无穷凹角区域椭圆边值问题的重叠型区域分解算法*1)

杨 敏
(河海大学理学院 南京 210098)
杜其奎
(南京师范大学数学与计算机科学学院 南京 210097)

AN OVERLAPPING DOMAIN DECOMPOSITION ALGORITHM FOR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OVER AN INFINITE DOMAIN WITH CONCAVE ANGLES

Yang Min
(*School of Sciences, Hohai University, Nanjing* 210098)
Du Qikui
(*School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing* 210097)

Abstract

In this paper, we investigate an overlapping domain decomposition algorithm for elliptic boundary value problems over an infinite domain with concave angles. The algorithm is constructed, and its convergence is discussed. The finite element method and natural boundary element are alternatively applied to solve a bounded subdomain and a typical unbounded subdomain. It has overcome the difficulty met in standard domain decomposition method for problems with unbounded domains. The convergence rate is analysed in details for a typical domain. Finally, some numerical examples are presented to show effectiveness of our method.

Key words: infinite concave angle domain; domain decomposition algorithm; finite element; exterior problem

§1. 引 言

许多科学和工程计算问题都可归结为无界区域上的偏微分方程边值问题，数值求解无界

* 2002 年 6 月 4 日收到.
1) 南京师范大学自然科学基金及数学与计算机科学学院“211”项目基金资助项目.

区域问题有着及其重要的意义. 如果直接使用有限元方法求解时往往会遇到一些困难. 一种最简单的处理方法是直接删去区域的无界部分, 而这样处理或者计算精度降低, 或者计算的代价过高. 边界元法是求解某些无界区域问题的极为有效方法. 边界元和有限元耦合法已应用求解无界区域问题 [1-3,6]. 近年来发展起来的区域分解算法 [8], 为边界元方法在无界区域上的应用又提供了新的途径 [4-5].

本文研究无穷凹角区域 (即无穷扇形区域) 椭圆边值问题的数值方法. 标准的有限元方法通常求解精度较差, 不能获得满意的数值结果. 若用有限元与边界元耦合方法, 所得到的刚度矩阵通常又是非带状的, 所需的存贮量较大. 鉴于上述情况, 我们提出了该问题的重叠型区域分解算法, 从而有效地克服了上述的缺陷. 这一算法基于自然边界归化, 采用有限元与边界元交替在有界子区域与规则的无界子区域求解的方法. 给出了算法及算法的收敛性, 特别对规则的无界子区域详细地分析了收敛速度. 最后给出数值例子, 以示该方法的可行性和有效性. 数值结果表明, 此算法迭代收敛速度快, 且具有非常好的计算精度.

§2. 问题的描述和算法的构造

考虑如下混合边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u+\beta u=0, & \Omega\text{内}, \\ u=0, & \Gamma_0\cup\Gamma_\alpha\text{上}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=g, & \Gamma\text{上}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 Ω 为由夹角为 $\alpha(0<\alpha\leqslant 2\pi)$ 的两直边 Γ_0 和 Γ_α 以及简单 (或分段光滑) 光滑曲线 Γ 的外区域, 这里 α 为凹角. 特别当 $\alpha=2\pi$ 时, 该区域为含裂缝区域. β 为小于 0 的实数. 问题 (2.1) 的解 u 在无穷远处应满足条件 $(r=\sqrt{x^2+y^2})$ $\lim\limits_{r\to+\infty}u=0$. 分别以半径 R_1, R_2(其中 $R_1>R_2$) 作两条人工边界 Γ_1, Γ_2, 满足 Γ_1, $\Gamma_2\subset\Omega$, $\mathrm{dist}(\Gamma_2,\Gamma)=\delta>0$, Ω_1 为 Γ, Γ_0, Γ_α 及 Γ_1 间的有界子区域, Ω_2 为 Γ_2, Γ_0 及 Γ_α 外部的无界子区域. 于是 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1\cap\Omega_2\neq\phi$, $\partial\Omega_1=\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_{01}\cup\Gamma_{\alpha1}$, $\partial\Omega_2=\Gamma_2\cup\Gamma_{02}\cup\Gamma_{\alpha2}$, 记 $\Omega_{11}=\Omega_1\cap\bar{\Omega}_2^c$, $\Omega_{22}=\Omega_2\cap\bar{\Omega}_1^c$, $\Omega_{12}=\Omega_1\cap\Omega_2$, 其中 $\Gamma_{0i}=\bar{\Omega}_i\cap\Gamma_0$, $\Gamma_{\alpha i}=\bar{\Omega}_i\cap\Gamma_a$, $\bar{\Omega}_i^c$ 表示 $\bar{\Omega}_i$ 的补集, $i=1,2$. 定义如下 Schwarz 交替算法:

$$\begin{cases} \Delta u_1^{(2n+1)}+\beta u_1^{(2n+1)}=0, & \Omega_1\text{内}, \\ u_1^{(2n+1)}=0, & \Gamma_{01}\cup\Gamma_{\alpha1}\text{上}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n}^{(2n+1)}=g, & \Gamma\text{上}, \\ u_1^{(2n+1)}=u_2^{(2n)}, & \Gamma_1\text{上}, \qquad n=0,1,\cdots \end{cases} \tag{2.2}$$

及

$$\begin{cases} \Delta u_2^{(2n+2)}+\beta u_2^{(2n+2)}=0, & \Omega_2\text{内}, \\ u^{(2n+2)}=0, & \Gamma_{02}\cup\Gamma_{\alpha 2}\text{上}, \\ u_2^{(2n+2)}=u_1^{(2n+1)}, & \Gamma_2\text{上}, \\ \lim\limits_{r\to+\infty} u_2^{(2n+2)}=0, & n=0,1,\cdots. \end{cases} \tag{2.3}$$

初始第 0 步，直接任取 Γ_1 上的函数值 u_0，不妨取 $u_0|_{\Gamma_1}=0$. 接着第 1 步，结合 $\Gamma_{01}\cup\Gamma_{\alpha1}\cup\Gamma$ 上的值，在 Ω_1 上解内边值问题，得到 Γ_2 上的函数值 $u_1|_{\Gamma_2}$. 然后第 2 步，在 Ω_2 上解外边值问题，得到 Γ_1 上函数值 $u_2|_{\Gamma_1}$，依此类推.

§3. Schwarz 交替算法的收敛性

边值问题 (2.1) 的解函数空间为

$$V=\{v\in W_0^1(\Omega)|v=0,\text{在}\Gamma_0\cup\Gamma_\alpha\text{上}\},$$

其中

$$W_0^1(\Omega)=\left\{v|\frac{v}{\sqrt{x^2+y^2+1}\ln(x^2+y^2+2)},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\in L^2(\Omega)\right\}.$$

只要在 Ω_{22} 中取 $u_1^{(2n+1)}=u_2^{(2n)}$，则在 $\Gamma_0\cup\Gamma_\alpha$ 上取 0 值的函数 $u_1^{(2n+1)}$ 可延拓为 V 中的函数. 同样，只要在 Ω_{11} 内取 $u_2^{(2n+2)}=u_1^{(2n+1)}$，则函数 $u_2^{(2n+2)}$ 也可延拓为 V 中的函数. 令

$$V_1=\{v\in H^1(\Omega_1)\mid v=0,\text{在 }\Gamma_{01}\cup\Gamma_{\alpha1}\cup\Gamma_1\text{ 上}\},$$

$$V_2=\{v\in W_0^1(\Omega_2)\mid v=0,\text{在 }\Gamma_2\text{ 上}\},$$

则有

$$u_1^{(2n+1)}-u_2^{(2n)}\in V_1,\quad u_2^{(2n+2)}-u_1^{(2n+1)}\in V_2.$$

定义双线形式

$$D(u,v)=\int_\Omega(\bigtriangledown u\bigtriangledown v-\beta uv)dxdy,$$

并由此定义内积 $(u,v)_1$ 及 V 上的范数 $\|v\|_1$，于是 (2.2), (2.3) 等价于变分问题

$$\begin{cases} \text{求 } u_1^{(2n+1)}\in V_1+u_2^{(2n)},\quad\text{使得} \\ D(u_1^{(2n+1)}-u,v_1)=0,\quad\forall\ v_1\in V_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

及

$$\begin{cases} \text{求 } u_2^{(2n+2)}\in V_2+u_1^{(2n+1)},\quad\text{使得} \\ D(u_2^{(2n+2)}-u,v_2)=0,\qquad\forall\ v_2\in V_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

