

散乱空间数据的 G^1 和 G^2 插值*

姜 寿 山

(西北工业大学)

G^1 AND G^2 INTERPOLATIONS TO 3D SCATTERED DATA

Jiang Shou-shan

(Northwestern Polytechnic University)

Abstract

A method for constructing piecewise surface interpolation to 3D scattered data (x_i, y_i, z_i) with G^1 and G^2 continuities is presented. This kind of surface has evident geometric meaning and is easy to be adjusted. An example is given.

§1 引 言

构造散乱空间数据 (x_i, y_i, z_i) 上的插值曲面问题在计算机辅助几何设计、地质勘探和气象等方面都有重要的实用意义。目前,解决这类问题的常用方法是在平面上对 (x_i, y_i) 作三角化网格,在每个三角形上定义分片插值曲面,相邻三角曲面片之间具有一定的连续阶。另一种方法是对给定的 (x_i, y_i, z_i) 建立空间局部坐标系,在各局部坐标系中构造插值曲面片,然后通过填充的方法构造整体光滑插值曲面。在空间三角网格上构造参数形式的三角曲面片是近年来较受重视的曲面构造方法。由于它的几何意义明显,便于调节,比其它方法较为方便,因而具有很大的实用价值。鉴于工程实际问题的需要,一般只须考虑切面连续和法曲率连续的曲面,即我们称为 G^1 和 G^2 的连续曲面。本文提出一种在散乱空间数据 (x_i, y_i, z_i) 上构造 G^1 和 G^2 插值曲面的方法,计算实例表明这种方法是可行的。

§2 空间三角网格及顶点法矢估计

建立空间三角网格不属于本文主要内容,故不详述。假设对于给定的散乱数据 (x_i, y_i, z_i) 已经建立了空间三角网格 $\{\Delta_i\}$, 空间三角形 Δ_i 的三个顶点为 p_i, p_j 和 p_k , 简记

* 1986年9月19日收到。

为 (i, j, k) . Δ_d 朝外的单位法矢记为 n_d , 面积 S_d . 用以下公式进行数值估计插值曲面在 p_i 处的单位法矢 n_{p_i} , 即

$$n_{p_i} = \sum_{(i,j,k)} \frac{n_{\Delta}}{S_{\Delta}} / \left| \sum_{(i,j,k)} \frac{n_{\Delta}}{S_{\Delta}} \right|. \quad (2-1)$$

该式是作者在实践中得出的一种估计式, 与一般的数值方法比较, 该方法具有计算量小, 精度高的优点.

设空间三角形 Δ_d 和 Δ_m 相邻, 公共边为 l_{jk} , 如图 1 所示. 矢量

$$n_{jk} = n_d + n_m \quad (2-2)$$

是夹在 n_d 和 n_m 中间的一个矢量. 记 $l_{jk} = p_j - p_k$, 作平面 π_{jk} :

$$n_{jk} \times l_{jk} \cdot (r - p_j) = 0. \quad (2-3)$$

显然平面(2-3)通过公共边 l_{jk} . 在 Δ_d 的其它二边 l_{ij} 和 l_{ki} 上用类似方法处理, 可得两平面 π_{ij} 和 π_{ki} . 这三个平面将作为在 Δ_d 上定义的内插值曲面 S_{ijk} 的三条边界曲线所在的平面, 即为 S_{ijk} 与其它三个相邻曲面拼接时的界面, 称这三个平面为边界连接面. 如果 Δ_d 是边界三角形 (即有一个或两个边不与其它三角形共边), 则在边界边上不须确定边界连接面, 而根据具体的实际情况给出边界条件.

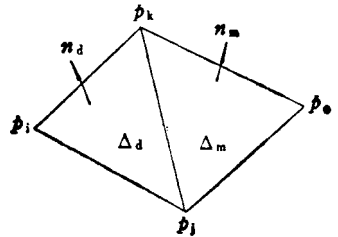


图 1

§ 3 构造 G^1 插值曲面

插值曲面采用重心坐标作为参数: $u + v + w = 1, 0 \leq u, v, w \leq 1$. 图 2 为任一空间三角形, 为了直观起见记为 $\triangle ABC$. 规定顶点以反时针方向排列, 各参数变化及边界线情况如图 2 所示.

