线性规划内点法的进展和影响*1)

魏 紫 銮
（中国科学院计算中心）

RECENT DEVELOPMENTS OF INTERIOR ALGORITHMS FOR LINEAR PROGRAMMING

Wei Zi-luan
(Computing Center, Academia Sinica)

Abstract

Recent developments in theory and computational practice of interior algorithms for linear programming are reviewed. It is shown that various interior algorithms, such as primal and dual projective algorithms, affine algorithms, and algorithms based on the method of centers, can all be derived from the logarithmic barrier method.

1. 引　　言

线性规划是运筹学中出现较早、较为重要的分支之一，它是处理在线性等式和不等式约束下线性目标函数的极值问题. 自本世纪四十年代单纯形方法问世以来，线性规划已被广泛地应用于军事、工业、运输、通讯、城市规划、经济管理和政府的科学决策等方面.特别是大型电子计算机的出现和数值线性代数中稀疏矩阵计算技术的发展，为线性规划的应用开辟了更广阔的天地. 据估计目前全世界每年耗费在求解大小各种类型的线性规划问题的资金约为十亿美元. 同时线性规划的技术还被应用于解决其它领域中的问题，如最优逼近、离散规划、随机规划、网络计算及自动控制等问题. 它已成为工业工程、科学管理、运筹学和计算机科学等其它学科的重要组成部分. 对线性规划的研究能够经久而不衰，其主要原因是由于它在理论和实践上所起的重要作用. 特别是近年来求解线性规划问题新的多项式时间算法的出现，对线性规划内点法的研究在理论和实践上都有很大的突破. 它所产生的影响不仅是线性规划的本身，而且还将波及与它相关的其它学科.

本文摘要地综述近年来线性规划内点法在理论和实际计算方面的进展，并着重讨论应用对数障碍函数方法求解线性规划问题和其它各种内点法之间的关系. 如原始、对偶

* 1990 年 4 月 26 日收到.
1）本课题得到国家自然科学基金的部分资助.

射影方法、中心点方法和原始对偶内点法等．还叙述了应用对数障碍函数法求解标准线性规划与新的多项式时间算法之间的等价性．对于内点法的实际计算效果，虽然没有比单纯形算法快五十倍的结果，但是各种不同内点法的数值试验的报告表明它们都比单纯形法要快若干倍．最后，讨论目前尚存在的一些问题及对其它领域研究工作的影响．

2. 对数障碍函数法和 Karmarkar 算法的等价性

由线性规划的基本理论可知线性规划的原始问题和它的对偶问题之间存在着十分密切的关系．因而，研究在不同的变换下线性规划的原始、对偶及原始对偶的不同形式的内点法及其实现方法是很自然的． 然而最有趣的是各种内点法均可由对数障碍函数法推出，只不过对所选取的障碍参数要有限制．本节讨论对标准形式的线性规划问题，对数障碍函数法和射影变换下内点法的等价性．

现在考虑应用对数障碍函数法求解以下线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\, c^T x, \\ &s.t.\ Ax = b, \\ &x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

定义与其相应的极小化问题

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min} F(x) = c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln x_i, \\ &s.t. Ax = b, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\mu(>0)$ 是障碍参数．设 x^* 是问题 (2.1) 的有限最优解，且对固定的 $\mu, x^*(\mu)$ 是 (2.2) 的最优解，则有

$$\lim_{\mu\to 0} x^*(\mu) = x^*.$$

为求解问题 (2.2)，设 $x > 0$，且 $Ax = b$．如 $\bar{x}$ 是下一迭代点，定义

$$\bar{x} = x + \alpha \cdot \Delta x \tag{2.3}$$

其中 Δx 是 n 维搜索方向，α 为步长．确定 Δx 和 α，使得 $\bar{x} > 0, A\bar{x} = b$，且 $F(\bar{x}) < F(x)$．若选取 Δx 为牛顿搜索方向，即极小化 $F(x)$ 的台劳展开的二阶近似，Δx 可由求解以下二次规划问题得到

$$\begin{aligned} &\min_{\Delta x \in R^n} g^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x, \\ &s.t.\ A\Delta x = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $g = \nabla F$，$H = \nabla^2 F$．由最优性条件有

