i+1}), \text{dist}(P_i P_{i+1}, \Gamma) \} \leq \varepsilon. \quad (3.14)$$

§4. 数据实例

本节给出例子说明上述结果的具体应用.

例 6. 表 1 给出的是半径为 1 的圆弧曲线的插值误差. 当插值点数 n 增大时, 误差以定理 4 分析出的阶数减少. [1] 的三次 Bézier 曲线误差减少的阶数是 $O(6)$, 四次曲线是 $O(7)$.

表 1 插值于圆弧的三次, 四次 Bézier 曲线误差

点数		4	8	16	32
误差	三次	0.19E-0	0.26E-2	0.29E-4	0.45E-6
	四次	0.26E-2	0.14E-4	0.60E-7	0.20E-9
收敛阶	三次		-6.07	-6.04	-6.03
	四次		-7.75	-7.71	-7.80

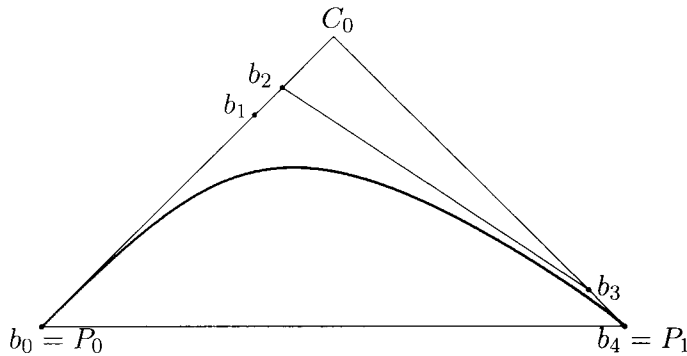


图 2 例 7 的保凸插值曲线

例 7. 如图 2 所示, 设有数据点 $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (2, 0)$, 切向量 $T_0 = (1, 1)$, $T_1 = (1, -1)$ 以及选定的曲率 $\kappa_0 = 0$ 和 $\kappa_1 = -6$, 则不存在凸的三次 Bézier 插值曲线满足给定的条件, 但有凸的四次 Bézier 插值曲线满足给定的条件. 各相关参数的取值为

$$l_0 = \frac{3}{4}, \quad l_1 = \frac{1}{8}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau = 0. \quad (4.1)$$

相应的 Bézier 点为

$$b_0 = (0, 0), \quad b_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad b_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right), \quad b_3 = \left(\frac{15}{8}, \frac{1}{8}\right), \quad b_4 = (2, 0). \quad (4.2)$$

相应的四次 Bézier 保凸插值曲线显示在图 2 中.

例 8. 对下式定义的凸函数曲线 f

$$f(x) = \left(x, \frac{x^4}{4}\right), \quad (4.3)$$

其曲率函数为 $k(x) = \frac{3x^2}{(1+x^6)^{\frac{3}{2}}}$, 并在 $x=0$ 时曲率为零. f 用分段三次 Bézier 曲线拟合时近似的阶数在 $f(0)$ 附近降为 $O(4)$. 定义四次 Bézier 曲线时, 依据函数的对称性, 可要求 $\sigma = \tau$. 在取 $\sigma = \tau = 1/2$ 时, 所需的 Bézier 点可按如下公式给出:

$$b_0 = P_0 = f(-h) = (-h, \frac{h^4}{4}), \quad b_4 = P_1 = f(h) = (h, \frac{h^4}{4}), \quad (4.4)$$

$$l_0 = l_1 = l = \frac{\sqrt{17}-1}{8}, \quad \sigma = \tau = \frac{1}{2}, \quad C = (0, -\frac{3h^4}{4}), \quad (4.5)$$

以及依据 (2.1) 得点 b_1, b_2, b_3 为

$$\begin{cases} b_1 = P_0 + l_0(C - P_0) = (-\frac{9-\sqrt{17}}{8}h, -\frac{\sqrt{17}-3}{16}h^4), \\ b_3 = P_1 + l_1(C - P_1) = (\frac{9-\sqrt{17}}{8}h, -\frac{\sqrt{17}-3}{16}h^4), \\ b_2 = \sigma b_1 + \tau b_3 + (1-\sigma-\tau)C = (0, -\frac{\sqrt{17}-3}{16}h^4). \end{cases} \quad (4.6)$$

这个从 $x = -h$ 到 $x = h$ 间的曲线段 f 可以由四次 Bézier 曲线精确表达, 相应的 Bézier 点由 $l_0 = l_1 = 1/2, \sigma = \tau = 1$ 给出.

参 考 文 献

- [1] de Boor, C., K. Höllig, & M. Sabin(1987), High Accuracy Geometric Hermit Interpolation. CAGD, 4. 268-278.
- [2] Degen. W.L.F.(1995), High Accuracy Approximation of Parametric Curves, in Mathematical Methods for Curves and Surfaces, Dehlen, T. Lyche, and L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville & London.
- [3] 方遼, 孙星明, 保形五次插值参数样条曲线, 数值计算与计算机应用, 23:1(2002) 24-30.
- [4] Liu. C., Theory and Application of Convex Curves and Surfaces in CAGD, Ph.D. Thesis, University of Twente, (2001).
- [5] Liu. C. and C.R.Traas, On Convexity of Planar Curves and Its Application in CAGD. CAGD, 14:7 (1997) 653-670.
- [6] 刘鼎元, 平面 Bézier 曲线的凸性定理, 数学年刊, 3:1 (1980) 45-55.