在 § 2 中已给出 $\triangle ABC$ 的三个边界连接面, 三顶点处法矢已知, 因此三条边界曲线在两端点处切矢方向已知, 图 2 中 A_w, B_w, B_u, C_u, C_v 和 A_v 为单位矢量. 作三条边界曲线:

$$\begin{aligned} r_{AB}(w) &= \phi_0(w)A + \phi_1(w)B + \lambda_1\phi_0(w)A_w + \lambda_1\phi_1(w)B_w, \\ r_{BC}(u) &= \phi_0(u)B + \phi_1(u)C + \xi_1\phi_0(u)B_u + \xi_2\phi_1(u)C_u, \end{aligned} \quad (3-1)$$

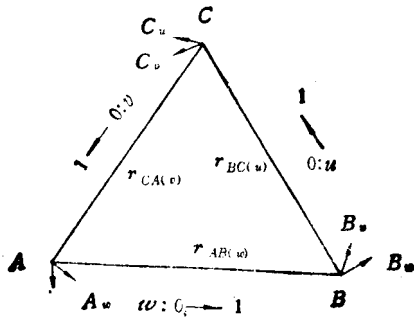


图 2

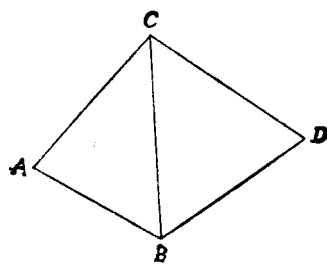


图 3

$$\mathbf{r}_{CA}(v) = \phi_0(v)\mathbf{C} + \phi_1(v)\mathbf{A} + \mu_1\phi_0(v)\mathbf{C}_v + \mu_2\phi_1(v)\mathbf{A}_v,$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= (t-1)^2(2t+1), & \phi_1(t) &= t^2(3-2t), \\ \psi_0(t) &= t(t-1)^2, & \psi_1(t) &= t^2(t-1). \end{aligned} \quad (3-2)$$

再作

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{AB}(w) = (1-w)\mathbf{n}_A + w\mathbf{n}_B, \\ \mathbf{n}_{BC}(u) = (1-u)\mathbf{n}_B + u\mathbf{n}_C, \\ \mathbf{n}_{CA}(v) = (1-v)\mathbf{n}_C + v\mathbf{n}_A. \end{cases} \quad (3-3)$$

令

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 = \beta_{AB}(w) \cdot \mathbf{n}_{AB} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{AB}}{\partial w} \\ \mathbf{S}_2 = \beta_{BC}(u) \cdot \mathbf{n}_{BC} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{BC}}{\partial u} \\ \mathbf{S}_3 = \beta_{CA}(v) \cdot \mathbf{n}_{CA} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{CA}}{\partial v} \end{cases} \quad (3-4)$$

其中 β_{AB} , β_{BC} 和 $\beta_{CA} > 0$. 作以下曲面

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{AB} = \mathbf{r}_{AB}(w) + u \cdot \mathbf{S}_1(w), \\ \mathbf{S}_{BC} = \mathbf{r}_{BC}(u) + v \cdot \mathbf{S}_2(u), \\ \mathbf{S}_{CA} = \mathbf{r}_{CA}(v) + w \cdot \mathbf{S}_3(v). \end{cases} \quad (3-5)$$

记

$$D = u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2, \quad (3-6)$$

则以下曲面就是我们所要作的插值曲面,

$$\mathbf{S}_{ABC} = \frac{v^2w^2}{D} \mathbf{S}_{AB} + \frac{u^2w^2}{D} \mathbf{S}_{BC} + \frac{u^2v^2}{D} \mathbf{S}_{CA}. \quad (3-7)$$

曲面(3-7)的三条边界曲线 \mathbf{r}_{AB} , \mathbf{r}_{BC} 和 \mathbf{r}_{CA} 为三次参数曲线,根据三次参数段端点切矢长度和曲线形状的关系,为了使边界曲线光滑,一般取

$$\lambda_1, \lambda_2 \leq \frac{3}{2} l_{AB}, \quad \xi_1, \xi_2 \leq \frac{3}{2} l_{BC}, \quad \mu_1, \mu_2 \leq \frac{3}{2} l_{CA}.$$

$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 相邻,如图3所示,在 BC 边的边界连接面上只要两片曲面的边界线在 B 和 C 两顶点处切矢长度和方向一致,则有共同的边界线,并且在边界线上每点处有相同的切平面,即具有 G^1 连续性.