$$g + H\Delta x = A^T y,$$

其中 y 是 $Ax = b$ 的拉格朗日乘子．于是 $\Delta x, y$ 满足方程

$$\begin{bmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}.$$

若 H 为非奇异，则有

$$AH^{-1}A^T y = AH^{-1} g,\ H\Delta x = A^T y - g. \tag{2.5}$$

由 $F(x)$ 的定义可见

$$g(x) = c - \mu D^{-1}e,\ H(x) = \mu D^{-2}, \tag{2.6}$$

其中 $D = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$, $e = (1, 1, \cdots, 1)^T$. 当 $x > 0$ 时, H是正定. 由 (2.5)—(2.6) Δx 可以唯一确定

$$\Delta x = -\frac{1}{\mu} DPDC + DPe, \tag{2.7}$$

其中

$$P = I - DA^T(AD^2A^T)^{-1}AD, \tag{2.8}$$

I 是 n 阶单位矩阵. 选择适当的 α 值就得到 (2.2) 的一近似解 $\bar{x}(\mu) = x + \alpha \cdot \Delta x$. 调整 μ 的值,又可以得到另一解, 当 μ 趋于零时, $\bar{x}(\mu)$ 收敛到 x^*. [4, 6] 中分别叙述了这样的算法,但并没有得到计算复杂性是多项式的理论结果.

为了说明对数障碍函数法与新多项式时间算法之间的等价性,引入以下变换:

$$\hat{x} = (e^TD^{-1}x + 1)^{-1}D^{-1}x,\ \hat{x}_{n+1} = (e^TD^{-1}x + 1)^{-1}. \tag{2.9}$$

其相应的逆变换为

$$x = \hat{x}_{n+1}^{-1}D\hat{x}.$$

于是问题 (2.1) 的约束变为

$$\begin{aligned} AD\hat{x} - b\hat{x}_{n+1} &= 0, \\ e^T\hat{x} + \hat{x}_{n+1} &= 1, \\ \hat{x}, \hat{x}_{n+1} &\geq 0. \end{aligned}$$

很明显,原空间中的 x 点变为 $\hat{x}$ 空间中的中心点

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}.$$

若对问题 (2.1) 的最优解有一较佳的下界估计值 β, 使 $\beta \geq -c^Tx^*$, 于是考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}\ & e^TD\hat{x} + \beta\hat{x}_{n+1}, \\ s.t\ & AD\hat{x} - b\hat{x}_{n+1} = 0, \\ & e^T\hat{x} + \hat{x}_{n+1} = 1, \\ & \hat{x}, \hat{x}_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

它的近似极小点可以表示为:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{x}'_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha Q_B \begin{pmatrix} Dc \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

其中

$$Q_B = I - B^T(BB^T)^{-1}B, \tag{2.11}$$

$$B = \begin{bmatrix} AD & -b \\ e^T & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

由 (2.11)—(2.12) 不难推得

$$Q_B \begin{bmatrix} Dc \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} PDc \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{\beta + e^T\bar{P}Dc}{1 + e^T\bar{P}e}\right)\begin{pmatrix} \bar{P}e \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{c^Tx + \beta}{n+1}\right)\begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

其中

$$\bar{P} = DA^T(AD^2A^T)^{-1}AD.$$

由 (2.10) 式可见

$$\hat{x}' = \frac{1}{n+1} e + \alpha \left\{ \frac{c^T x + \beta}{n+1} e - \left(\frac{e^T \bar{P} Dc + \beta}{1 + e^T \bar{P} e} \right) \bar{P} e - PDc \right\}$$

$$= \left[\frac{1}{n+1} + \alpha \left(\frac{c^T x + \beta}{n+1} - \frac{e^T \bar{P} Dc + \beta}{1 + e^T \bar{P} e} \right) \right] e$$

$$+ \alpha \left[\left(\frac{e^T \bar{P} Dc + \beta}{1 + e^T \bar{P} e} \right) Pe - PDc \right].$$

令 $\lambda = \frac{c^T x + \beta}{n+1}$，$\delta = \frac{e^T \bar{P} Dc + \beta}{1 + e^T \bar{P} e}$，于是

$$\hat{x}' = \left[\frac{1}{n+1} + \alpha(\lambda - \delta) \right] e + \alpha(\delta Pe - PDc),$$

$$\hat{x}'_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \alpha(\lambda - \delta).$$

应用 (2.9) 式定义的逆变换易见

$$x' = (\hat{x}'_{n+1})^{-1} D \hat{x}' = De + \alpha(\hat{x}'_{n+1})^{-1}(\delta DPe - DPDc)$$

$$= x + \alpha\delta(\hat{x}'_{n+1})^{-1} \left(DPe - \frac{1}{\delta} DPDc \right).$$