用 P_{V_i} 表示 V 到 V_i 按内积 $(\cdot,\cdot)_1$ 的正投影, 则由 (3.1), (3.2) 可得

$$\begin{cases} u_1^{(2n+1)} - u_2^{(2n)} = P_{V_1}(u - u_2^{(2n)}), \\ u_2^{(2n+2)} - u_1^{(2n+1)} = P_{V_2}(u - u_1^{(2n+1)}), \quad n = 0, 1, \cdots, \end{cases} \tag{3.3}$$

即

$$\begin{cases} u - u_1^{(2n+1)} = P_{V_1^\perp}(u - u_2^{(2n)}), \\ u - u_2^{(2n+2)} = P_{V_2^\perp}(u - u_1^{(2n+1)}), \quad n = 0, 1, \cdots, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $V_i^\perp$ 是 V_i 在 V 中的正交补空间. 令

$$e_1^{(2n+1)} = u - u_1^{(2n+1)}, n = 0, 1, \cdots, \qquad e_2^{(2n)} = u - u_2^{(2n)}, n = 1, 2, \cdots,$$

则

$$e_1^{(2n+1)} = P_{V_1^\perp} e_2^{(2n)}, n = 1, 2, \cdots, \qquad e_2^{(2n+2)} = P_{V_2^\perp} e_1^{(2n+1)}, n = 0, 1, \cdots,$$

即

$$e_1^{(2n+1)} = P_{V_1^\perp} P_{V_2^\perp} e_1^{(2n-1)}, n = 1, 2, \cdots, \quad e_2^{(2n+2)} = P_{V_2^\perp} P_{V_1^\perp} e_2^{(2n)}, n = 0, 1, \cdots.$$

表明若 $\{e_1^{(2n+1)}\}$, $\{e_2^{(2n)}\}$ 收敛, 则必收敛于 $V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

类似于文 [4] 中的证明, 我们可以得到下面的引理和定理:

引理. $V = V_1 + V_2$, $V_1^\perp \cap V_2^\perp = \{0\}$.

定理 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \|e_1^{(2n+1)}\|_1 = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|e_2^{(2n)}\|_1 = 0$.

定理 2. 存在一个常数 δ, $0 \leqslant \delta < 1$, 使得

$$\|e_1^{(2n+1)}\|_1 \leqslant \delta^n \|e_1^{(1)}\|_1, \qquad \|e_2^{(2n)}\|_1 \leqslant \delta^n \|e_2^{(0)}|_1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

定理 1, 2 表明上述 Schwarz 交替法是几何收敛的.

§4. 收敛速度的分析

对一般无界区域 Ω, 定量分析上述交替算法的收敛速度是困难的. 今设 Ω 为以原点为圆心, R 为半径的圆弧 Γ 的外部区域. Γ_1 及 Γ_2 分别为与 Γ 同心的圆弧, 其半径 R_1 及 R_2 满足 $R < R_2 < R_1$. 设

$$e_1^{(1)}(R_1, \theta) = e_2^{(0)}(R_1, \theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sin\frac{m\pi\theta}{\alpha} \tag{4.1}$$

和

$$\frac{\partial e_1^{(1)}}{\partial r} = 0, \qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \tag{4.2}$$

则设

$$e_1^{(1)}(r, \theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m I_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}r) + B_m K_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}r) \sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}, \qquad \text{在 } \Omega_1 \text{ 内}.$$

由 (4.1) 和 (4.2) 可得

$$A_m = \frac{a_m}{d_m} K'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R), B_m = -\frac{a_m}{d_m} I' \frac{m\pi}{\alpha}(\sqrt{|\beta|}R),$$

则

$$e_1^{(1)}(r,\theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \frac{c_m}{d_m} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha},$$

其中

$$c_m = \begin{vmatrix} I_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}r) & K_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}r) \\ I'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R) & K'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R) \end{vmatrix}, \quad d_m = \begin{vmatrix} I_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R_1) & K_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R_1) \\ I'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R) & K'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R) \end{vmatrix},$$

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2^{2\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)\sqrt{x}} M_{0,\nu}(2x), \quad K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} W_{0,\nu}(2x).$$