如果 $\triangle ABC$ 的 BC 边是边界边,则沿 BC 的边界曲线要根据具体情况来定;如果它与其它类型的曲面片拼接,则由其它曲面片可以确定出边界线及切面,如果不与其它曲面片拼接,则可自由选取边界条件.为了简单起见,一般选取 $\beta_{AB} = \beta_{BC} = \beta_{CA} = 1$.

用这种方法来逼近单位球,具有较高的精度.

§4 构造 G^2 插值曲面

文献[1]给出了两片曲面 G^2 拼接的条件,如图4所示,两块曲面为 $\mathbf{r}(u, v)$ 和 $\mathbf{S}(x, y)$.

r 和 S 有共同的边界曲线

$$r(\nu, 1) = S(0, y) \tag{4-1}$$

r 和 S 为 G^1 拼接的条件是

$$S_x(0, y) = p \cdot r_u(\nu, 1) + q \cdot r_\nu(\nu, 1). \tag{4-2}$$

r 和 S 为 G^2 拼接的条件是

$$\begin{aligned} S_{xx}(0, y) &= p^2 \cdot r_{uu}(\nu, 1) + 2pq r_{u\nu}(\nu, 1) + q^2 r_{\nu\nu}(\nu, 1) \\ &+ R \cdot r_u(\nu, 1) + S \cdot r_\nu(\nu, 1). \end{aligned} \tag{4-3}$$

文献[5]给出两块曲面 G^1 和 G^2 及 G^n 连续的定义,若两块曲面 $S(x, y)$ 和 $r(u, \nu)$ 有公共的边界曲线 Γ , 即

$$S(x, y)|_\Gamma = r(u, \nu)|_\Gamma. \tag{4-4}$$

那么 $S(x, y)$ 和 $r(u, \nu)$ 在 Γ 上 G^1 连续时满足下式

$$\begin{cases} S_x = P \cdot r_u + Q \cdot r_\nu \\ S_y = E \cdot r_u + F \cdot r_\nu \end{cases} \Big|_\Gamma. \tag{4-5}$$

$S(x, y)$ 和 $r(u, \nu)$ 在 Γ 上 G^2 连续的条件为

$$\begin{cases} S_{xx} = P^2 \cdot r_{uu} + 2P \cdot Q \cdot r_{u\nu} + Q^2 \cdot r_{\nu\nu} + R \cdot r_u + S \cdot r_\nu \\ S_{yy} = E^2 \cdot r_{uu} + 2 \cdot E \cdot F \cdot r_{u\nu} + F^2 \cdot r_{\nu\nu} + G \cdot r_u + H \cdot r_\nu \end{cases} \Big|_\Gamma. \tag{4-6}$$

公式(4-5)和(4-6)只是公式(4-2)和(4-3)的普遍情况。为了使得构造方法直观起见,仍以单个三角形 $\triangle ABC$ 上构造曲面来说明方法。如图 4 为 $\triangle ABC$ 上各参数及边界曲线分布情况,其主要过程与 § 3 相同。

