# 求解任意样本集的综合鉴别函数的两步伪逆法*

陈自宽
(南开大学现代化学研究所)

# FINDING THE SDF FOR ANY SAMPLE SET BY MEANS OF TWO-STEP PSEUDOINVERSE

Chen Zikuan
*(Institute of Modern Optics, Nankai University)*

**Abstract**

The first step pseudoinverse is to find the optimal solution for the underdeterministic linear equations related to a sample set with the constraint of least-mean-square criterion. The second step pseudoinverse is to find the pseudoinverse of the correlation matrix of the sample set. Finally, the expression of the optimal SDF for any sample set is obtained, which is regardless of whether the set is linearly dependent or not. The two-step psudoinverse approach presented in this paper is powerful when a sample set is linearly dependent. An example by fingerprint identification is given, and the discriminant performance of the resultant SDF by the two-step pseudoinverse approach is compared with that by Gram–Schmidt orthogonalizaion for the same sample set. The reason why the former gets better performance is discussed.

## 一、引　言

如果现实中待识别的目标不是确定的(deterministic)，而是受各种畸变因素的干扰，如遮挡、污渍、旋转、形状变化等，并且这些干扰因素是随机的，那么，可采用综合鉴别函数(SDF: Synthetic Discriminant Function)方法或线性映射方法[2]对这种目标作畸变不变性识别[1,2]，SDF对各种可能的畸变因素的计入是通过样本集的训练来实现的．求解SDF的过程是从数学上找到一个线性算子，它把训练样本集的线性映射为一

* 1993年12月13日收到．

常数，对线性映射加上一些约束条件，就得到满足各种要求的综合鉴别函数[2,3]．一旦找到了满足这些条件的线性算子，并把它做成空间滤波器，就能建立实时的光学模式识别系统．多个 SDF 在多通道的光学滤波系统就能实现把目标线性映射为一组不变的数值[4]．

把一个图象样本看作一个图象矢量，其维数就是图象的象素数目，这个数目是非常大的，如一幅 $512\times 512$ 的图象，其图象矢量的维数达 262144．实际情况下，训练阶段所选 用的图象样本集的个数总是远远小于图象矢量的维数，对样本集的线性映射都是数学上求解欠定方程组的问题，求的解是最小二乘意义下的最优解，并用矩阵伪逆来表示其解[2,5]．在各种约束条件下求得的最优解即为样本集的综合鉴别函数，但它们的解都要求所用的训练样本集是线性非相关的[1－4]．如果图象样本集是线性相关的，样本集相关矩阵的逆不存在，因此，这种方法就无法进行下去．但实际情况下采集的样本集，经常可能碰到某些样本之间是线性相关的，特别是，如果在相同的条件下采集的两个样本相同，那么所得的样本集就一定是线性相关的．虽然用现有的方法不能从该样本集求得严格的综合滤波器，但该样本集的最优综合鉴别函数是存在的．解决这一困难的一种方法是对样本集进行 Gram–Schmidt 正交化消相关处理．能否不管所用的样本集是否存在相关性，都能求得其最优的综合鉴别函数呢？本文提出的两步伪逆方法就能完满解决此问题．

## 二、基 本 理 论

(一) 综合鉴别函数

为数学表述简单，以等相关峰条件(ECP：Equal Correlation Peak)的综合鉴别函数为例说明本文提出的两步伪逆方法．

选取目标的一些可能出现的状态作为样本集，记为$\{X_i,\ i=1,2,\cdots M\}$，每个样本都视为维数与图象象元数相同的一个列矢量，可将它们按行排成样本集矩阵 $W=[X_1,X_2,\cdots,X_M]_T$，其大小为 $NXM$．对于等相关峰(ECP)条件，综合鉴别函数$h$ 要实现把样本集中的每个样本都映射为一不变的常数 $c$，即满足

$$X_i h=c,\ i=1,2,\cdots,M. \tag{1a}$$

矩阵表示为

$$Wh=C \tag{1b}$$

其中，$C$ 是分量均为常数 $c$ 的 $M$ 维常矢量，即 $C^T=(c,c,\cdots,c)$．

在模式识别的训练过程中，所选取的样本数目 $M$ 总是远小于样本矢量的维数 $N$ 的，即 $M\ll N$．因此，线性映射方程组(1b)是欠定的．虽然 $W^{-1}$ 是不存在的，但由(1b)能求的该线性映射在最小二乘意义下的最优逼近解，$h=W^+C$，其中，$W^+$ 是 $W$ 的伪逆．

