线性互补问题内点算法*

徐 成 贤
(西 安 交 通 大 学)

INTERIOR POINT ALGORITHMS FOR LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEMS

Xu Cheng-xian
(Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong University)

Abstract

With the development of interior point algorithms for linear programming, various interior point algorithms for linear complementarity problems are recently proposed. This paper is a survey of these algorithms. These algorithms can be classified into potential reduction algorithms and path-following algorithms, and are presented in a unified form. Differences among different algorithms are the choices of parameters. Related concepts, such as potential functions, centered path, the types of matrices in complementarity problems solvable by interior point algorithms and so on, are given.

1. 引　　言

给定矩阵 $M\in R^{n\times n}$, 向量 $q\in R^n$, 求 $(x,y)\in R^n\times R^n$ 使得

$$y=Mx+q,\quad (x,y)\geqslant 0,\quad x^Ty=0 \tag{1.1}$$

的问题称线性互补问题(记为 LCP), 它在线性规划,凸二次规划,双矩阵对策及工程领域有直接的应用[2,17,11].

著名的背包问题 (Knapsack) 可转化为一个M为 p_0-矩阵的 LCP 问题[14],对一般的矩阵 M, LCP 问题是 NP-完备的[2,14]. LCP 问题用迭代法求解,对M为对称的线性互补问题, Mangasarian[18] 与 Pang[22] 给出了一类对M作正则Q分裂的迭代法, 在M为严格同位正 (strictly copositive) 或同位正加 (copositive plus) 且可行域非空时,方法产生的无穷点列(不一定可行)以R线性收敛率收敛于问题的解集[10]. LCP 问题也可转化为线性规划问题用线性规划法求解[5,19,23],或用互补转轴类方法求解[4,17,26], 但这些方法在

* 1993 年 6 月 22 日收到.

最坏情形下都是指数时间算法[24]. 近年来，随线性规划多项式内点算法的出现[11]和研究[1,12,20,25,27等],对 LCP 问题求解的多项式内点算法相继出现，包括有降势函数法（Potential Reduction Algorithms)[14,15,16] 和路径跟踪法 (Path-Following Algorithms)[13]. 本文就求解 LCP 问题的内点算法作一综述，基本结构如下：第 2 节介绍内点算法可解问题矩阵M的类型;第 3 节给出势函数和中心路径的概念;第 4 节叙述 LCP 内点算法的基本格式;第 5 节叙述搜索方向的计算；第 6 节介绍步长的选取;第 7 节叙述精确解的确定；第 8 节简述算法的理论复杂性;第 9 节给出两个具体的内点算法;第10节叙述算法的初始化问题.

2. 矩阵M的类型

记问题(1.1)的可行域为

$$\Gamma(M,q)=\{(x,y)\mid y=Mx+q,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x\in R^n,y\in R^n\}.$$

一般说来,可行域非空的 LCP 问题未必有解[1]. 对任意 $q\in R^n$, LCP 总有解的矩阵 M 称为 Q-矩阵[8]. 对任意 $q\in R^n$, LCP 有唯一解的充要条件为M是所有主子式全为正的 P-矩阵.

一个有效的 LCP 算法，经过求解应或者能确定问题的一个解，或者能断定问题无解. Lemke[17] 的互补转轴法可处理M是 P-矩阵和正半定（PSD）的 LCP 问题[6]. 内点算法则可处理M为 P_0-矩阵的一类更广泛的 LCP 问题.

所有主子式均非负的矩阵M称为 P_0-矩阵,M为 P_0-矩阵的充要条件是对每一非零向量 $\xi\neq 0$，存在指标 i 使得 $\xi_i\neq 0$ 且 $\xi_i[M\xi]_i\geqslant 0$，这里 $[M\xi]_i$ 表示向量 $M\xi$ 的第 i 个量. M为 P-矩阵的充要条件是对每一非零向量 $\xi\neq 0$，存在 i 使得 $\xi_i[M\xi]_i>0$. 若M为 P_0-矩阵,则矩阵

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -M & I \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

非奇,其中 Y,X 为以向量 $y>0$, $x>0$ 的分量为对角元的对角矩阵.