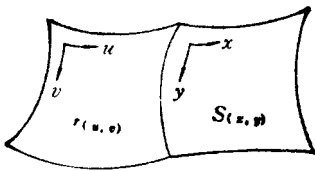


图 4

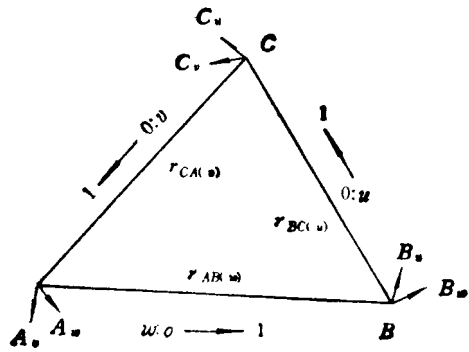


图 5

首先定义三条边界曲线,

$$\begin{cases} r_{AB}(w) = \phi_0(w)A + \phi_1(w)B + \lambda_1 \cdot \phi_0(w)A_w + \lambda_2 \cdot \phi_1(w)B_w, \\ r_{BC}(u) = \phi_0(u)B + \phi_1(u)C + \xi_1 \cdot \phi_0(u)B_u + \xi_2 \cdot \phi_1(u)C_u, \\ r_{CA}(v) = \phi_0(v)C + \phi_1(v)A + \mu_1 \cdot \phi_0(v)C_v + \mu_2 \cdot \phi_1(v)A_v. \end{cases} \tag{4-7}$$

作

$$\begin{cases} n_{AB} = (1-w)^2 n_A + w^2 n_B, \\ n_{BC} = (1-u)^2 n_B + u^2 n_C, \\ n_{CA} = (1-v)^2 n_C + v^2 n_A, \end{cases} \tag{4-8}$$

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 = \mathbf{n}_{AB} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{AB}}{\partial w}, \\ \mathbf{S}_2 = \mathbf{n}_{BC} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{BC}}{\partial u}, \\ \mathbf{S}_3 = \mathbf{n}_{CA} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{CA}}{\partial v}, \end{cases} \quad (4-9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{AB} = \mathbf{r}_{AB}(w) + u \cdot \beta_{AB} \cdot \mathbf{S}_1 + \frac{u^2}{2} \cdot \alpha_{AB} \cdot \mathbf{S}_1, \\ \mathbf{S}_{BC} = \mathbf{r}_{BC}(u) + v \cdot \beta_{BC} \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{v^2}{2} \cdot \alpha_{BC} \cdot \mathbf{S}_2, \\ \mathbf{S}_{CA} = \mathbf{r}_{CA}(v) + w \cdot \beta_{CA} \cdot \mathbf{S}_3 + \frac{w^2}{2} \cdot \alpha_{CA} \cdot \mathbf{S}_3. \end{cases} \quad (4-10)$$

记

$$D = u^3 v^3 + u^3 w^3 + v^3 w^3, \quad (4-11)$$

则所作的曲面为

$$\mathbf{S}_{ABC} = \frac{v^3 w^3}{D} \mathbf{S}_{AB} + \frac{u^3 w^3}{D} \mathbf{S}_{BC} + \frac{u^3 v^3}{D} \mathbf{S}_{CA}. \quad (4-12)$$

两个空间三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 相邻,如图 6 所示,用以上方法构造曲面 \mathbf{S}_{ABC} 和 \mathbf{S}_{BCD} ,只要在 r_{BC} 公共边界线上 \mathbf{S}_{ABC} 的 β_{BC} 和 α_{BC} 与 \mathbf{S}_{BCD} 的 β_{CB} 和 α_{CB} 满足:

$$\beta_{BC} = \beta_{CB}, \alpha_{BC} = -\alpha_{CB}, \quad (4-13)$$

就可保证 \mathbf{S}_{ABC} 和 \mathbf{S}_{BCD} 在公共边界上具有 G^2 连续性。

容易证明 \mathbf{S}_{ABC} 和 \mathbf{S}_{BCD} 在边界线上满足(4-3)式,实用上常取 $\beta_{AB} = \beta_{BC} = \beta_{CA} = 1$, 这样计算比较简单。

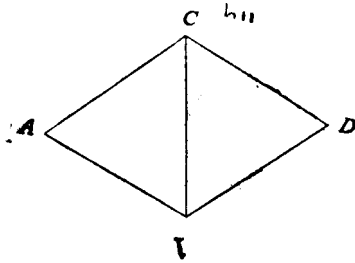


图 6

曲面(4-12)具有特殊的性质,在三顶点处全曲率为零,边界线为平面三次曲线。当取全部 $\alpha_{AB} = \alpha_{BC} = \alpha_{CA} = 0$ 时,(4-12)就成为 G^1 插值曲面;当全部 $\beta_{AB} = \beta_{BC} = \beta_{CA} = 0$ 时,(4-12)就成为 G^0 插值曲面;当全部参数取零值时,(4-12)就成为精确的空间三角网格。当给定的 (x_i, y_i, z_i) 形成平面时, G^1 和 G^2 插值曲面能精确的插值该平面,这说明该方法至少具有一阶逼近精度。