$M_{0,\nu}(x)$, $W_{0,\nu}(x)$ 均为 Whittaker 函数 [9], 故

$$e_1^{(1)}(R_2,\theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \frac{C_m}{D_m} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha},$$

其中

$$C_m = \begin{vmatrix} I_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R_2) & K_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R_2) \\ I'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R) & K'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R) \end{vmatrix}, \quad D_m = d_m.$$

用 Poisson 积分公式 [7], 可得在 Γ_1 上的函数值 $e_2^{(2)}(R_1,\theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} G_m(R_1,R_2) a_m \frac{C_m}{D_m} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}$, 其中 $G_m(a,b) = \frac{K_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}a)}{K_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}b)}$ 又 $e_1^{(3)}(r_1,\theta) = e_2^{(2)}(R_1,\theta)$, 故

$$\begin{aligned} \left\|e_1^{(3)}(R_1,\theta)\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_1}^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n^2+1} \cdot \left|G_n(R_1,R_2) \cdot \frac{C_n}{D_n} \cdot a_n\right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n^2+1} \cdot \left|\frac{K_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R_1)}{K_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{|\beta|}R_2)} \cdot \frac{C_n}{D_n}\right|^2 \cdot |a_n|^2 \\ &= \frac{R_2}{R_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n^2+1} \cdot \left|\frac{W_{0,\frac{n\pi}{\alpha}}(2\sqrt{|\beta|}R_1)}{W_{0,\frac{n\pi}{\alpha}}(2\sqrt{|\beta|}R_2)} \cdot \frac{C_n}{D_n}\right|^2 \cdot |a_n|^2 \\ &\leqslant C\frac{R_2}{R_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n^2+1} \cdot |a_n|^2 = C\frac{R_2}{R_1} \left\|e_1^{(1)}(R_1,\theta)\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_1}^2. \end{aligned}$$

类似的，我们可以得到

$$\left\|e_2^{(2)}(R_2,\theta)\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_2}^2 \leqslant C\frac{R_2}{R_1} \left\|e_2^{(0)}(R_2,\theta)\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_2}^2.$$

那么可以得到

$$\left\|e_2^{(2j)}(R_2,\theta)\right\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_2} \leqslant C\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^j \left\|e_2^{(0)}(R_2,\theta)\right\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_2},\ j=1,2,\cdots,$$

$$\left\|e_1^{(2j+1)}(R_1,\theta)\right\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_1} \leqslant C\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^j \left\|e_1^{(1)}(R_1,\theta)\right\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_1},\ j=1,2,\cdots.$$

定理 3. 设 Γ 是以原点为圆心，半径为 R 的圆弧， Γ_1 与 Γ_2 是与 Γ 同心且半径分别为 R_1, R_2 的圆弧 (其中 $R<R_2<R_1$). 如果利用 Schwarz 交替算法 (2.2) 和 (2.3) 求解问题 (2.1), 则

$$\left\|e_2^{(2j)}(R_2,\theta)\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_2} \leqslant C\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^j \left\|e_2^{(0)}(R_2,\theta)\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_2},\ j=1,2,\cdots,$$

$$\left\|e_1^{(2j+1)}(R_1,\theta)\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_1} \leqslant C\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^j \left\|e_1^{(1)}(R_1,\theta)\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_1},\ j=1,2,\cdots,$$

其中 $\delta=\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}$.

由此结合迹定理，可以得到

$$\left\|e_2^{(2j)}\right\|_{1,\Omega_2} \leqslant C\delta^j,\quad \left\|e_1^{(2j+1)}\right\|_{1,\Omega_1} \leqslant C\delta^j,\quad j=1,2,\cdots.$$

因此， $\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}$ 的比值越小，即两子区域重叠程度越高，收敛速度越快.

§5. 算法的离散化

将 Ω_1 作正则三角剖分， $\Gamma_0, \Gamma_\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2$ 上的直线段剖分分别为 $\Gamma_{0h}, \Gamma_{\alpha h}, \Gamma_{1h}, \Gamma_{2h}$, Γ_2 的圆弧段剖分为 $\Gamma_{2\theta}$, Ω_{1h}, Γ_{1h} 和 $\Gamma_{2\theta}$ 上的线性元空间为 $S^h(\Omega_{1h})$, $S^h(\Gamma_{1h})$ 和 $S^\theta(\Gamma_{2\theta})$, 于是可以得到如下的离散的 Schwarz 交替算法:

步 0. 任取初始 $u_\theta^0 \in C(\Gamma_1)$, $n:=0$.

