

# 小系数二阶偏微分方程的组合 稳定有限元方法<sup>\*1)</sup>

周磊 周天孝

(中国航空计算技术研究所)

## COMBINATORIAL STABILIZED FINITE ELEMENT METHOD FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Zhou Lei Zhou Tian-xiao

(Aeronautic Computing Technique Research Institute)

### Abstract

A second-order linear scalar differential equation including a zeroth order term is approximated by using a new stabilized finite element method, which can attenuate the oscillations present using the standard Galerkin method with very small coefficient of the second-order term. By the helpness of additional variable which could be static condensed, we generalize the "unusual stabilized finite element method" developed in [1] from linear triangle element to bilinear quadrilateral element, and we establish a convergence study and obtain successful numerical simulation.

### § 1. 前 言

本文考察具有下述边界条件的模型问题 (S):

求定义在  $\Omega$  上的标量函数  $u$ , 使得

$$\tau u - \nu \Delta u = f, \text{ 在 } \Omega \text{ 上,} \quad (1.1)$$

$$u = 0, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上.}$$

这里  $\Omega$  为  $R^N (N = 2, 3)$  中的有界区域,  $\Gamma$  为  $\Omega$  的边界,  $\tau$  和  $\nu$  为给定的正的常数,  $f(x)$  为某一给定的函数.

这种模型问题常常出现在人们对非定常热传导方程等基本流体问题进行数值分析的过程中, 是一种包含零阶项的二阶线性微分方程, 且其中的二阶项系数  $\nu$  与零阶

\* 1996年7月5日收到.

项系数  $\tau$  (常对应离散时间步长的倒数) 相比极小. 计算结果表明: 当用经典的 Galerkin 方法求解此类方程时, 在真解发生突变的地方 (如边界层附近) 所求得的数值解常常发生很大的数值振荡. 这种振荡往往掩盖了真解本来的变化趋势. 如何消除这种数值震荡现象是这一领域专家们关注的焦点.

八十年代以来, C. Jonson 和 T.J.R. Hughes 等人为具有类似难点的对流占优的对流扩散方程相继提出流线扩散法 (SUPG 法) 和 Galerkin 最小二乘方法<sup>[2,3]</sup> 来对传统的 Galerkin 方法进行修正. 前者通过修改测试函数空间的方法在沿流线方向加上人工粘性项, 从而抑制了数值解沿流线方向的震荡; 后者是在 Galerkin 格式上加一个二阶微分方程 (Euler-Lagrange 方程) 残量的最小二乘项, 也达到了与前者相似的效果. 但问题 (1.1) 由于没有对流项, 不能应用流线扩散法, 另一方面有别于 [3] 中的方程, 问题 (1.1) 中两项的阶数相距较大, 因而各项的误差阶也相距较大, 故应用最小二乘法时, 如何选取最小二乘项的系数, 以使得最终的收敛精度不损失仍是个大难题.

最近 L.P. Franca 等人在 [1] 中注意到, 在数值实验中应用 Mini 元可以抑制上面提及的数值震荡. 于是通过将线性三角形元的“冒泡函数”静态凝聚, 而导出的一种同样具有稳定化作用的新的最小二乘方法. 有别于 [3] 中的方法, [1] 中的新方法是在 Galerkin 格式上减去一个二阶微分方程残量的最小二乘项; 同时由于这种新方法来源于 Mini 元的变换, 其最小二乘项的系数具有特殊的形式. 在方程的解满足一定正则性假设的情况下, 无论该方程二阶项的系数如何小, 这种方法都可保证  $H^1$  范数有一阶收敛性, 同时这种格式具有相容性. L.P. Franca 等人正在继续研究将其结果推广到湍流等更复杂的问题中去.

我们发现, 由于其来源的特殊性, [1] 中的方法仅适合将求解区域按一阶单纯形 (二维时为三角形, 三维时为四面体) 元进行有限元剖分的情形, 其分析方法很依赖于低阶单纯形元有限元函数空间所拥有的特点, 其中任意一个函数在每个单元上的二阶导数都为零. 而对于更一般的单元 (如二维时的双线性四边形元和三维情形时三线性平行六面体元, 后者在生成三维结构化网格方面具有更多的便利), 并不保持这个特点, 因而此时 [1] 中的推导并不成立. 如何构造一种通用于所有一阶元素的“稳定化”方法仍是一个未解之迷.