逼近精度。

当 $\triangle ABC$ 的某个边为边界边时,根据它是否与其它类型的曲面相拼接而决定边界条件。

§5 例 子

本节给出一个计算实例,来说明构造 G^1 和 G^2 插值曲面的具体步骤,并通过该例中一些点上的误差计算以说明该插值方法的逼近精度。

给定单位球上四个点, $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{C} = (0, 0, 1)$ 和 $\mathbf{D} =$

$(0, -1, 0)$, 它们构成两个空间三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$. 我们要在这两个三角形上构造 G^1 和 G^2 插值曲面来逼近单位球在第一和第四挂限的部分.

如图 7 各边界连接面方程为

$$\pi_{AB} = \pi_{DA} = z = 0, \quad \pi_{AC} = \pi_{CA} = y = 0,$$

$$\pi_{BC} = \pi_{CD} = x = 0.$$

(i) 构造 G^1 插值曲面

首先在 $\triangle ABC$ 上构造 G^1 插值曲面 S'_{ABC} , 根据已知条件求出, $\mathbf{n}_A = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n}_B = (0, 1, 0)$, $\mathbf{n}_C = (0, 0, 1)$ 和 $\mathbf{n}_D = (0, -1, 0)$,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_v = (0, 0, -\lambda), & \mathbf{A}_w = (0, \lambda, 0), & \mathbf{B}_w = (-\lambda, 0, 0), \\ \mathbf{B}_u = (0, 0, \lambda), & \mathbf{C}_u = (0, -\lambda, 0), & \mathbf{C}_v = (\lambda, 0, 0). \end{cases}$$

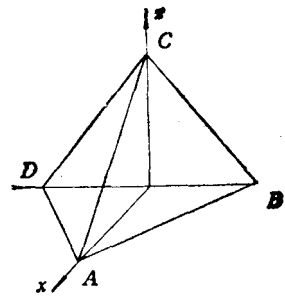


图 7

作三条边界曲线 \mathbf{r}_{AB} , \mathbf{r}_{BC} 和 \mathbf{r}_{CA} , 取 $\lambda = 4(\sqrt{2} - 1)$, 使得 $\mathbf{r}_{AB}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\mathbf{r}_{BC}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\mathbf{r}_{CA}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{AB} = \phi_0(w)\mathbf{A} + \phi_1(w)\mathbf{B} + \phi_0(w)\mathbf{A}_w + \phi_1(w)\mathbf{B}_w, \\ \mathbf{r}_{BC} = \phi_0(u)\mathbf{B} + \phi_1(u)\mathbf{C} + \phi_0(u)\mathbf{B}_u + \phi_1(u)\mathbf{C}_u, \\ \mathbf{r}_{CA} = \phi_0(v)\mathbf{C} + \phi_1(v)\mathbf{A} + \phi_0(v)\mathbf{C}_v + \phi_1(v)\mathbf{A}_v, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{AB}}{\partial w} = (0, 0, \mu), \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{BC}}{\partial v} = (\mu, 0, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{CA}}{\partial w} = (0, \mu, 0). \end{cases}$$

取 $\mu = 1.09159$, 使 $S_{ABC}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, 再作

$$\begin{cases} S'_{AB} = (\phi_0(w) - \lambda \cdot \phi_1(w), \phi_1(w) + \lambda \cdot \phi_0(w), \mu \cdot w), \\ S'_{BC} = (\mu \cdot v, \phi_0(u) - \lambda \cdot \phi_1(u), \phi_1(u) + \lambda \cdot \phi_0(u)), \\ S'_{CA} = (\phi_1(v) + \lambda \cdot \phi_0(v), \mu \cdot w, \phi_0(v) - \lambda \cdot \phi_1(v)), \end{cases}$$

则在 $\triangle ABC$ 上的 G^1 插值曲面为 S'_{ABC} ,

$$S'_{ABC}(u, v, w) = \frac{v^2 w^2}{D} S'_{AB} + \frac{u^2 w^2}{D} S'_{BC} + \frac{v^2 w}{D} S'_{CA},$$

其中 $D = u^2 v^2 + u^2 w^2 + v^2 w^2$.