P_0-矩阵除包含 P-矩阵外,还包括:（1）斜对称矩阵(SS).（2）正半定矩阵(PSD).（3）P_*-矩阵.（4）列充分矩阵(CS),其中

$$P_*=\bigcup_{k\geqslant 0}p_*(k)=\bigcup_{k\geqslant 0}\left\{M\mid \xi^TM\xi+4k\sum_{i\in I(\xi)}\xi_i[M\xi]_i\geqslant 0,\ \forall\xi\neq 0\right\},$$

$$I(\xi)=\{i\mid \xi_i[M\xi]_i>0\},$$

$$CS=\{M\mid 由\ \xi_i[M\xi]_i\leqslant 0\ 推出\ \xi_i[M\xi]_i=0\}.$$

在上述各类矩阵之间有下述包含关系:

$$SS\subset PSD\subset PSD\cup P\subset P_*\subset CS\subset P_0, \tag{2.2}$$

$$P\cap SS=\phi,\quad P\cap PSD\neq\phi \tag{2.3}$$

在M为 P_*-矩阵且 $\Gamma(M,q)\neq\phi$ 时,问题 LCP 必有解.

3. 势函数与中心路径

记 LCP 问题(1.1)可行域 $\Gamma(M,q)$ 的内部为

$$\Gamma^+(M,q)=\{(x,y)\mid y=Mx+q,x>0,y>0\}.$$

在集合 $\Gamma^+(M,q)$ 上定义的函数

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (n+\rho)\log x^T y-\sum_{i=1}^{n}\log(x_i y_i)-n\log n \\ &= \rho f_{cp}(x,y)+f_{cen}(x,y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

称为问题(1.1)的势函数[14]，其中

$$f_{cp}(x,y)=\log x^T y, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} f_{cen}(x,y) &= n\log x^T y-\sum_{i=1}^{n}\log(x_i y_i)-n\log n \\ &= n\log\frac{x^T y/n}{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i y_i\right)^{\frac{1}{n}}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

由算术-几何平均不等式，对任意 $(x,y)\in\Gamma^+(M,q)$ 有 $f_{cen}(x,y)\geqslant 0$，由此得

$$f(x,y)\geqslant\rho f_{cp}(x,y)\quad 或\quad x^T y\leqslant e^{f(x,y)/\rho}. \tag{3.4}$$

集合 $\Gamma^+(M,q)$ 中使函数 $f_{cen}(x,y)$ 取零值的点集合称为问题(1.1)的中心路径，记为

$$r=\{(x,y)\mid f_{cen}(x,y)=0,(x,y)\in\Gamma^+(M,q)\}. \tag{3.5}$$

由 $f_{cen}(x,y)$ 的定义式(3.3)，$(x,y)\in r$ 的充要条件为 $XYe=\mu e,\mu>0$. 因此中心路径又可表示为

$$r=\{(x,y)\mid XYe-\mu e=0,\mu>0,(x,y)\in\Gamma^+(M,q)\}. \tag{3.6}$$

在 $\Gamma^+(M,q)\neq\phi$ 时，中心路径 r 为 $\Gamma^+(M,q)$ 中一条以 μ 为参变量的光滑曲线. 曲线上的点 $(x(\mu),y(\mu))$ 在 $\mu\to 0^+$ 时收敛于问题(1.1)的解(见图 1).

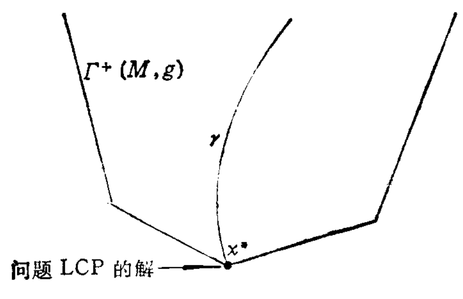

图 1　$\Gamma^+(M,q)$ 与中心路径 r

$\Gamma^+(M,q)$ 中不属于 r 的点 (x,y)，函数值 $f_{cen}(x,y)(>0)$ 反映了该点偏离中心路径 r 的程度. 对于给定的 $\alpha>0$，集合

$$N(\alpha)=\{(x,y)\mid f_{cen}(x,y)\leqslant\alpha,(x,y)\in\Gamma^{+}(M,q)\}$$

定义了路径 r 的一个“角形”邻域. 对较小的 α 值，邻域 $N(\alpha)$ 较窄，对较大的 α 值，邻域 $N(\alpha)$ 较宽. 当 $\alpha=+\infty$ 时定义 $N(+\infty)=\Gamma^{+}(M,q)$.