因为 $\hat{x}'_{n+1} > 0$，令 $\alpha' = \alpha\delta / \hat{x}'_{n+1}$，与 (2.7) 式相比较可见当 $\delta = \mu$ 时，搜索的方向 Δx 完全是相同的．当然 δ 的值必须是正的，而且单调地趋于零．所以要使射影变换的方法与相应的障碍函数法完全一致，必须选取适当的 β 值，使得 δ 的值总是正的．Gay 给出了计算 β 值的方法，并证明对于这样选取的 β，仅要 $O(nL)$ 次迭代就可以保证解的收敛性．Gonzaga 直接应用对数障碍函数方法，并证明了存在 $\mu_0 > 0, 0 < \rho < 1$，和 α，只要按照 (2.7) 式选取 $\Delta x, x' = x + \alpha\Delta x, \mu' = \rho\mu$，则仅要 $O(\sqrt{n} L)$ 次迭代就可以使所产生的迭代序列收敛到最优点 x^*．

由以上所述可见射影变换下的内点法和对数障碍函数之间能建立等价的关系，其主要原因是在原空间中产生的搜索方向 Δx 是中心向量 DPe 和最速下降方向 $-DPDc$ 的组合．如果对数障碍函数法中障碍参数 $\mu = 0$，显然有

$$\Delta x = -DPDc.$$

这就是仿射变换下的内点法．它最初是由苏联的 I. I. Dikin 于 1967 年提出来的，近年来又被作为新多项式时间算法的变形而进一步研究．本方法的优点是可以直接对线性规划的标准形式问题求解，但只有在非退化的假设下才能保证其收敛性． 特别有趣的是 Megido 和 Shub 发现当本方法应用于解 Klee-Minty 问题时，如果初始点选取太靠近可行顶点，要用指数次幂的迭代次数才能收敛到最优解． 然而只要其搜索方向再加上 DPe 的一适当倍数就可以得到多项式时间的计算复杂性．

3. 对偶和原始对偶内点法

现在来讨论求解线性规划的对偶和原始对偶内点法．由上节的算法可见，当算法产

生的点列由一个内点移到另一内点时，其搜索的方向是由中心向量和最速下降方向组合而成的．对于对偶和原始对偶内点法，也有类似的结论．先考虑对偶内点法．问题(2.1)的对偶问题是

$$\mathrm{Max}\, b^T y,$$

$$s.t\begin{cases} A^T y + v = c, \\ v \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

类似地定义其相应的对数障碍函数

$$\mathrm{Max} F(y, \mu) = b^T y + \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(c_i - a_i^T y), \tag{3.2}$$

其中 a_i 是矩阵 A 的第 i 列．若以 W 表示对角矩阵，其元素是对偶松弛变量 v_i．于是容易推得

$$\nabla F_Y = b - \mu A W^{-1} e,$$

$$\nabla^2 F = -\mu A W^{-2} A^T.$$

假设 y 是问题(3.1)的一严格内点，对给定的 μ，应用牛顿法求(3.2)的近似解，即有

$$\bar{y} = y + \Delta y, \tag{3.3}$$

其中

$$\Delta y = \frac{1}{\mu}(AW^{-2}A^T)^{-1} b - (AW^{-2}A^T) AW^{-1} e, \tag{3.4}$$

其中 $-(AW^{-2}A^T)^{-1}AW^{-1}e$ 是中心向量．

Gill et al.、Yamashita 和 Gay 等人讨论这一方法的不同形式．与此相类似的是 J. Renegar 提出的中心点方法．我们概要地叙述其基本思想及与障碍函数法的等价性．

设 $S = \{y: e - A^T y \geqslant 0, y \in R^m\}, S \neq \phi$ 且有界．令

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \ln(e_i - a_i^T y).$$

定义． ξ 是 S 的中心点，如果 $\xi \in S^0$，且对所有 $y \in S^0, f(\xi) \geqslant f(y)$，其中 S^0 是 S 的严格可行内点．

当 S 是紧致集，且 S^0 是非空时可知 $f(y)$ 是严格凹，并存在唯一的中心点．若 $y \in S^0$，则应用牛顿法可得到中心点的近似估计

$$\bar{y} = y + \Delta y,$$

其中 $\bar{y} \in S^0$，且 $\Delta y = -(\nabla^2 f)^{-1} \nabla f$.