把综合鉴别函数 $h$ 视为由样本集 $W$ 线性组合而成，即 $h$ 可表示为

$$h=\sum_{i=1}^{M}a_i X_i=W^T A. \tag{2}$$

其中，$A^T=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_M)$是待求的组合系数矢量．

把(2)代入(1b)得

$$Wh = WW^TA = C,$$
$$A = (WW^T)^{-1}C,$$

于是

$$h = W^T(WW^T)^{-1}C. \tag{3a}$$

可以证明[2]，上式确定的综合鉴别函数 $h$ 是欠定方程组(1b)在最小二乘意义下的最小范数解，把样本矩阵 $W$ 的伪逆记为 $W^+ = W^T(WW^T)^{-1}$，则综合鉴别函数 $h$ 表示为

$$h = W^+C. \tag{3b}$$

一个欠定方程组的唯一的最小范数解具有方差变化最小的性质，这一性质在模式识别的畸变不变性识别中是极为有用的[2]. 因此，在最小二乘意义下，通过伪逆的形式得到了样本集的综合鉴别函数(3)，这是第一步伪逆的结果.

样本集的相关矩阵为 $(WW^T)^{-1}$. 由(3a)可看出，只有 $(WW^T)^{-1}$ 存在，即要求样本集是线性无关的，才可能由(3a)求得 $h$. 对具有线性相关性的样本集，用这种方法是不能得到结果的. 然而，在实际情况下，从现实中选取样本集经常都可能是线性相关的，但最优的综合鉴别函数总是存在的. 因此，不能因为样本存在线性相关性就不能解决实际问题. 解决这种困难的方法是对样本集进行消相关处理. 如采用 Gram–Schmidt 正交化方法，这种方法会因为样本之间存在线性相关性而丢弃一些样本，正交化的顺序不同则丢弃的样本也不同. 对结果会造成影响，所得的结果不唯一. 如果把 $WW^T$ 看作一个线性变换矩阵 $B$，就可以进一步在最二乘意义下得到该矩阵的伪逆 $B^+$，以此代替 $B^{-1}$，就能不经 Gram–Schmidt 正交化处理而直接求得样本集的最优综合鉴别函数. 求降秩矩阵 $B$ 的伪逆方法采用矩阵的奇异值分解的方法[5]. 这就是本文提出的第二步伪逆，它自动完成了样本集的消相关处理，不丢弃样本集中的任何样本.

(二) 用奇异值分解 SVD (Singular Value Decomposition)求矩阵伪逆

**定理 1**[5]. 设 $B \in C^{M\times N}$, $\mathrm{rank}(B) = r$，则可以得到如下的分解:

$$B = U\Sigma V^T = U \begin{vmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} V^T, \tag{4}$$

其中 $U$ 为 $M\times M$ 的正交矩阵，$V$ 为 $N\times N$ 的正交矩阵，$\Sigma$ 是 $M\times N$ 的对角矩阵

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r, 0, \cdots, 0),$$
$$S = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r),$$

$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r > 0$，称为矩阵 $B$ 的奇异值.

**定理 2**[5]. 设 $B \in C^{M\times N}$, $\mathrm{rank}(B) = r$, $B$ 已按定理 1 进行(4)的奇异值分解，则

$$x = B^+b = V\Sigma^+U^Tb = V \begin{vmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} U^Tb, \tag{5}$$

其中 $\Sigma^+$ 是 $\Sigma$ 在最小二乘意义下的伪逆，

$$\Sigma^+ = \mathrm{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \cdots, 1/\sigma_r, 0, \cdots, 0),$$
$$S^{-1} = \mathrm{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \cdots, 1/\sigma_r).$$

式(5)给出线性映射 $Bx = b$ 在最小二乘意义下的最小范数的唯一解.