中心路径除上述定义外,还有一些等价的定义方式[14]. 但由于定义的函数不同,不同定义的路径邻域对同一 α 值是不同的,有关它们之间的关系可见[14]第4章.

4. LCP 内点算法基本格式

LCP 内点算法中的降势函数法根据式(3.4)要求产生的点列满足

$$f(x^{(k)},y^{(k)})\leqslant f(x^{(k-1)},y^{(k-1)})-\delta,(x^{(k)},y^{(k)})\in\Gamma^{+}(M,q). \tag{4.1}$$

在 $f(x^{(k)},y^{(k)})\to-\infty$ 时有 $x^{(k)T}y^{(k)}\to 0$，这里 δ 为一与 k 无关的常数. 路径跟踪法产生的点列满足

$$\{(x^{(k)},y^{(k)})\}\subset N(\alpha), \tag{4.2}$$

并沿中心路径 r 收敛于 LCP 的解.

尽管构造两类算法的出发点不同,却可用统一的格式给出,其基本格式如下:

(1) 给定 $\rho>0,\varepsilon>0$，初始点 $(x^{(1)},y^{(1)})\in\Gamma^{+}(M,q)$，置 $k=1$.

(2) 若 $x^{(k)T}y^{(k)}\leqslant\varepsilon$，终止.

(3) 确定$(x^{(k)},y^{(k)})$ 处一个搜索方向 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$.

(4) 沿方向 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 线性搜索,确定步长 λ_k.

(5) 令 $(x^{(k+1)},y^{(k+1)})=(x^{(k)},y^{(k)})+\lambda_k(dx^{(k)},dy^{(k)})$，置 $k=k+1$，转(2).

注①对初始可行内点 $(x^{(1)},y^{(1)})$，降势函数法一般无具体要求，路径跟踪法则要求 $(x^{(1)},y^{(1)})\in r$ 或 $(x^{(1)},y^{(1)})\in N(\alpha)$.

②降势函数法要求沿 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 使势函数取得较大的下降,路径跟踪法则要求沿 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 使新点接近中心路径 r.

③路径跟踪法要求 $(x^{(k+1)},y^{(k+1)})\in N(\alpha)$，步长 λ_k 一般只能取较小值，降势函数法要求 $(x^{(k+1)},y^{(k+1)})$ 使 $f(x,y)$ 有较大的下降,步长 λ_k 一般较大.

④算法确定的仅是 LCP 的一个近似解. 若 $\varepsilon=2^{-2L}$，从所得的近似解经 $O(n^3)$ 次算术运算可确定 LCP 的一个精确解[13],这里 L 为问题的输入规模,如用 $[\alpha]$ 表示不小于 α 的最小整数,则

$$L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\log(|m_{ij}|+1)]+\sum_{i=1}^{n}[\log(|q_i|+1)]+2[\log(n+1)]$$
$$+n(n+1).$$

5. 搜索方向的计算

式(3.6)定义的中心路径 r 可表示成方程组

$$\begin{aligned}&XYe-\mu e=0,\\&y-Mx-q=0,\quad x>0\end{aligned} \tag{5.1}$$

的解 $(x(\mu),y(\mu))$ 对不同 $\mu>0$ 在 $\Gamma^+(M,q)$ 中所形成的轨迹. 路径跟踪法用阻尼牛顿法求解上述非线性方程组并使 μ 单调降趋于 0，即搜索方向 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 取为牛顿方程组

$$\begin{bmatrix} Y^{(k)} & X^{(k)} \\ -M & I \end{bmatrix}\begin{pmatrix} dx^{(k)} \\ dy^{(k)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu e - X^{(k)}Y^{(k)}e \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

的解，并取 $\mu=\beta x^{(k)^T}y^{(k)}/n$，$0\leqslant\beta\leqslant 1$，在 $x^{(k)^T}y^{(k)}\to 0$ 时有 $\mu\to 0$. 式(5.2)左端的系数矩阵在 M 为 P_0-矩阵时非奇，对任意右端向量方程组(5.2)有唯一解

$$\begin{aligned} dx^{(k)} &= (Y^{(k)}+X^{(k)}M)^{-1}\left(\beta\frac{x^{(k)^T}y^{(k)}}{n}e - X^{(k)}Y^{(k)}e\right), \\ dy^{(k)} &= M\,dx^{(k)}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