在 $\triangle ACD$ 上构造 G^1 插值曲面 S'_{ACD} , 根据已知条件求得

$$\begin{cases} \mathbf{D}_v = (0, 0, -\lambda), & \mathbf{D}_w = (\lambda, 0, 0), & \mathbf{A}_w = (0, \lambda, 0), \\ \mathbf{A}_v = (0, 0, \lambda), & \mathbf{C}_v = (-\lambda, 0, 0), & \mathbf{C}_u = (0, -\lambda, 0), \end{cases}$$

其中 $\lambda = 4(\sqrt{2} - 1)$.

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{DA} = \phi_0(w)\mathbf{D} + \phi_1(w)\mathbf{A} + \phi_0(w)\mathbf{D}_w + \phi_1(w)\mathbf{A}_w, \\ \mathbf{r}_{AC} = \phi_0(u)\mathbf{A} + \phi_1(u)\mathbf{C} + \phi_0(u)\mathbf{A}_u + \phi_1(u)\mathbf{C}_u, \\ \mathbf{r}_{CD} = \phi_0(v)\mathbf{C} + \phi_1(v)\mathbf{D} + \phi_0(v)\mathbf{C}_v + \phi_1(v)\mathbf{D}_v, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{DA}}{\partial w} = (0, 0, \mu), \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{AC}}{\partial v} = (0, -\mu, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{CD}}{\partial w} = (\mu, 0, 0) \end{cases}$$

其中 $\lambda = 1.09159$.

$$\begin{cases} \mathbf{S}'_{DA} = (\phi_1(w) + \lambda \cdot \phi_0(w), -\phi_0(w) + \lambda \cdot \phi_1(w), \mu \cdot u), \\ \mathbf{S}'_{AC} = (\phi_0(u) - \lambda \cdot \phi_1(u), -\mu \cdot v, \phi_1(u) + \lambda \cdot \phi_0(u)), \\ \mathbf{S}'_{CD} = (\mu \cdot w, -\phi_1(u) - \lambda \phi_0(v), \phi_0(v) - \lambda \cdot \phi_1(v)), \\ \mathbf{S}'_{ACD} = \frac{v^2 w^2}{D} \mathbf{S}'_{DA} + \frac{u^2 w^2}{D} \mathbf{S}'_{AC} + \frac{u^2 v^2}{D} \mathbf{S}'_{CD}. \end{cases}$$

可以证明 \mathbf{S}'_{ABC} 和 \mathbf{S}'_{ACD} 在 $y=0$ 平面上有相同的边界线且在该边界线上每点处有相同的切面,即具有 G^1 连续性. 我们求出参数 $u = \frac{1}{4}, v = \frac{1}{4}, w = \frac{1}{2}$ 时插值曲面上的点, $\mathbf{S}'_{ABC}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = (0.478799, 0.775760, 0.396670)$ $\left| \mathbf{S}'_{ABC}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \right|$ 与球面半径的误差为 ϵ_1 ,

$$\epsilon_1 = \left| \left| \mathbf{S}'_{ABC}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \right| - 1 \right| = 0.00572.$$

可以看出这种插值曲面具有较高的逼近精度.

(ii) 构造 G^2 插值曲面

由于构造 G^2 插值曲面的主要步骤与 (i) 相同,故不再详述. 在 $\triangle ABC$ 上构造 G^2 插值曲面 \mathbf{S}^2_{ABC} ,

$$\mathbf{S}^2_{ABC}(u, v, w) = \frac{v^3 w^3}{D} \mathbf{S}^2_{AB} + \frac{u^3 w^3}{D} \mathbf{S}^2_{BC} + \frac{u^3 v^3}{D} \mathbf{S}^2_{CA},$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{S}^2_{AB} = \left(\phi_0(w) - \lambda \cdot \phi_1(w), \phi_1(w) + \lambda \cdot \phi_0(w), \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \cdot \mu \right), \\ \mathbf{S}^2_{BC} = \left(\left(v + \frac{v^2}{2}\right) \cdot \mu, \phi_0(u) - \lambda \cdot \phi_1(u), \phi_1(u) + \lambda \cdot \phi_0(u) \right), \\ \mathbf{S}^2_{CA} = \left(\phi_1(v) + \lambda \cdot \phi_0(v), \left(w + \frac{w^2}{2}\right) \cdot \mu, \phi_0(v) - \lambda \cdot \phi_1(v) \right), \end{cases}$$