步 1. 求 $u_{1h}^{(2n+1)} \in S^h(\Omega_{1h})$, 使得

$$\begin{cases} a_h(u_{1h}^{(2n+1)}, v_h) = \displaystyle\int_{\Gamma_h} g_h v_h ds, & v_h \in S^h(\Omega_{1h}), \\ u_{1h}^{(2n+1)} = 0, & \Gamma_{01}\cup\Gamma_{\alpha 1}上, \\ u_{1h}^{(2n+1)} = \Pi_h u_{2\theta}^{(2n)}, & \Gamma_{1h}上. \end{cases} \tag{5.1}$$

步 2. 求 $u_{2\theta}^{(2n+2)} \in C(\Gamma_2)$, 使得

$$\begin{cases} \Delta u_{2\theta}^{(2n+2)} + \beta u_{2\theta}^{(2n+2)} = 0, & \Omega_2 \text{ 内}, \\ u_{2\theta}^{(2n+2)} = 0, & \Gamma_{02} \cup \Gamma_{\alpha 2} \text{上}, \\ u_{2\theta}^{(2n+2)} = \Pi_\theta u_{1h}^{(2n+1)}, & \Gamma_{2\theta} \text{上}, \\ \lim\limits_{r \to +\infty} u_{2\theta}^{(2n+2)} = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

步 3. $\varepsilon^{(n)} = \max\left\{ \max\limits_{\text{节点}\in\Gamma_{1h}} |u_{1h}^{(2n+1)} - u_{1h}^{(2n-1)}|,\ \max\limits_{\text{节点}\in\Gamma_{2\theta}} |u_{2\theta}^{(2n+2)} - u_{2\theta}^{(2n)}| \right\}.$

步 4. 若 $\varepsilon^{(n)}$ 充分小, 停止; 否则转步 1.

其中 $a_h(u,v) = \int_{\Omega_{1h}} (\nabla u \nabla v - \beta uv) dxdy$, $\Pi_h : C(\Gamma_1) \longrightarrow S^h(\Gamma_{1h})$ 为插值算子, $\Pi_\theta : C(\Gamma_2) \longrightarrow S^h(\Gamma_{2\theta})$ 为插值算子. 这里步 1 在 Ω_{1h} 上利用有限元求解. 步 2 在 Ω_2 上利用文 [7] 中自然边界元法求解, 其中 Poisson 积分公式为

$$u_{2\theta}^{(2n+2)}(r,\theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} G_k(r;R) \int_0^\alpha \sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} \sin\frac{k\pi\theta'}{\alpha} \Pi_\theta u_{1h}^{(2n+1)}(R_2,\theta') d\theta' \tag{5.3}$$

通过数值积分求解.

§6. 数值例子

设 e 表示 Γ_{2h} 上节点的最大误差 $e(n) = \sup\limits_{P_i \in \Gamma_{2h}} |u(P_i) - u_{1h}^{(2n+1)}(P_i)|$, e_h 表示前后两步的解在节点上的差的最大值 $e_h(n) = \sup\limits_{P_i \in \Gamma_{2h}} |u_{1h}^{(2n-1)}(P_i) - u_{1h}^{(2n+1)}(P_i)|$, 并用 q_h 模拟收敛速度, $q_h(n) = \dfrac{e_h(n-1)}{e_h(n)}$.