Renegar 定义 $f(y, \beta)$ 为

$$f(y, \beta) = \ln\ln(b^T y - \beta) + \sum_{i=1}^{n} \ln(c_i - a_i^T y),$$

则有

$$\nabla f_Y(y\beta) = \frac{l}{b^T y - \beta} \cdot b - AW^{-1} e, \tag{3.5}$$

$$\nabla^2 f_Y(y, \beta) = -\left(AW^{-2}A^T + \frac{l}{(b^T y - \beta)^2} bb^T\right), \tag{3.6}$$

其中 β 是目标函数极小值 c^Tx^* 的一下界估计．把 (3.5)、(3.6) 代入牛顿公式计算得

$$\Delta y = \eta(AW^{-2}A^T)^{-1}b - (AW^{-2}A^T)^{-1}AW^{-1}e, \tag{3.7}$$

其中

$$\eta = \frac{b^T(AW^{-2}A^T)^{-1}AW^{-1}e + b^Ty - \beta}{\dfrac{(b^Ty-\beta)^2}{l} + b^T(AW^{-2}A^T)^{-1}b}. \tag{3.8}$$

显然可以选取参数 β 使得 $\eta > 0$，由此可见对数障碍函数法和中心点法之间可以建立起等价关系．[7] 给出选取 β 的方法使得只要 $O(\sqrt{n}L)$ 次的迭代就能保证迭代点列的收敛性．

当 $\mu = 0$ 时，(3.4)式中的 $\Delta y = (AW^{-2}A^T)^{-1}b$，这就是在仿射变换下的对偶内点法．

原始对偶内点法是对问题 (3.1) 的拉格朗日函数直接应用最优性条件．设

$$F(x,y,v,\mu) = b^Ty + \mu\sum_{i=1}^{n}\ln vi - x^T(A^Ty + v - c),$$

其一阶条件为

$$\begin{aligned} F_x &= c - A^Ty - v = 0, \\ F_y &= b - Ax = 0, \\ F_v &= \mu e - DWe = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

由于 x、y、v 均为可行的内点，应用牛顿方法即有

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ W & 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e - DWe \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

由 (3.10) 可见

$$\begin{aligned} D^{-1}W\Delta x - A^T\Delta y &= \mu D^{-1}e - We, \\ A\Delta x \qquad\qquad &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由 (2.1)、(3.11) 立即可以推得

$$\Delta y = (AW^{-1}DA^T)^{-1}(b - \mu AW^{-1}e). \tag{3.12}$$

于是由 (3.10) 和 (3.12) 可见

$$\begin{aligned} \Delta v &= -A^T\Delta y, \\ \Delta x &= \mu W^{-1}e - W^{-1}D\Delta v - De. \end{aligned} \tag{3.13}$$

由 (3.12) 可知搜索方向是由中心向量和下降方向的线性组合而成的．只有 $DWe = \mu e$ 成立时所得到的解才是最优的．因为当 μ 趋于零时 x_iv_i 亦趋于零，很明显这时互补松弛性条件满足，x,y,v 又都是可行解，其必为最优解．这一算法最初是由 N. Megiddo 于 1986 年提出来的，以后又有一些人深入进行研究．与原始、对偶的情况相似当 $\mu = 0$ 时，本算法是在仿射变换下的原始对偶内点法．Monteiro 和 Adler 已证明了其计算复杂性是 $O(n^3L)$．

原始对偶的另一内点方法是由 Ye 于 1988 年提出的．以下的函数 $\phi(x、v)$ 是被用于度量原始和对偶的解与最优解间的差异．

$$\phi(x、v) = \sqrt{n}\log(x^T v) + \sum_{i=1}^{n}\log(x^T v/x_i v_i) - n\log n.$$

其基本思想是找一初始点 $(x^{(0)}, y^{(0)}, v^{(0)})$，使得 $\phi(x^{(0)}, v^{(0)}) \leqslant O(\sqrt{n}L)$，然后经过 $O(\sqrt{n}L)$ 次的迭代使得 $x^T v < 2^{-L}$. 由于 x, y 都是可行的，所以得到的解是最优的。

现在已经可以清楚地看到所有内点法的搜索方向Δ均可由以下方程组求得

$$(AK^2A^T)\Delta = t, \tag{3.14}$$

其中 $t = \delta_1 q_1 + \delta_2 q_2$，$\delta_1$、$\delta_2$ 是参数，q_1, q_2 分别是最速下降方向和中心向量.