式(5.3)给出的 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 也是降势函数法在点 $(x^{(k)},y^{(k)})$ 处所取的方向，不同仅为 β 的取值. 由计算可得

$$\nabla f_{cp}(x^{(k)},y^{(k)})^T\begin{pmatrix} dx^{(k)} \\ dy^{(k)} \end{pmatrix}=-(1-\beta) \tag{5.4}$$

$$\nabla f_{cen}(x^{(k)},y^{(k)})^T\begin{pmatrix} dx^{(k)} \\ dy^{(k)} \end{pmatrix}=-\beta\frac{x^{(k)^T}y^{(k)}}{n}\|\nu^{(k)}\|^2, \tag{5.5}$$

$$\nabla f(x^{(k)},y^{(k)})^T\begin{pmatrix} dx^{(k)} \\ dy^{(k)} \end{pmatrix}=-\rho(1-\beta)-\beta\frac{x^{(k)^T}y^{(k)}}{n}\|\nu^{(k)}\|^2, \tag{5.6}$$

$$\nu^{(k)}=\frac{n}{x^{(k)^T}y^{(k)}}(X^{(k)}Y^{(k)})^{\frac{1}{2}}e-(X^{(k)}Y^{(k)})^{-\frac{1}{2}}e,$$

即 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 为势函数 $f(x,y)$ 在点 $(x^{(k)},y^{(k)})$ 处的一个下降方向.

如 $\beta=1$，式(5.4),(5.5)表明 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$(记为 $(dx_c^{(k)},dy_c^{(k)})$) 不是函数 $f_{cp}(x,y)$ 的下降方向，而是从点 $(x^{(k)},y^{(k)})$ 直接指向中心路径的方向. 如 $\beta=0$，$(dx^{(k)},dy^{(k)})$(记为 $(dx_a^{(k)},dy_a^{(k)})$) 不具指向中心路径的特性，却使 $f_{cp}(x,y)$ 能较快的下降. 对 $0\leqslant\beta\leqslant 1$ 的方向 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 则可表为两方向的凸组合，即

$$(dx^{(k)},dy^{(k)})=\beta(dx_c^{(k)},dy_c^{(k)})+(1-\beta)(dx_a^{(k)},dy_a^{(k)})$$

(见图 2). 由方向 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 的下降性与指心性对 $\beta\in[0,1]$ 的依赖关系，路径跟踪法一般取较大的 β 值，尤其当点 $(x^{(k)},y^{(k)})$ 离中心路径稍远或位于路径邻域 $N(\alpha)$ 的边界附近时. 对于降势函数法鉴于对势函数，尤其是函数 $f_{cp}(x,y)$ 有较大下降的要求，β 的取值一般较小.

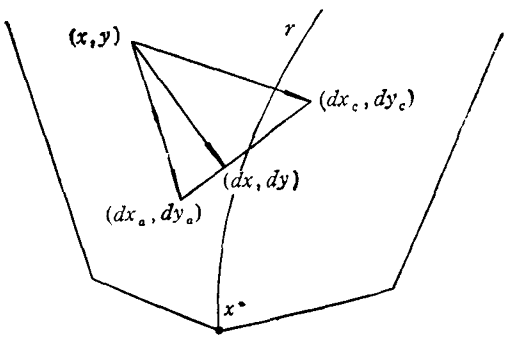

图 2　搜索方向 (dx_c,dy_c),(dx_a,dy_a) 与 (dx,dy).

按式(5.3)计算 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 时需求矩阵 $(Y^{(k)}+X^{(k)}M)$ 的逆，工作量为 $O(n^3)$. 如通过用 $X^{(k)},Y^{(k)}$ 的近似 $\tilde{X}^{(k)},\tilde{Y}^{(k)}$，并采用秩一修正由 $(\tilde{Y}^{(k-1)}+\tilde{X}^{(k-1)}M)$ 的逆求得 $(\tilde{Y}^{(k)}+\tilde{X}^{(k)}M)$ 的逆，可把每次迭代的平均计算工作量降为 $O(n^{2.5})$[13].

6. 步长 λ_k 的确定

步长 λ_k 的理想取法应为一维优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f((x^{(k)},y^{(k)})+\lambda(dx^{(k)},dy^{(k)})), \\ \text{s.t.} \quad & (x^{(k)},y^{(k)})+\lambda(dx^{(k)},dy^{(k)})\in N(\alpha) \end{aligned} \tag{6.1}$$

的最优解 λ^*(降势函数法中 $\alpha=+\infty$). 实际上求这样的 λ^* 既不可行也无必要. 有效的方法为对(6.1)中的函数用适当的 λ 的二次函数近似后，把所得近似问题的最优解作为步长 λ_k 或作为进一步线性搜索的初始步长.