在实际情况下，样本集的相关矩阵 $B$ 是 $M\times M$ 的对称矩阵，而样本矩阵 $W$ 是 $N\times M$ 的不对称矩阵，$N$ 是样本矢量的维数，$M$ 是样本的个数，$N\gg M$ 总是满足的. 因此，求矩阵 $B$ 的奇异值分解在微机上也能进行，这比直接对矩阵 $W$ 进行分解容易得多.

由于 $B$ 是对称矩阵，所以 $V=U$. 降秩对称矩阵的逆不存在，但通过上述的奇异值分解可以求得其伪逆. 伪逆是矩阵逆的推广，当矩阵 $B$ 的逆存在时，用 SVD 所得到的伪逆即蜕化为通常意义下的逆，即 $B^{+}=B^{-1}$. 因此，完全可以用矩阵的伪逆 $B^{+}$ 来代替矩阵的逆 $B^{-1}$，而不管样本集是否线性相关，所得的结果总是最优的.

采用如上的两步伪逆方法，样本集的综合鉴别函数可以统一表示为

$$h=W_TB^{+}C=W_TV\begin{vmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}V^TC. \tag{6}$$

样本集的线性相关性越大，其 SVD 得到的对角矩阵 $\Sigma$ 的对角线上的零元素越多. 如果样本集是线性无关的，对角矩阵 $\Sigma$ 上的对角元素全不为零. 因此，奇异值分解自动地进行了消相关处理.

由(6)求样本集的综合鉴别函数，它对任意选择的样本集都适用. 不管样本集的大小如何，不管样本是否存在线性相关性，不论样本集的线性相关程度如何，由(6)总能找到样本集的最优鉴别函数. 根据(6)所编写的程序具有通用性.

第一步伪逆方法得到综合鉴别函数的结果为(3)，第二步伪逆方法得到的结果为(6)，(6)是(3)的推广，可对任意的样本集求得最优的综合鉴别函数. (3)只适应于线性非相关的样本集.

## 三、例　　子

在指纹的实时鉴别中，需要把输入的指纹同指定的指纹进行匹配，确定是否匹配. 由于同一手指多次捺印得到的指纹图象不完全相同，会因光强不均匀、形状畸变、纹线污渍、旋转等因素的影响而时时变化. 但它们都是同一手指的指纹图象，要求识别系统把它们视为同一指纹，这就是典型的畸变不变性识别. 由于同一手指多次捺印得到的指纹图象的样本差别不大，所得的样本集包含着很大的冗余信息，它们之间是高度线性相关的. 因此，求这种具有相关性的样本集的综合鉴别函数必须进行消相关处理. 采用本文提出的两步伪逆方法，可以不管样本集的相关性，这是因为奇异值分解自动进行了消相关处理.

我们对同一手指多次捺印情况下，得到 10 个的指纹图象，每个指纹图象的大小取为 $300\times 300$，以这 10 个指纹图象作为样本集，即样本集的大小 $M=10$. 其样本相关矩阵 $B$ 是 $10\times 10$ 的对称矩阵，将 $B$ 按(4)作 SVD 处理，得到的对角矩阵 $\Sigma$ 为(只保留小数点后一位数字)

$$\Sigma=\mathrm{diag}\,(80129.1,30128.0,5675.8,1007.9,98.7,3.4,2.3,0.1,0.0,0.0).$$

由于计算时各种舍入误差的影响，使对角矩阵 $\Sigma$ 的对角元素不准确为零. 在计算中

要把数值很小的对角元视为零，以减小这种误差的影响[5]. 可把所得的对角矩阵 $\Sigma$ 取为如下的形式:

$$\Sigma = \mathrm{diag}\,(80129.1, 30128.0, 5675.8, 1007.9, 98.7, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0).$$

该对角矩阵只有 5 个对角元不为零，因此说明样本集中只有 5 个样本图象是线性无关的，该样本集是线性相关的.