例 1. 考虑边值问题 (2.1), $\beta = -0.04$

$$g = \begin{cases} 0.2K'_{\frac{2}{3}}(0.2r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\dfrac{2}{3}\theta - \dfrac{2}{3}K_{\frac{2}{3}}(0.2r)\dfrac{y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{2}{3}\theta, & x = 2, 0 < y \leqslant 2, \\ 0.2K'_{\frac{2}{3}}(0.2r)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\dfrac{2}{3}\theta + \dfrac{2}{3}K_{\frac{2}{3}}(0.2r)\dfrac{x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{2}{3}\theta, & |x| \leqslant 2, y = 2, \\ -0.2K'_{\frac{2}{3}}(0.2r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\dfrac{2}{3}\theta + \dfrac{2}{3}K_{\frac{2}{3}}(0.2r)\dfrac{y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{2}{3}\theta, & x = -2, |y| \leqslant 2, \\ -0.2K'_{\frac{2}{3}}(0.2r)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\dfrac{2}{3}\theta - \dfrac{2}{3}K_{\frac{2}{3}}(0.2r)\dfrac{x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{2}{3}\theta, & -2 \leqslant x < 0, y = -2, \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$. 区域 Ω 是以 $\Gamma_0 \cup \Gamma_\alpha \cup \Gamma$ 为边界的无穷凹角型区域, 其中 $\Gamma_0 = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant 1\}$, $\Gamma_\alpha = \{(x,y) \mid x = 0, y \leqslant -1\}$, $\Gamma = \{(x,y) \mid x = 1, 0 < y \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \mid y = 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \mid x = -1, -1 \leqslant y \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \mid y = -1, -1 \leqslant x < 0\}$.

表 1　收敛速度和网格之间的关系，$R_1 = 5.0$，$R_2 = 3.0$.

网格	n	迭代次数与对应的相关值 0	1	2	3	4	5
h	$e(n)$	0.462740	0.292855	0.240480	0.222100	0.215665	0.213415
	$e_h(n)$		0.172847	0.060178	0.021003	0.007332	0.002560
	$q_h(n)$			2.872262	2.865210	2.864566	2.864063
$\frac{h}{2}$	$e(n)$	0.390271	0.184244	0.112657	0.088782	0.080554	0.077614
	$e_h(n)$		0.207514	0.074062	0.026449	0.009446	0.003373
	$q_h(n)$			2.801896	2.800181	2.800021	2.800474

表 2　收敛速度和重叠程度的关系，$N = 12$，$M = 4$.

R_2	R_1	n	迭代次数与对应的相关值 0	1	2	3	4	5
2.5	5	$e(n)$	0.381097	0.168508	0.112654	0.099187	0.095591	0.094630
		$e_h(n)$		0.216072	0.057679	0.015401	0.004112	0.001098
		$q_h(n)$			3.746112	3.745146	3.745379	3.744991
3	6	$e(n)$	0.278169	0.125435	0.092127	0.085334	0.083812	0.083472
		$e_h(n)$		0.154820	0.034639	0.007753	0.001735	0.000388
		$q_h(n)$			4.469529	4.467819	4.468588	4.471649
4	9	$e(n)$	0.140346	0.086025	0.080465	0.079895	0.079837	0.079831
		$e_h(n)$		0.054321	0.005561	0.000570	0.000058	0.000006
		$q_h(n)$			9.768207	9.756140	9.827586	9.666667

此时对应的精确解为 $u = -K_{\frac{2}{3}}(0.2r)\sin\frac{2}{3}\theta$. 取人工边界为圆周 $\Gamma_i = \left\{(R_i,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi\right\}, i = 1,2$. 对有界区域 Ω_1 作有限元剖分得 Ω_{1h}，以坐标轴和象限角平分线与 Γ_1, Γ_2 和 Γ 的各交点为三角剖分节点，将圆弧 N 等分. 对应节点相连得到径向线段，再将径向线段 M 等分得到其余节点. 为了得到迭代收敛速度和网格的关系，将 Ω_{1h} 继续按环向和径向均匀细分即可. 有关数值结果如表 1 和 2 所示.

例 2. 考虑边值问题 (2.1): $\beta = -0.04$,

$$g = \begin{cases} 0.2K'_{\frac{1}{2}}(0.2r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{2}\theta - \dfrac{1}{2}K_{\frac{1}{2}}(0.2r)\dfrac{y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{2}\theta, & x = 2, 0 < |y| \leqslant 2, \\ 0.2K'_{\frac{1}{2}}(0.2r)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{2}\theta + \dfrac{1}{2}K_{\frac{1}{2}}(0.2r)\dfrac{x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{2}\theta, & |x| \leqslant 2, y = 2, \\ -0.2K'_{\frac{1}{2}}(0.2r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{2}\theta + \dfrac{1}{2}K_{\frac{1}{2}}(0.2r)\dfrac{y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{2}\theta, & x = -2, |y| \leqslant 2, \\ -0.2K'_{\frac{1}{2}}(0.2r)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{2}\theta - \dfrac{1}{2}K_{\frac{1}{2}}(0.2r)\dfrac{x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{2}\theta, & |x| \leqslant 2, y = -2, \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$. 设区域 Ω 是以 $\Gamma_0 \cup \Gamma_\alpha \cup \Gamma$ 为边界的无穷断裂