令 $\tau\in[0,1]$,定义

$$\theta(\tau)=\sup\{\lambda>0\,|\,\tau x^{(k)}+\lambda dx^{(k)}\geqslant 0,\tau y^{(k)}+\lambda dy^{(k)}\geqslant 0\},$$

则对任意 $\lambda\in[0,\theta(\tau)]$ 有 $(x^{(k)},y^{(k)})+\lambda(dx^{(k)},dy^{(k)})\in\Gamma^+(M,q)$. 在区间 $[0,\theta(\tau)]$ 上定义 λ 的二次函数

$$q_{cen}(\lambda)=f_{cen}(x^{(k)},y^{(k)})-\beta\frac{x^{(k)^T}y^{(k)}}{n}\|v^{(k)}\|^2\lambda+(nt+\theta)\lambda^2,$$

$$q(\lambda)=f(x^{(k)},y^{(k)})-(1-\beta)\lambda+t\lambda^2,$$

则对任意的 $\lambda\in[0,\theta(\tau)]$ 有

$$f_{cen}((x^{(k)},y^{(k)})+\lambda(dx^{(k)},dy^{(k)}))\leqslant q_{cen}(\lambda),$$

$$f((x^{(k)},y^{(k)})+\lambda(dx^{(k)},dy^{(k)}))\leqslant q(\lambda),$$

其中 $t=dx^{(k)^T}dy^{(k)}/x^{(k)^T}y^{(k)},\theta=[\|X^{(k)^{-1}}dx^{(k)}\|^2+\|Y^{(k)^{-1}}dy^{(k)}\|^2]/[2(1-\tau)]$. 取问题

$$\begin{aligned} \min \quad & q(\lambda), \\ \text{s.t.} \quad & q_{cen}(\lambda)\leqslant\alpha,0\leqslant\lambda\leqslant\theta(\tau) \end{aligned} \tag{6.2}$$

的解作为步长 λ_k，或初始步长继续进行线性搜索. 在多数的实际算法中，为减少算法的运算工作量,步长 λ_k 是按一定方式给定的，并满足使势函数下降或者使点接近中心路径收敛于问题的解.

7. 精确解的确定

LCP 内点算法能确定一个满足

$$x^{(k)^T}y^{(k)}\leqslant\varepsilon,\quad(x^{(k)},y^{(k)})\in\Gamma^+(M,q) \tag{7.1}$$

的近似解. 若 $\varepsilon=2^{-2L}$, 定义指标集

$$I=\{i\,|\,x_i^{(k)}<\sqrt{\varepsilon}\},\quad J=\{j\,|\,y_j^{(k)}<\sqrt{\varepsilon}\},$$

则 $IUJ=N=\{1,2,\cdots,n\}$, 且存在 LCP 的一个解 (x^*,y^*) 满足

$$x_i^*=0,\forall i\in I,\quad y_j^*=0.\quad\forall j\in J, \tag{7.2}$$

这样的解 $(x^{(k)},y^{(k)})$ 可从满足(7.1)的 $(x^{(k)},y^{(k)})$ 经 $O(n^3)$ 次运算确定.

精确解产生法:

(1) 对满足(7.1)的 $(x^{(k)},y^{(k)})$ 确定指标集 $I,J,I^c=N\backslash I,J^c=N\backslash J$, 置 $(x,y)=(x^{(k)},y^{(k)})$.

(2) 若矩阵 $[-I_c, M_c]$ 列满秩,解方程组

$$y = Mx + q, \quad (x,y) \geqslant 0, x_i = 0, i \in I, y_j = 0, j \in J, \tag{7.3}$$

得解 (x^*, y^*)；否则

(3) 确定齐次方程组

$$\eta = M\xi, \quad \xi_i = 0, i \in I, \quad \eta_j = 0, j \in J \tag{7.4}$$

的一个非零解.

(4) 计算 $\theta = \min\{x_i/\xi_i, \xi_i > 0, i \in I^c, y_j/\eta_j, \eta_j > 0, j \in J^c\}, \hat{I} = I \cup \{i \in I^c | x_i/\xi_i = \theta\}, \hat{J} = J \cup \{j \in J^c | y_j/\eta_j = \theta\}, (\hat{x}, \hat{y}) = (x, y) - \theta(\xi, \eta)$.