与上述所有的方法不同, 本文先引入一个辅助变量, 从而将原问题表述为等价的包含两个变量的混合问题, 再在这种混合问题的 Galerkin 格式上减去一个一阶微分方程残量的最小二乘项. 该格式适用于所有的二及三维一阶元素. 这种相容的格式在使用线性三角形元时退化为 [1] 中的格式, 而在使用其他的元素时, 我们证明了其具有与 [1] 中方法相同的收敛性估计, 并具有同样的计算简便性. 我们特别指出两点: 首先, 文中为了避免一般混合问题通常伴随的有限元逼近, 其有限元空间之间必须满足 inf-sup 条件的限制, 以使引入的辅助变量的空间最大限度地简单. 在构造混合格式时运用了周天孝提出的组合稳定方法. 其次, 由于辅助变量用分片常数元逼近, 在具体计算时可“静态凝聚”消去, 从而与 [1] 的格式相比, 并不增加计算规模.

本文的安排如下: 第二节描述我们构造的等价的(辅助)混合问题和新的组合稳定的有限元格式. 第三节中经具体推导得出辅助变量  $t$  在每个单元上由原始变量  $u$  表述的显式表达式. 第四节证明新格式解的存在唯一性和其解与  $\nu, \tau$  取值无关的  $H^1$  范数收敛性. 最后在第五节给出了数值算例来说明此算法稳定性的特点.

## § 2. 模型问题及稳定化的有限元方法

为了引入问题 (1.1) 的变分形式, 我们引进下列空间:

$$V = H_0^1(\Omega), \quad \mathbf{T} = L_2(\Omega)^2.$$

用  $(\cdot, \cdot)$  和  $\|\cdot\|_0$  表示  $L_2(\Omega)$ ;  $L_2(\Omega)^2$  上的内积和范数.

对应于问题 (S) 的变分问题为: (Q) 求  $u \in V$ , 使得

$$(\tau u, v) + (\nu \nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (2.1)$$

我们首先研究下面的辅助问题  $(Q_s)$ : 求  $(\mathbf{t}, u) \in \mathbf{T} \times V$ , 使得

$$\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \alpha(\nabla u, \mathbf{s}), \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbf{T}, \quad (2.2)$$

$$\alpha \nu(\mathbf{t}, \nabla v) + (1 - \alpha)\nu(\nabla u, \nabla v) + \tau(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V,$$

这里  $\alpha$  为一个小于 1 的正常数 (通常取其为 0.5).

注 2.1. 这里需要指出, 通常引入的下述混合问题求  $(\mathbf{t}, u) \in \mathbf{T} \times V$ , 使得

$$(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = (\nabla u, \mathbf{s}), \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbf{T}, \quad (2.3)$$

$$\nu(\mathbf{t}, \nabla v) + \tau(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (2.4)$$

在有限元离散时常伴随的 inf-sup 条件等新的难点, 于是我们将上面的方程与问题 (Q) 分别乘以  $\alpha$  和  $1 - \alpha$ , 再相加, 便得到上面的问题  $(Q_s)$ . 这种方法属于周天孝在 [7] 中提出的“组合稳定”有限元方法. [7] 中证明了用这种方法构造出的混合问题将大大减弱以至消除普通的鞍点问题有限元离散时常遇到的 LBB 条件的限制.

引理 2.1. 问题  $(Q_s)$  存在唯一解  $(\mathbf{t}, u)$ , 其中的  $u$  就是问题 (Q) 的真解, 且  $\mathbf{t}$  为  $\nabla u$ .

证明. 我们在空间  $\mathbf{T} \times V$  上定义有界线性算子:

$$B_2((\mathbf{t}, u); (\mathbf{s}, v)) = \nu(\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{s}) - \alpha(\nabla u, \mathbf{s}) + \alpha(\mathbf{t}, \nabla v) + (1 - \alpha)(\nabla u, \nabla v)) + \tau(u, v).$$

注意到  $B_2(\cdot; \cdot)$  在 Hilbert 空间  $\mathbf{T} \times V$  上是弱强制的 (定义见 [6] 中第 3 页). 根据 [6] 中第 5 页的 Lax-Ligram 定理, 可知问题  $(Q_s)$  存在唯一解  $(\mathbf{t}, u)$ . 同时由方程我们易证其中  $u$  就是问题 (Q) 的解, 且  $\mathbf{t}$  为  $\nabla u$ .