区域, 其中 $\Gamma_0 = \{(x,y) \mid y = 0, x \geqslant 1\} = \Gamma_\alpha$, $\Gamma = \{(x,y) \mid |x| = 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \mid |y| = 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$. 此时对应的精确解为 $u = -K_{\frac{1}{2}}(0.2r)\sin\frac{1}{2}\theta$. 取人工边界为圆周 $\Gamma_i = \{(R_i,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}, i = 1,2$. 类似例 1 对有界区域 Ω_1 作有限元剖分, 有关数值结果如表 3 和 4 所示.

表 3 收敛速度和网格之间的关系, $R_1 = 5.0$, $R_2 = 3.0$.

网格	n	迭代次数与对应的相关值					
		0	1	2	3	4	5
h	$e(n)$	0.463417	0.292097	0.224322	0.197538	0.186952	0.182768
	$e_h(n)$		0.171320	0.067775	0.026784	0.010586	0.004184
	$q_h(n)$			2.527776	2.530429	2.530134	2.530115
$\frac{h}{2}$	$e(n)$	0.395798	0.200945	0.123680	0.092731	0.080340	0.075380
	$e_h(n)$		0.198150	0.079321	0.031736	0.012697	0.005080
	$q_h(n)$			2.498077	2.499401	2.499488	2.499409

表 4 收敛速度和重叠程度的关系, $N = 16$, $M = 4$.

R_2	R_1	迭代次数与对应的相关值						
		n	0	1	2	3	4	5
2.5	5	$e(n)$	0.393374	0.185614	0.120838	0.100664	0.094467	0.092635
		$e_h(n)$		0.213688	0.066498	0.020689	0.006457	0.002003
		$q_h(n)$			3.213450	3.214172	3.196200	3.231653
3	6	$e(n)$	0.286043	0.132614	0.092622	0.082207	0.079496	0.078790
		$e_h(n)$		0.158042	0.041125	0.010699	0.002783	0.000724
		$q_h(n)$			3.842967	3.843817	3.844413	3.843923
4	9	$e(n)$	0.135610	0.077595	0.070643	0.069810	0.069711	0.069699
		$e_h(n)$		0.060289	0.007215	0.000863	0.000103	0.000012
		$q_h(n)$			8.314577	8.402086	8.378641	8.583333

分析以上数值计算结果可以看出:

1. 迭代序列是几何收敛的.
2. 网格越细, 迭代收敛解与准确解的误差越小, 误差阶越接近 $O(h^2)$.
3. 两子区域重叠程度越高, 迭代收敛速度越快.

参 考 文 献

[1] Feng Kang, Yu Dehao, Canonical integral equations of elliptic boundary value problems and their numerical solutions, *Proceeding of China-France Symposium on FEM(Beijing, 1982)*, Science Press:Beijing, 1983, 211–252.

[2] Yu Dehao, Coupling canonical boundary element methods with FEM to solve harmonic problem over cracked domain, *J. Comp. Math.*, 1:3(1983), 195–202.

[3] 余德浩，无界区域上 Stokes 问题的自然边界元与有限元耦合法，计算数学， 14:3(1992), 371–378.

[4] 余德浩，无界区域上基于自然边界归化的一种区域分解算法，计算数学， 16:4 (1994), 448-459.

[5] Du Qikui, Yu Dehao, A domain decomposition method based on natural boundary reduction for nonlinear time-dependent exterior wave problems, *Computing*, 65(2002), 111–129.

[6] 余德浩，自然边界元方法的数学理论，北京，科学出版社， 1993.

[7] 杜其奎，余德浩，凹角型区域椭圆边值问题的自然边界归化，计算数学， 25:1(2003), 85–98.

[8] 吕涛，石济民，林振宝，区域分解算法 — 偏微分方程数值解新技术，北京，科学出版社， 1992.

[9] 刘式适，刘式达，特殊函数，北京，气象出版社， 1988.