(5) 令 $(x,y) = (\hat{x}, \hat{y}), I = \hat{I}, J = \hat{J}, I^c = N \backslash I, J^c = N \backslash J$, 转(2).

这里 I_c 与 M_c 分别表示由矩阵 I 和M的指标在 I^c 与 J^c 中的列构成的矩阵. 在上述算法中，方程组(7.3)的求解需 $O(n^3)$ 次运算. 对方程组(7.4)，初次求解时用高斯消去需 $O(n^3)$ 次运算,其后每步用选主元转轴法,需 $O(n^2)$ 次运算,至多 n 步,不超过 $O(n^3)$ 次运算,因此总的运算量为 $O(n^3)$ 阶.

8. 算法复杂性

求 LCP 的降势函数法和路径跟踪法都是多项式时间算法. 在假设(1)M为 P_0- 矩阵；(2) $\Gamma^+(M,q) \neq \phi$；(3) 对每一 $t \geqslant 0$,水平集 $L = \{(x,y) | x^T y \leqslant t, (x,y) \in \Gamma^+(M,q)\}$ 有界之下,若算法所用的参数满足 $\rho > 0, \beta \in [0,1]$ 且在 $(x,y) \in r$ 时 $\beta \neq 1$, 所取步长 λ_k 为

$$\lambda_k = \omega\tau/[h(\beta)\sqrt{1 + 2\Delta(\beta)}], \quad \tau \in [0,1], \tag{8.1}$$

$$\omega = \min\{\sqrt{x_i^{(k)} y_i^{(k)}} | i = 1, 2, \cdots, n\},$$

$$\Delta(\beta) = \max\{0, -dx^{(k)^T} dy^{(k)}/h(\beta)\},$$

$$h(\beta) = [(1-\beta)^2 x^{(k)^T} y^{(k)} + (\beta\|v^{(k)}\| x^{(k)^T} y^{(k)}/n)^2]^{\frac{1}{2}},$$

则有

$$f_{cen}(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \leqslant f_{cen}(x^{(k)}, y^{(k)}) - Q_{cen}(\tau), \tag{8.2}$$

$$f_{cp}(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \leqslant f_{cp}(x^{(k)}, y^{(k)}) - Q_{cp}(\tau), \tag{8.3}$$

$$f(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \leqslant f(x^{(k)}, y^{(k)}) - Q(\tau), \tag{8.4}$$

(见[14]),这里 $Q_{cen}(\tau), Q_{cp}(\tau), Q(\tau)$ 分别为 τ 的二次多项式,其系数与 n, β, ρ 有关而与 k 无关. 对给定的 $\alpha > 0$ 或 $\alpha = +\infty$, 选取适当的 $\tau \in [0,1]$ 可使 $f_{cen}(x^{(k)}, y^{(k)}) - Q_{cen}(\tau) \leqslant \alpha$, 则对任意 $k \geqslant 1$ 有

$$f_{cen}(x^{(k)}, y^{(k)}) \leqslant \alpha \tag{8.5}$$

成立. 对如此选定的 τ, 由式(8.3)及(8.4)可得

$$f_{cp}(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \leqslant f_{cp}(x^{(k)}, y^{(k)}) - \delta_{cp}, \tag{8.6}$$

$$f(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \leqslant f(x^{(k)}, y^{(k)}) - \delta, \tag{8.7}$$

这里 δ_{cp}, δ 为与 n, β, ρ, τ (从而 α) 及点 $(x^{(1)}, y^{(1)})$ 有关而与 k 无关的常数. 若在算法的终止准则(7.1)中取 $\varepsilon = 2^{-2L}$, 则在(8.6)式成立时算法至多经 $O(L/\delta_{cp})$ 次迭代终止.

而在(8.7)式成立时算法至多经 $O(\rho L/\delta)$ 次迭代终止. 由于每次迭代需 $O(n^3)$ 次运算, 在求得满足(7.1)的 $(x^{(k)},y^{(k)})$ 后,再经 $O(n^3)$ 次运算可得 LCP 的精确解,算法总的运算工作量为 $O(Ln^3/\delta_{cp})$ 或 $O(\rho Ln^3/\delta)$. 在计算 $(dx^{(k)},dy^{(k)})$ 时如取 $X^{(k)},Y^{(k)}$ 的近似 $\tilde{X}^{(k)},\tilde{Y}^{(k)}$, 并用秩一修正时,总的运算工作量分别降为 $O(Ln^{2.5}/\delta_{cp})$和 $O(\rho Ln^{2.5}/\delta)$.