假定  $\Omega$  用拟一致的正则的有限元剖分  $J_h$  分成许多单元,  $h_K$  表示单元  $K$  的直径,  $h = \max h_K$ , 下面我们构造一个有限元离散格式来逼近问题  $(Q_s)$  的解 (从而也逼近了问题  $(Q)$  的解). 此时假定  $\Omega \in R^N$  ( $N = 2, 3$ ).

$(Q_h)$  求  $x = (\mathbf{t}, u) \in \mathbf{T}_h \times V_h$ , 使得

$$B_\delta(x; y) = F_\delta(y), \forall y = (\mathbf{s}, v) \in \mathbf{T}_h \times V_h. \quad (2.5)$$

这里  $\mathbf{T}_h \doteq \{\mathbf{s} \in L_2(\Omega); \mathbf{s}|_K = P_0(K), \forall K \in J_h\}$ ,  $P_0(K)$  为单元  $K$  上所有的常数组成的空间

$$V_h = \{v \in V | v|_K = \begin{cases} P_1, & \text{当对 } \Omega \text{ 单纯形剖分时,} \\ Q_1, & \text{当对 } \Omega \text{ 四边形 (二维) 或六面体 (三维) 剖分时.} \end{cases}$$

这里  $P_1$  为  $K$  上所有的阶数不超过 1 阶的多项式所组成的空间,  $Q_1$  为  $K$  上所有的每个分量阶数不超过 1 阶的多项式所组成的空间. 同时

$$\begin{aligned} B_\delta(\mathbf{t}, u; \mathbf{s}, v) &= \nu \alpha (\mathbf{t}, \mathbf{s}) - \nu \alpha (\nabla u, \mathbf{s}) + \nu \alpha (\mathbf{t}, \nabla v) + (1 - \alpha) \nu (\nabla u, \nabla v) + \tau (u, v) \\ &\quad - \sum_{K \in J_h} \mathbf{s}_K (-\nu \nabla \cdot \mathbf{t} + \tau u, -\nu \nabla \cdot \mathbf{s} + \tau v)_K. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$F_\delta(\mathbf{s}, v) = (f, v) - \sum_{K \in J_h} \mathbf{s}_K (f, -\nu \nabla \cdot \mathbf{s} + \tau v)_K,$$

$$\mathbf{s}_K \equiv \frac{h_K^2}{\tau h_K^2 + \nu}. \quad (2.7)$$

**注 2.2.** 若  $\mathbf{t} \in \mathbf{T}_h$ , 则在每个单元上  $-\nu \nabla \cdot \mathbf{t} = 0$ , 我们在公式中保留此项是为了便于下节的误差分析, 同时易根据简单的推导看出上述问题中解  $(\mathbf{t}, u)$  中的  $\mathbf{t}$  可在每个单元上显示用  $u$  表示, 即  $\mathbf{t}|_K = \left( \int_K \nabla(u) \right) \text{meas}(K)$ , 这里  $\text{meas}(K)$  为单元  $K$  的面积. 从而可以在上述问题中消去  $\mathbf{t}$ , 而将问题退化为一个求  $u$  的问题. 与经典的格式相比, 不增加计算的规模.

**注 2.3.** 用证明连续问题  $(Q_s)$  的方法同样可证明问题  $(Q_h)$  解的存在唯一性.

**注 2.4.** 若假定该问题  $(Q_s)$  的解满足如下的正则性:

$$\mathbf{t} \in H^1(\Omega)^N, \quad u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

则可根据  $H_0^1(\Omega)$  在  $L_2(\Omega)$  中稠密得到

$$(-\nu \nabla \cdot \mathbf{t} + \tau u, v) = (-\alpha \nu \nabla \cdot \mathbf{t} - (1 - \alpha) \nu \Delta u + \tau u, v) = (f, v) \quad \forall v \in L_2(\Omega). \quad (2.8)$$

由 (2.8) 和  $(Q_h)$  的表述, 可以看出, 当问题  $(Q)$  的解  $u$  满足一定的正则性时, 若定义  $x \doteq (\nabla u, u)$ , 有

$$B_\delta(x, y) = F_\delta(y), \quad \forall y = (\mathbf{s}, v) \in \mathbf{T}_h \times V_h.$$

这说明格式  $(Q_h)$  具有相容性.