$$\lambda = 4(\sqrt{2} - 1), \mu = 0.935647, D = u^3 v^3 + u^3 w^3 + v^3 w^3.$$

在 $\triangle ACD$ 上构造 G^2 插值曲面 \mathbf{S}^2_{ACD} , 即

$$\mathbf{S}^2_{ACD} = \frac{v^3 w^3}{D} \mathbf{S}^2_{DA} + \frac{u^3 w^3}{D} \mathbf{S}^2_{AC} + \frac{u^3 v^3}{D} \mathbf{S}^2_{CD},$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{S}^2_{DA} = \left(\phi_1(w) + \lambda \cdot \phi_0(w), -\phi_0(w) + \lambda \cdot \phi_1(w), \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \cdot \mu \right), \\ \mathbf{S}^2_{AC} = \left(\phi_0(v) - \lambda \cdot \phi_1(v), -0.935647 \cdot \left(v + \frac{v^2}{2}\right), \phi_1(u) + \lambda \cdot \phi_0(u) \right), \\ \mathbf{S}^2_{CD} = \left(\left(w + \frac{w^2}{2}\right) \cdot \mu, -\phi_1(v) - \lambda \cdot \phi_0(v), \phi_0(v) - \lambda \cdot \phi_1(v) \right), \end{cases}$$

$$\lambda = 4(\sqrt{2} - 1), \mu = 1.06385, D = u^3 v^3 + u^3 w^3 + v^3 w^3.$$

容易证明 \mathbf{S}^2_{ABC} 和 \mathbf{S}^2_{ACD} 在平面 $y=0$ 上具有相同的边界曲线, 在该边界曲线上每点处具有相同的切面和相同的法曲率, 即具有 G^1 连续性. 求出参数 $u = \frac{1}{4}, v = \frac{1}{4}, w = \frac{1}{2}$

时插值曲面上的点 $S_{ABC}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = (0.47948, 0.80075, 0.36125)$, $\left|S_{ABC}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right|$ 与球面半径 1 的误差为 ϵ_2 , 即

$$\epsilon_2 = \left| \left| S_{ABC}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \right| - 1 \right| = 0.000794.$$

可以看出 S_{ABC}^1 和 S_{ABC}^2 在边界线上是相同的, 而在三角曲面内部 G^2 连续曲面比 G^1 连续曲面具有更高的逼近精度。

§6 讨 论

至此, 我们已给出了散乱空间数据上的 G^1 和 G^2 插值方法。这种方法使用起来灵活, 几何意义明显, 便于调节曲面。缺点是曲面形式为有理的, 因而计算时比较复杂, 而且人为的条件相对来说比较多, 但与其它方法相比, 该方法仍具有较大的实用价值, 可以通过选取最佳参数值来尽量消除人为因素的影响, 使曲面具有良好的性态。

本文是在杨彭基教授和蔡青副教授的指导下完成的, 作者向他们表示感谢。

参 考 文 献

- [1] JuerGen Kahmann, Continuity of Curvature Between Adjacent Bezier Patches, — Surfaces in CAGD (E. Barnhill ed. 1983) 65.
- [2] F. Little, Convex Combination Surface, 同 [1], 99.
- [3] C. L. Lawson, Software for C^1 Surface interpolation, — Mathematical Software III. (Rice ed. 1977) 160.
- [4] Robert, E. Barnhill, Representation and Approximation of Surfaces, 同 [3], 70.
- [5] Tony D. DeRose Brian A. Barsky, An Intuitive Approach to Geometric Continuity for Parametric Curves and Surfaces. — Computational Geometry and Computer-Aided Design (Temple H. Fay and John N. Sonoosmith Compiled 1985) 71.