由(6)就能对所选的 10 个样本组成的样本集在微机上求得综合鉴别函数 $h$. 另一方面，为了同 Gram–Schmidt 正交化消相关处理求得的综合鉴别函数的识别性能进行对比，我们从 10 个样本中用 Gram–Schmidt 正交化处理得到的 5 个线性非相关的图象，并求出其相应的综合鉴别函数 $h'$. 在识别过程中，两种方法的综合鉴别函数的性能比较列于表 1.

**表1 两种综合鉴别函数的鉴别性能的比较**

| 输入指纹图象编号 | 所属类(已知) | 现有方法作出的决策 | 本文作出的决策 |
|---|---|---|---|
| 1 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 2 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 3 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 4 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 5 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 6 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 7 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 8 | $A$ | $\overline{A}$ | $A$ |
| 9 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 10 | $A$ | $A$ | $A$ |
| 11 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 12 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 13 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 14 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 15 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 16 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 17 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $A$ |
| 18 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 19 | $\overline{A}$ | $A$ | $\overline{A}$ |
| 20 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 21 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 22 | $\overline{A}$ | $A$ | $\overline{A}$ |
| 23 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |
| 24 | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}$ |

在所用的测试图象中，编号1 — 10 是指定的参考手指 $A$ 多次捺印获取的指纹图象，为同类样本；编号 11 — 24 是从其它 8 个手指捺印获得的指纹图象(每个手指取三个图象)，为不同类样本. 第三，四栏分别是用现有方法和本文提出的改进方法得到的测试结果，$\overline{A}$ 表示非 $A$.

从表 1 中的结果可以看到，同用 Gram–Schmidt 正交化方法求得的综合鉴别函数

$h'$相比较，用两步伪逆方法求的综合鉴别函数 $h$ 具有较好的识别性能．其原因是，我们在对具有线性相关性的样本集 Gram–Schmidt 正交化处理过程中，只选了其中线性不相关的样本，而丢弃了其余的样本，认为所丢弃的样本只含有冗余信息，对综合鉴别函数无贡献．由于从实际情况获得的样本都是有用的，因此我们认为，用 Gram–Schmidt 正交化处理丢弃一些样本对结果会有或多或少的影响．由于从具有相关性的样本集中选取非相关样本的选择方法很多，所得的结果会因选择样本的不同而不同，因此，这种消相关方法处理得到的结果是不唯一的．而用 SVD 进行消相关处理是把样本集中的所有样本考虑到了，并没有厚此薄彼地把其中的某些样本丢弃，因此，这种消相关方法具有较好的识别性能，对所用的样本集得到的结果是唯一的．

## 四、结　论

采用两步伪逆方法求解综合鉴别函数，解决了因样本集具有线性相关性而不能用现有的伪逆方法直接求解的困难．对任意选取的样本集，不论其是否存在相关性，都可用本文提出的两步伪逆方法求得在最小二乘意义下的最优综合鉴别函数．同对样本集的 Gram–Schmidt 正交化处理相比，两步伪逆方法采用矩阵的奇异值分解自动地进行了消相关处理，所得的结果具有较好的识别性能，其原因是用奇异值分解消相关没有丢弃样本集中的任何样本．特别是，在样本集线性无关是，两步伪逆法就自动蜕化为通常的方法．

## 参　考　文　献


[1] D. Casasent, W. T. Cheng, Correlation synthetic discriminant function, Appl. Opt., Vol.25, (1986) 2343 — 2350.

[2] Q. Tian, Y. Fainman, Z. H. Gu, Sing H. Lee, Comparison of statistical pattern-recognition algorithms for hybrid processing, I Linear-mapping algorithm, J. Opt. Soc. Am. A, Vol.5, No.10, 1655 — 1669 (Oct.) 1988.

[3] B. V. K. Vijaya Kumar, Abhijit Mahalanobis Sewoong Song, S. R. F. Sims, James F. Epperson, Mininum squared error synthetic discriminant function, Opt. Eng. 31 (5), 915 — 922, May, 1992.

[4] Mu Guo–Guang, Cheng Lu, Yin Shi–Zhuo, Hybrid 3–D target recognition system based on serial-code-filters, Proc. of Annual Meeting of OSA, Boston, 1990.

[5] Gilbert Strang, Linear Algebra and Its Applications, Academic Press, New York, 1976.