### § 3. 新的计算方法的特点

在具体计算时,  $\mathbf{t}_h$  可在每个单元上显式地用  $u_h$  表示. 事实上, 以三维情形为例, 在单元  $K$  上, 假定

$$\sigma_h = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}, \quad t(u) = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix},$$

这里  $s_i$  ( $i = 1, 3$ ) 为在单元  $K$  上  $\mathbf{t}_h$  的三个常数分量, 且  $t_i = \int_K \partial u_h / \partial x_i$ . 那么记单元  $K$  的体积为  $\text{meas}(K)$ , 则根据问题  $(Q_h)$  的第一个方程, 我们特殊地选择  $\tau_h$  为一个除第  $i$  个分量为  $s_i$  外其余分量皆为零的三维向量, 可得

$$s_i^2 \cdot \text{meas}(K) = t_i \cdot s_i,$$

于是得到

$$s_i = \frac{t_i}{\text{meas}(K)}.$$

这样  $\mathbf{t}_h$  中的各个分量都显式地用  $u_h$  的函数表示出来 (二维情形也有类似的直接表达式), 于是便可消去  $\mathbf{t}_h$ , 而将问题  $(Q_h)$  仍化为仅包含  $u_h$  的一种变元方程. 与 [1] 中的问题相比, 最终求解的线性方程组的规模并不增加, 但是可直接应用工程上最普遍采用的六面体单元来计算.  $u_h$  的  $H_1$  范收敛阶与  $\nu, \tau$  的取值无关.

### § 4. 误差估计

我们先证明双线性形式  $B_\delta(\cdot, \cdot)$  在  $\mathbf{T} \times V$  上具有下述性质:

**定理 4.1.** 对于任意  $x = (t, u) \in \mathbf{T} \times V$ , 有

$$B_\delta(x; x) = \sum_{K \in J_h} \frac{\tau\nu}{\tau h_K^2 + \nu} \|u\|_{0,K}^2 + \nu(\alpha \|t\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla u\|_0^2).$$

证. 由定义 (2.6) 知, 对于任意  $x \equiv (t, u) \in \mathbf{T} \times V$ , 有

$$\begin{aligned} B_\delta(x; x) &= \tau \|t\|_0^2 + \nu(\alpha \|t\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla u\|_0^2) - \sum_{K \in J_h} s_K \tau^2 \|u\|_{0,K}^2 \\ &= \sum_{K \in J_h} \left( \tau - \frac{\tau^2 h_K^2}{\tau h_K^2 + \nu} \right) \|u\|_{0,K}^2 + \nu(\alpha \|t\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla u\|_0^2) \\ &= \sum_{K \in J_h} \frac{\tau\nu}{\tau h_K^2 + \nu} \|u\|_{0,K}^2 + \nu(\alpha \|t\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla u\|_0^2). \end{aligned}$$

由标准的有限元插值理论可知, 存在线性连续算子  $I_1: V \rightarrow V_h; I_2, \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_h$ . 若记

$$\eta_u = I_1 u - u, \quad \eta_{\mathbf{t}} = I_2 \mathbf{t} - \mathbf{t},$$

则有

$$\|\eta_u\|_0 \leq ch^2 \|u\|_2, \quad \forall u \in H^2(\Omega) \cap V,$$

$$\|\nabla \eta_u\|_0 \leq ch \|u\|_2, \quad \forall u \in H^2(\Omega) \cap V,$$

$$\|\eta_{\mathbf{t}}\|_0 \leq ch |\mathbf{t}|_1, \quad \forall \mathbf{t} \in H^1(\Omega)^2,$$

这里  $c$  为与  $h$  无关的正常数.