9. 两个具体算法

本节给出求解 LCP 两个具体的内点算法,它们一个是路径跟踪法[13],一个是降势函数法[15]. 这两个算法的步骤同第 4 节的基本算法,但各有关参数及步长 λ_k 的选取不同.

(1) 降势函数法[15]. 参数选取如下: $\rho=\sqrt{n},\beta=n/(n+\sqrt{n})$, $\alpha=+\infty$, 即 $N(\alpha)=\Gamma^+(M,q)$, 步长 $\lambda_k=\omega\tau$, $\tau\in(0,1)$ (ω 的定义见第 8 节). 方法产生的点列 $\{(x^{(k)},y^{(k)})\}\subset\Gamma^+(M,q)$, 使式(8.7)以 $\delta\geqslant 0.2$ 成立. 方法的计算复杂性为 $O(\sqrt{n}\,L)$ 次迭代,运算工作量为 $O(n^{3.5}L)$ 或 $O(n^3L)$.

(2) 路径跟踪法[13].参数选取为 $\rho=1,\beta=(1-\sigma/\sqrt{n}),\sigma=\alpha/(1-\alpha),0<\alpha\leqslant 0.1$, 步长 $\lambda_k=1$. 方法产生的序列 $\{(x^{(k)},y^{(k)})\}\subset N(\alpha)$ 满足式(8.6),其中 $\delta_{cp}\geqslant-\log(1-\sigma/(6\sqrt{n}))$. 方法的计算复杂性为 $O(\sqrt{n}\,L)$ 次迭代, 运算工作量为 $O(n^{3.5}L)$或 $O(n^3L)$.

10. 初　始　化

对一个待求解的 LCP 问题,一般难于知道 $\Gamma^+(M,q)$是否非空. 即使已知 $\Gamma^+(M,q)\neq\phi$, 也难于得到一个可行内点启动有关的内点算法. 通常的做法为构造一个满足第 8 节假设(1),(2)和(3)的辅助线性互补问题[14]

$$y'=M'x'+q',\quad (x',y')\geqslant 0,\quad x'^Ty'=0, \tag{10.1}$$

并从(10.1)的解来确定原问题的解,这里

$$M'=\begin{bmatrix}M & I\\ -I & 0\end{bmatrix},\quad q'=\begin{bmatrix}q\\ \tilde{q}\end{bmatrix}\in R^{2n},\quad x'=\begin{pmatrix}x\\ \tilde{x}\end{pmatrix}\in R^{2n},\quad y'=\begin{pmatrix}y\\ \tilde{y}\end{pmatrix}\in R^{2n},$$

$\tilde{x},\tilde{y}\in R^n$ 为人工变量, $\tilde{q}\in R^n$ 为正向量满足

$$\tilde{q}>x,\quad \forall x\in B,$$

其中 B 为方程组 $y=Mx+q$, $(x,y)\geqslant 0$ 的所有基本可行解所形成的集合. $\tilde{q}$ 的一个取法为 $\tilde{q}=\dfrac{2^{L+1}}{n^2}e$, 这时点

$$\begin{gathered}0<x^{(1)}<\tilde{q},\quad \tilde{x}^{(1)}>0,\quad \tilde{x}^{(1)}>-Mx^{(1)}-q,\\ y^{(1)}=Mx^{(1)}+\tilde{x}^{(1)}+q,\quad \tilde{y}^{(1)}=\tilde{q}-x^{(1)}\end{gathered} \tag{10.2}$$

属于集合 $\Gamma^+(M',q')$ 而可作为求解问题(10.1)的初始可行内点. 在M为 p_0-矩阵时, M' 仍为 p_0-矩阵,且由于(10.2)给出的点$(x'^{(1)},y'^{(1)})\in\Gamma^+(M',q')$知 $\Gamma^+(M',q')$非空,且对任意 $t\geqslant 0$, 集合 $L'=\{(x',y')\,|\,x'^Ty'\leqslant t,\ (x',y')\in\Gamma^+(M',q')\}$ 有界[14], 故问题(10.1)满足第 8 节的假设(1),(2)和(3). 在用内点算法求得(10.1)的解 $(x'^*,y'^*)=(x^*,\tilde{x}^*,$

$y^*, \tilde{y}^*$) 后，若 $\tilde{x}^* = 0$，则 (x^*, y^*) 为问题(1.1)的解，如果 $\tilde{x}^* \neq 0$，且M为列充分矩阵时，则问题(1.1)无解。

参 考 文 献

[1] Al-Khayyal F. A., Necessary and sufficient conditions for existense of complementary solutions and characterizations of matrix classes Q and Q_0, Mathematical Programming, Vol. 51, No. 2, (1991) 247—255.