当 $K = D$ 时由(3.14)式所定义的Δ是原始问题的内点法的搜索方向；当 $K = W^{-1}$、$K = W^{-1}D$ 时Δ分别是对偶问题和原始对偶问题的内点法的搜索方向. 而且当参数 δ_1, δ_2 取不同值时内点法的形式亦不相同.

4. 内点法的实际有效性

Bell 实验室最初公布新的多项式时间算法时还宣布新的方法的实际运行比 IBM 的商业软件包 MPSX 的单纯形法快五十倍以上. 由于他们对计算机实现算法的程序和试验的数值问题保密，使得人们都以疑虑的眼光来看待这一事实. 时至今日，人们不仅在理论上对内点法及其各种变形研究的较为清楚，而且在实践上也证实了各种形式的内点法的有效性. 一般说来一种新的理论从产生到应用要经过较长的过程，而内点法只经过四年的发展就形成了商业软件包. 由此可见内点法的潜在生命力.

现在我们来回顾内点法数值试验的进展情况. 最初应用内点法进行试验时发现其所需的迭代次数较少，然而每次迭代耗时较多，因而无法与现有单纯形法的商业软件包相匹敌. 第一个发现内点法比单纯形法稍快些的是 T.J. Waston (IBM) 研究中心的 E. Barnes, 他在 1985 年底应用仿射变换下的原始内点算法对中等大小的问题进行计算发现内点法比 MPSX 的单纯形法稍快一点. 这表明内点法具有实用性. 1986.4 Bell 实验室的 S. Chen 和 R. Vanderbei 报告他们对一些问题的计算结果，他们应用与 E. Barnes 相同的内点法和斯坦福大学的 MINOS 单纯形法进行比较，对一般的中等问题内点法比单纯形法快六倍，对具有特殊结构的问题(规模从一百个约束二百个变量到六千六百个约束一万一千个变量)内点法比单纯形法快约三十倍. 1986.5 加州伯克莱大学的 I. Adler 等人宣布他们应用仿射变换下的对偶内点算法对三十一个问题 (从二十个约束五十个变量至一千一百五十个约束五千四百个变量)进行的数值试验比 MINOS(4、0) 快约三倍. 1986.8 Bell 通讯研究中心的 A. Morton 和 C. Monma 应用与 I. Adler 同样的方法对相同的问题进行计算比 MINOS(5、0) 也快约三倍. 1987.8 在 Bellcore 的 K. Mcshane, D. Shanno 和 C. Monma 应用原始对偶障碍函数方法对同样的三十一个问题进行试验，其平均运行速度比 MINOS(5、0) 快约四倍. 1988.9 Shanno, Choi 和 Monma 对原始对偶障碍函数算法给出新的实现方法，其中包括处理有界变量等特殊结构问题，改进后的算法比原来的减少约 15%的迭代次数. 1988.4 斯坦福大学的 Gill, Marxen, Moorray, Saunders 和 Wright 等应用原始障碍函数法和对偶障碍函数法对五十三个问题(从二十个约速三十个变量至二千二百个约束九千八百个变量)进行试验，其平均速度比

MINOS(5,3) 快约 2.4 倍.

最有重要意义的是内点算法已被研制为商业软件包. 1988.8 Arizona 大学的 R. Marsten 应用仿射变换下的对偶内点法研制一称为 OBI 的软件包. 它可以用于求解大型的线性规划问题. 实践已证实这是一个非常成功的软件包. 同时 Bell 实验室宣布已创立一种新的名为 KORBX, 标价九百万美元的软硬件结合的系统. 它的软件系统含有仿射变换下的原始、对偶内点算法和原始对偶障碍函数方法. 据称它可以求解具有五十万个变量以上的特殊结构形式的线性规划问题. 另外,内点算法的向量化、并行化的实现方面也有很大的进展. 目前已在 Cray, Alliant 向量、并行机, FPS 机和 IBM3090 机上运行的内点方法具有很高的效率,还能解决一些串行算法无能为力的问题.

尽管内点算法能成功地求解各种实际的线性规划问题, 但对单纯形法的重要性仍不能忽视. 如对求解参数线性规划、线性多目标规划、线性规划最优解的灵敏度分析等问题单纯形法仍是一重要的工具,也是内点算法目前无法替代的.