**定理 4.2.** 假设问题 (Q) 的解  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , 则当网格尺度  $h$  趋于零时, 问题 (Q<sub>h</sub>) 的解  $(\mathbf{t}_h, u_h)$  将会收敛于  $(\nabla u, u) \doteq (\mathbf{t}, u)$ , 且存在下述误差估计式:

$$\alpha \|(\mathbf{t} - \mathbf{t}_h)\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla(u - u_h)\|_0^2 + \sum_{K \in J_h} \frac{\tau}{\tau h_K^2 + \nu} \|u - u_h\|_{0,K}^2 \leq Ch^2 \|u\|_2^2.$$

证. 令  $e_h \doteq (\mathbf{e}_t, e_u) \doteq (\mathbf{t}_h - I_1^h \mathbf{t}, u_h - I_2^h u)$ ,  $e = (e(t), e(u)) \doteq e_h + \eta$ , 则根据相容性和定理 4.1 有

$$\begin{aligned} & \nu(\alpha \|\mathbf{e}_t\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla e_u\|_0^2) + \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu}{\tau h_K^2 + \nu} \|e_u\|_{0,K}^2 \leq B_\delta(e_h; e_h) = B_\delta(e - \eta; e_h) \\ & = -B_\delta(\eta; e_h) \leq |B_\delta(\eta; e_h)| = |\nu(\alpha \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0 + \alpha \|\nabla \eta_u\|_0) \|\mathbf{e}_t\|_0 + \alpha \|\nabla e_u, \eta_{\mathbf{t}}\| \\ & \quad + (1 - \alpha) \|\nabla \eta_u, \nabla e_u\| + \tau(\eta_u, e_u) - \sum_{K \in J_h} (\tau \eta - \nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}, \mathbf{s}_K(\tau e_u - \nu \nabla \cdot \mathbf{e}_t))_K| \\ & \leq \nu \alpha (\|\eta_{\mathbf{t}}\|_0 + \|\nabla \eta_u\|_0) \|\mathbf{e}_t\|_0 + \nu(\alpha \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0 + (1 - \alpha) \|\nabla \eta_u\|_0) \|\nabla e_u\|_0 \\ & \quad + \left| \sum_{K \in J_h} \left( \tau - \frac{\tau^2 h_K^2}{\tau h_K^2 + \nu} \right) (\eta_u, e_u)_K \right| + \left| \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu h_K^2}{\tau h_K^2 + \nu} (\nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}, e_u)_K \right| \\ & \leq \nu \alpha \cdot (\|\eta_{\mathbf{t}}\|_0 + \|\nabla \eta_u\|_0) \|\mathbf{e}_t\|_0 + \nu(\alpha \cdot \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0 + (1 - \alpha) \cdot \|\nabla \eta_u\|_0) \|\nabla \mathbf{e}_u\|_0 \\ & \quad + \left| \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu}{\tau h_K^2 + \nu} (\eta_u, e_u)_K \right| + \left| \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu}{\tau h_K^2 + \nu} (h_K^2 \nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}, e_u)_K \right| \\ & \leq \nu \alpha \cdot \left( \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0^2 + \|\nabla \eta_u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_t\|_0^2 \right) + \nu \cdot \left( \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla \eta_u\|_0^2 \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \|\nabla \mathbf{e}_u\|_0^2 + \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu}{\tau h_K^2 + \nu} \|\eta_u\|_{0,K}^2 + \frac{1}{4} \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu}{\tau h_K^2 + \nu} \|e_u\|_{0,K}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu h_K^4}{\tau h_K^2 + \nu} \|\nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}\|_{0,K}^2 + \frac{1}{4} \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu}{\tau h_K^2 + \nu} \|e_u\|_{0,K}^2 \\
& \leq \frac{\nu}{2} (\alpha \|e_{\mathbf{t}}\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla e_u\|_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu}{\tau h_K^2 + \nu} \|e_u\|_{0,K}^2 \\
& \quad + \nu \cdot \left( \alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0^2 + \|\nabla \eta_u\|_0^2 \right) \\
& \quad + \sum_{K \in J_h} \frac{\tau \nu}{\tau h_K^2 + \nu} (\|\eta_u\|_{0,K}^2 + h_K^4 \|\nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}\|_{0,K}^2).
\end{aligned}$$

