

结式可消去一个变量。因此, $F=0, G=0$ 可用结式 $S=0$ 求解。当然,用这种方法可以求出原方程的所有解,但有可能产生增根,因此,必须校验。当 F 与 G 有多个变量时,则用子结式消元或代为双变量,再用结式消元^[6]。

2 平面四杆机构的函数发生器的综合

如图 1 所示,在对平面四杆机构进行函数综合时,一般要求其输入角 θ_j 与输出角 φ_j 之间保持一定的函数关系,建立如图 1 所示的直角坐标系,则 C 点的坐标为(1, 0),取铰链点 A、B 的坐标为 A_x, A_y, B_x, B_y 设计变量,分别用 x_1, x_2, x_3, x_4 表示。

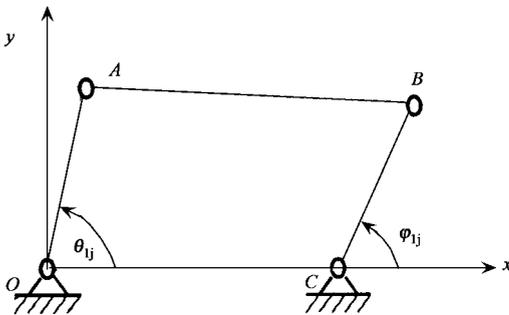


图 1 机构简图

按杆长不变的约束条件和位移矩阵,可导出以下的综合方程:

$$f_j(x) = P_{1j}x_1 x_3 + P_{2j}x_1 x_4 + P_{3j}x_2 x_3 + P_{4j}x_2 x_4 + P_{5j}x_1 + P_{6j}x_2 + P_{7j}x_3 + P_{8j}x_4 + P_{9j} \quad (1)$$

式中, $j=2, 3, \dots, n$; n 为实现的点数,采用精确点综合时最多能实现 5 个位置。而

$$\begin{aligned} P_{1j} &= 1 - \cos(\theta_j - \varphi_j); P_{2j} = -\sin(\theta_j - \varphi_j); \\ P_{3j} &= \sin(\theta_j - \varphi_j); P_{4j} = 1 - \cos(\theta_j - \varphi_j) \\ P_{5j} &= \cos(\theta_j - \varphi_j) - \cos \theta_j; \\ P_{6j} &= \sin(\theta_j - \varphi_j) + \sin \theta_j; \\ P_{7j} &= \cos \varphi_j - 1; P_{8j} = -\sin \varphi_j; \\ P_{9j} &= 1 - \cos \varphi_j. \end{aligned}$$

式(1)中含有 4 个设计变量和 $(n-1)$ 个设计方程,因此,该问题的最大精确数为 5 个。

在式(1)中, $P_{7j} = -P_{9j}, P_{1j} = P_{4j}, P_{2j} = -P_{3j}$, 因此,可变为:

$$f_j(x) = P_{1j}k_1 + P_{2j}k_2 + P_{5j}x_1 + P_{6j}x_2 + P_{7j}x_3 + P_{8j}x_4 - P_{7j} \quad (2)$$

其中

$$k_1 = x_1 x_3 + x_2 x_4, k_2 = x_1 x_4 - x_2 x_3 \quad (3)$$

在式(2)中,由 $f_j(x) = 0 (j=2, 3, \dots, n)$ 可求得 x_1, x_2, x_3, x_4 都为 k_1, k_2 的线性组合,即

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 k_1 + B_1 k_2 + C_1, x_2 = A_2 k_1 + B_2 k_2 + C_2, \\ x_3 &= A_3 k_1 + B_3 k_2 + C_3, x_4 = A_4 k_1 + B_4 k_2 + C_4 \end{aligned} \quad (4)$$

式中,带有下标的 A, B, C 都是已知符号参数的函数。

将式(4)代入式(3)得到 2 个关于 k_1, k_2 的二次方程:

$$\begin{aligned} k_2^2 E_2 + k_2(k_1 E_{11} + E_{12}) + (k_1^2 E_{00} + k_1 E_{01} + E_{02}) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} k_2^2 G_2 + k_2(k_1 G_{11} + G_{12}) + (k_1^2 G_{00} + k_1 G_{01} + G_{02}) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中,式中含有下标的 E, G 都是已知符号参数的函数。对式(4)的 2 个方程,利用西尔维斯特结式消元得到方程:

$$k_1^4 Q_4 + k_1^3 Q_3 + k_1^2 Q_2 + k_1 Q_1 + Q_0 = 0 \quad (7)$$

式中含有下标的 Q 都是已知符号参数的函数。由于该表达式很长,故略。但是结式消元产生增根,因此,利用式(7)、(6)或(5)以及(4)求得解后要用品式(1)校验,除去增根。其 Maple 语言^[7]程序(在 Maple 7.0 上调试通过)为:

```
restart : # k1 := (x1 * x3 + x2 * x4) : k2 = x1 * x4 - x2 * x3 :
F1 := a11 * k1 + a12 * k2 + a15 * x1 + a16 * x2 + a17 * x3 + a18 * x4 - a17 = 0 :
F2 := a21 * k1 + a22 * k2 + a25 * x1 + a26 * x2 + a27 * x3 + a28 * x4 - a27 = 0 :
F3 := a31 * k1 + a32 * k2 + a35 * x1 + a36 * x2 + a37 * x3 + a38 * x4 - a37 = 0 :
F4 := a41 * k1 + a42 * k2 + a45 * x1 + a46 * x2 + a47 * x3 + a48 * x4 - a47 = 0 :
X := solve({ F1, F2, F3, F4 }, { x1, x2, x3, x4 }) :
# seta := [ 60, 130, 200, 280 ]; fai := [ 17, 44, 61, 50 ];
fai[ 4 ];
F01 := subs( op(1, x), op(2, x), op(3, x), op(4, x), x1 * x3 + x2 * x4 - k1 ) :
F02 := subs( op(1, x), op(2, x), op(3, x), op(4, x), x1 * x4 - x2 * x3 - k2 ) :
n1 := degree( F01, k2 ); n2 := degree( F02, k2 );
E2 := simplify( coeff( F01, k2^2 ) ) : E1 := simplify( coeff( F01, k2 ) ) :
E0 := simplify( coeff( F02, k2, 0 ) ) :
G2 := simplify( coeff( F02, k2^2 ) ) : G1 := simplify( coeff( F02, k2 ) ) :
G0 := simplify( coeff( F02, k2, 0 ) ) :
```

$$f01 := k2^2 * EE2 + k2 * EE1 + EE0 : f02 := k2^2 * GG2 + k2 * GG1 + GG0 : #$$

$$\text{with}(\text{linalg}) : \text{AA1} := \det(\text{sylvester}(f01, f02, k2)) : \text{AA} := \text{subs}(GG2 = G2, GG1 = G1, GG0 = G0, EE2 = E2, EE1 = E1, EE0 = E0, \text{AA1}) :$$

$$\text{degree}(\text{AA}, k1) : q44 := \text{coeff}(\text{AA}, k1, 4) : q43 := \text{coeff}(\text{AA}, k1, 3) : q42 := \text{coeff}(\text{AA}, k1, 2) : q41 := \text{coeff}(\text{AA}, k1, 1) : q40 := \text{coeff}(\text{AA}, k1, 0) :$$

$$\# \text{eq0} := q44 * k1^4 + q43 * k1^3 + q42 * k1^2 + q41 * k1 + q40$$

例:设有平面铰链四杆机构,要使其输出角 φ_j

表2 4个解与其它研究结果的比较

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	备注
1	0	0	1	0	退化解,与文献[1,4,5]相同
2	0.3537235502	0.2198737073	2.153707009	1.219263498	本文所有,运动模拟满足要求
3	0.3379679568	0.3530152365	1.52199554	1.460319860	与文献[1,4,5]相同
4	0.3469032057	0.1554410888	2.375848337	1.071369588	与文献[1]相同
5	0.0088	0.1988	0.2436	0.4269	只是文献[1,4,5]的解,但不能进行运动模拟

3 结论

本文提出了基于西尔维斯特结式消元法,结合平面四杆机构综合问题多个位置求解进行了研究。在建立非线性方程组的基础上,结合方程组的具体特点,利用 Maple 7.0 语言为开发四杆机构函数综合设计的通用程序,得到了单变量的一元四次方程,给出符号解。给出了5个位置的求解实例,得到了该问题的全部解,并且发现现有算法尚没有的新解。该算法简单、易于实现求解精度、速度和可靠性较高,它为机构学问题符号法设计提供了一种实用方法与工具。需要说明的是四杆导引机构的综合,

与输入角 θ_j 之间实现表1的5个对应位置,见表1,试求出其解。

表1 输入角 θ_j 与对应的输出角 φ_j

j	θ_j	φ_j
1	0	0
2	60	17
3	13	44
4	200	61
5	280	50

将具体数据代入得到8个解,校核方程组(1)得到原方程的4个解。4个解与其它研究结果的比较如表2所示。

其综合方程与式(1)具有完全相同的形式,其符号解是一样的,只是式(1)对应的系数不同。

参考文献:

- [1] 杨廷力. 机构系统基本理论——结构学、运动学、动力学[M]. 北京:机械工业出版社,1996.
- [2] 张纪元,沈守范. 计算机机构学[M]. 北京:国防工业出版社,1996.
- [3] 刘安心,杨廷力. 机械系统运动学设计[M]. 北京:中国石化出版社,1999.
- [4] 刘安心,杨廷力. 平面四杆机构的运动综合[J]. 机械科学与技术,1995(1):5-10.
- [5] 孙平,严静,陈永. 基于改进路径跟踪的同伦算法及在机构学中的应用[J]. 机械传动,1997,21(2):1-4.
- [6] 王东明. 消去法及其应用[M]. 北京:科学出版社,2002.
- [7] 洪维恩. 数学魔法师 Maple 6[M]. 北京:人民邮电出版社,2001.