5. 线性规划内点法的启迪

线性规划内点法在理论和实践上的重大突破, 把人们几十年来一直在寻找穿越可行区域内部而比单纯形法更有效的算法的幻想变为现实. 它不仅影响线性规划的今后发展,而且对其它与之有关的学科也会产生深刻的影响.

大量的数值试验显示,不管线性规划问题是几百个变量或是上万个变量,应用内点法求解时只要相当少的迭代步数(如 30～60 次)就可以达到最优解的邻域. 这一现象与理论分析的计算复杂性结果之间的巨大差异说明进一步改正理论上的计算复杂性是可能的. 有人猜测迭代次数可能是 $O(\max(L, \log n))$, 其中 n 是变量的个数.

内点法是应用非线性的技术求解线性的问题. 很自然, 这一方法能否用于解决线性互补问题、二次规划和一般的非线性规划而具有多项式时间的计算复杂性,对于一些特殊情况(如凸二次规划等) 有类似的结果,对于一般情况, 在理论和实践上均需进行深入的探索. 这也是今后值得注意的研究方向.

多面体、线性不等式和线性规划分别是从几何、代数和最优化三个不同的方面描述三者之间的内在联系. 线性规划内点法在理论和实践上所取得的进展必然对多面体和线性不等式的研究产生深刻的影响. 例如多面体的内点容易建立它与顶点、边和面之间的关系,而点、边和面的确定与多目标规划、参数规划是紧密相关的. 另一值得注意的事实是所有整数规划或混合整数规划问题的解都是在其相应线性规划的可行区域的内部达到. 因而对多面体的内点、顶点、边和面的性质的研究将有重要的理论和实际意义.

内点法是从可行区域的一严格内点开始,由一个内点搜索至另一内点,使得势函数值逐次减少. 当其值足够小时迭代的点就位于最优解的邻域内, 算法就可以终止. 应用拉格朗日乘子值的估计就可以确定迭代的点列是否位于最优解的邻域. 这种对拉格朗日乘子的估计不仅对线性规划问题是有意义的, 而且对非线性规划问题的求解也是重要的.

尽管在理论上各种内点算法都是很完美的, 然而要在计算机上实现某一算法使它能成功地解决各种形式的线性规划问题却非易事. 它需要细心地应用数据结构、稀疏矩阵

的技巧和数据处理等方法来实现算法的具体计算步验。在每次迭代中如何高效率地求解(3.14)式中的搜索方向△是至关重要的。由于只是K的元素在每次迭代中发生变化，如何应用矩阵秩一修正的方法求解(3.14)仍是值得深入研究的。

参考文献

[1] I. Adler, N. Karmarkar, M. G. C. Resende, G. Veiga, An implementation of Karmarkar's algorithm for linear Programming, Report 86-8, Operations Research Center, University of California at Berkeley, CA, 1986.

[2] E. R. Barnes, A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear programming problems, Math. Prog. 36, (1986), 174—182.

[3] I. I. Dikin, Iterative solution of problems of linear and quadratic programming, Soviet Mathematics Doklady 8, (1967), 674—675

[4] P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, J. A. Tomlin, M. H. Wright, On projected Newton methods for linear programming and equivalence to karmarkar's projective method, Math. Prog. 36, (1986), 183—209.

[5] N. Megiddo, ed. Progress in Mathematical Programming, Springer-Verlag, Berlin. (1989).

[6] M. Iri, H. Imai, A multiplicative barrier method for linear Programming, Algorithmica 1, (1986), 455—482.

[7] J. Renegar, A polynomial-time algorithm based on Newton method for linear Programming, Math. Prog. 40, (1988), 59—93.

[8] M. J. Todd, Recent developments and new directions in linear Programming, Technical Report 829, School of OR&IE, Cornell University, 1988.

[9] R. J. Vanderbei, M. S. Meketon, B. A. Freedman, A modification of Karmarkar's algorithm, Algorithmica 1, (1986), 395—409.

[10] Z. L. Wei, An exact solution to linear Programming using an interior point method, J. of Computational mathematics. 5: 3(1987).

[11] Z. L. Wei, An interior point method for linear programming, J. of Computational Mathematics, 5: 4 (1987).

[12] Z. L. Wei, A method of finding a strictly feasible solution for linear constraints, J. of Computational Mathematics, 8: 1(1990).

[13] Y. Ye, An $O(n^3L)$ potential reduction algorithm for linear Programming, manuscript, The University of Iowa, 1989.