注意到上面不等式右端的前两项正好是左端项的一半, 两端同除以  $\nu$ , 便可得到

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( (\alpha \|e_{\mathbf{t}}\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla e_u\|_0^2) + \sum_{k \in J_h} \frac{\tau}{\tau h_K^2 + \nu} \|e_u\|_{0,K}^2 \right) \\
& \leq \alpha \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0^2 + \|\nabla \eta_u\|_0^2 + \sum_{K \in J_h} \frac{\tau}{\tau h_K^2 + \nu} (\|\eta_u\|_{0,K}^2 + h_K^4 \|\nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}\|_{0,K}^2).
\end{aligned}$$

如果在上式的两端同时加上

$$\frac{1}{2} (\alpha \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla \eta_u\|_0^2) + \sum_{k \in J_h} \frac{\tau}{\tau h_K^2 + \nu} \|\eta_u\|_{0,K}^2,$$

那么由三角不等式可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left( (\alpha \|e(\mathbf{t})\|_0^2 + (1 - \alpha) \|\nabla e(u)\|_0^2) + \sum_{k \in J_h} \frac{\tau}{\tau h_K^2 + \nu} \|e(u)\|_{0,K}^2 \right) \\
& \leq \alpha \left( \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0^2 + \frac{3}{2} \|\nabla \eta_u\|_0^2 + \frac{3}{2} \sum_{K \in J_h} \frac{\tau}{\tau h_K^2 + \nu} (\|\eta_u\|_{0,K}^2 + h_K^4 \|\nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}\|_{0,K}^2) \\
& \leq \alpha \left( \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0^2 + \frac{3}{2} \|\nabla \eta_u\|_0^2 \\
& \quad + \frac{3}{2} \sum_{K \in J_h} \frac{\tau h_K^2}{\tau h_K^2 + \nu} \left( \frac{1}{h_K^2} \|\eta_u\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}\|_{0,K}^2 \right) \\
& \leq \alpha \left( \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \|\eta_{\mathbf{t}}\|_0^2 + \frac{3}{2} \|\nabla \eta_u\|_0^2 + \frac{3}{2} \sum_{K \in J_h} \left( \frac{1}{h_K^2} \|\eta_u\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\nabla \cdot \eta_{\mathbf{t}}\|_{0,K}^2 \right) \\
& \leq Ch^2 (\|u\|_2^2 + |\mathbf{t}|_1^2).
\end{aligned}$$

注意到引理 2.1, 我们便证明了本定理中的误差估计.

**注 4.1.** 当用三角形元素剖分区域  $\Omega$  时, 定义  $V_h$  为分片线性三角元空间,  $\mathbf{T}_h$  为分片常数元空间, 则格式  $Q_h$  仍可使用. 同理, 上述分析仍成立. 此时  $\nabla u_h$  在每个

三角形单元上为常数, 故在每个三角形单元  $K$  上有

$$\int_K \nabla u_h \nabla v_h = \int_K \nabla u_h \cdot \int_K \nabla v_h / \text{meas } \Omega, \quad \forall v_h \in V_h.$$

结合注 2.1, 可知此时的格式  $Q_h$  与 [1] 中的格式完全一致.

## § 5. 数值算例

我们考虑一种其解在很狭小的区段内发生陡然变化的问题, 与 [1] 中的测试算例中情况很相似. 不同的是已知本问题的真解, 通过计算比较了用经典 Galerkin 方法与我们的新方法所求的解的不同震荡情况:

$$\text{真解 } u = \begin{cases} 1.0, & 0.007 \leq x \leq 1.0, 0.007 \leq y \leq 1.0. \\ 1.0 - \frac{(x - 0.007)^3}{0.007^3}, & 0.0 \leq x \leq 0.007, 0.007 \leq y \leq 1.0. \\ 1.0 - \frac{(y - 0.007)^3}{0.007^3}, & 0.0 \leq y \leq 0.007, 0.007 \leq x \leq 1.0. \\ \left(1.0 - \frac{(x - 0.007)^3}{0.007^3}\right) \cdot \left(1.0 - \frac{(y - 0.007)^3}{0.007^3}\right), & 0.0 \leq x \leq 0.007, 0.0 \leq y \leq 0.007. \end{cases}$$

$\nu = 10^{-5}, \tau = 1.0$ .  $f$  由方程  $Q$  即可确定.

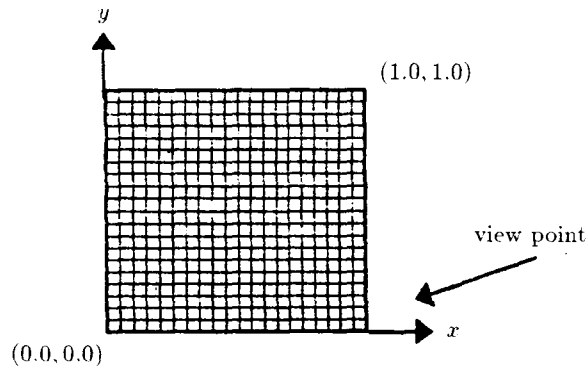


图 1

如图 1 所示, 求解的区域  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , 将此区域剖为  $20 \times 20$  个正方形单元,  $h_K = 0.05\sqrt{2}$ . 下面定义  $h_0 = 0.025$ , 分别用经典的 Galerkin 方法和计算格式  $Q_h$  (取参数  $\alpha = 0.5$ ) 试算, Galerkin 算法所得的数值解绘于图 2, 而用我们构造的稳定化算法 ( $Q_h$ ) 所得的数值解绘于图 3.



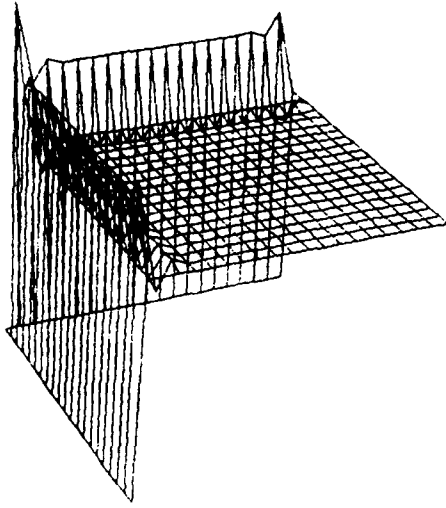


图 2

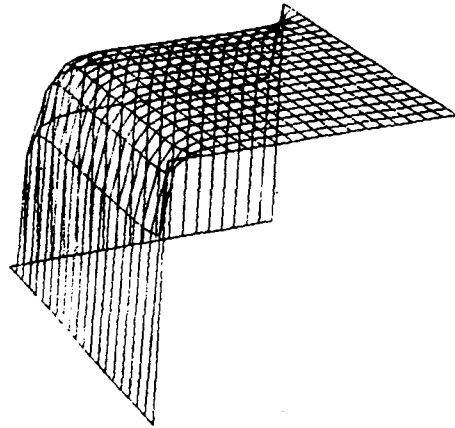


图 3

由真解的表达式可以看出：真解仅在  $x = 0.007$  和  $y = 0.007$  两条线附近有剧烈的单调的变化。用 Galerkin 算法求得的解在这两条线附近产生了显著的数值抖动，而算法  $(Q_h)$  所得的数值解很好地消除了这种数值抖动。

### 参 考 文 献

- [1] Leopoldo P. Franca, C. Farhat, Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **123** (1995), 299—308.
- [2] C. Johnson, U. Navert, J. Pitkaranta, Finite element methods for linear hyperbolic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **45** (1984), 285—312.
- [3] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, G.M. Hulbert, A new finite element formulation for computational fluid dynamics, VII. the Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **73** (1989), 173—189.
- [4] V. Girault, P.a. Raviart, *Finite Element Method for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms* (Springer, Berlin, 1986).
- [5] L.P. Franca, S.L. Frey, Stabilized finite element methods, II. The incompressible Navier-Stokes Equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **95** (1992), 253—276.
- [6] 李开泰, 马逸尘, 数理方程 HILBERT 空间方法, 西安交通大学出版社, 1992.
- [7] 周天孝, 基于鞍点问题对偶组合的有限元法及其理论, 待发表.