[2] M. L. Balinsk, R. W. Cottle, Mathematical Programming Study 7: Complementarity and fixed point problems, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[3] S. J. Chung, A note on the complexity of LCP: the LCP is strongly NP-complete, Technical Report 792, Dept. of Industrial Engineering and Operations Engineering, The University of Michigan, 1979.

[4] R. W. Cottle, G. B. Dantzig, Complementary pivot theory of mathematical programming, J. Linear Algebra Applns, Vol. 1, (1968) 103—125.

[5] R. W. Cottle, J. S. Pang, On solving linear complementarity problem as linear programs, Mathematical Programming Study, Vol. 7, (1978) 88—107.

[6] R. W. Cottle, The principle pivoting method revisited, Mathematical Programming, Vol. 48, No. 3, (1990) 369—385.

[7] C. C. Gonzaga, An algorithm for solving linear programming program in $O(n^3L)$ operations, in Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods, N. Megiddo, ed. 1989, Springer-Verlag, New York, 1—28.

[8] M. S. Gowda, On Q-matrices, Mathematical Programming, Vol. 49, No. 1, 1990/1991, 139—141.

[9] D. Den Hertog C. Roos, A survey of search directions in interior point methods for linear programming, Mathematical Programming, Vol. 52, No. 3, (1991) 481—510.

[10] A. N. Iusem, On the convergence of iterative methods for symmetric linear complementarity problems, Mathematical Programming, Vol. 59, No. 1, (1993) 33—48.

[11] N. Karmarkar, A new polynomial time algorithm for linear programming, Combinatorica, Vol. 4, (1984), 373—395.

[12] M. Kojima, S. Mizuno, A. Yoshise, A primal-dual interior point algorithm for linear programming, in Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods, N. Megiddo ed., 1989, Spring-Verlag, New York, 29—47.

[13] M. Kojima, S. Mizuno, A, Yoshise, A polynomial-time algorithm for a class of linear complementary problems, Mathematical Programming, Vol. 44, No. 1 (1989) 1—26.

[14] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma A. Yoshise, A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems, Lecture Notes in Computer Science, 538, 1991, Spring-Verlag, Berlin.

[15] M. Kojima, S. Mizuno, A. Yoshise, An $O(\sqrt{n}L)$ iteration potential reduction algorithm for linear complementarity problems, Mathematical Programming, Vol. 50, No. 3, (1991) 331—342.

[16] M. Kojima, N. Megiddo, Y. Ye, An interior point potential reduction algorithm for linear complementarity problem, Mathematical Programming, Vol. 54, No. 3, (1992) 267—279.

[17] C. E. Lemka, Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, Management Science, Vol. 11, (1965) 681—689.

[18] O. L. Mangasarian, Solution of symmetric linear complementarity problems by iterative methods, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 22, (1977) 465—485.

[19] O. L. Mangasarian, Characterization of linear complementarity problems as linear programs, Mathematical Programming Study, Vol. 7, (1978) 74—87.

[20] R. D. C. Monteiro, I. Adler, Interior path-following primal-dual algorithms, Part I: Linear programming, Mathematical Programming, Vol. 44, (1989) 43—66.

[21] J. S. Pang, I. Kaneto W. P. Hallman, On the solution of some (parametric) linear complementarity problems with applications to profolio selection, structural engineering and actuarial graduation, Mathematical Programming, Vol. 16, No. 3, (1979) 325—347.

[22] J. S. Pang, Necessary and sufficient conditions for the convergence of iterative methods for the linear complementarity problem, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 44, (1984) 1—17.

[23] P. M. Pardalos J. B. Rosen, Global optimization approach to the linear complementarity problem, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Vol. 9, (1983) 341—353.

[24] P. M. Pardalos, S. A. Vavasis, Open questions in complexity theory for numerical optimization, Mathematical Programming, Vol. 57, No. 2, (1992) 337—339.

[25] J. Renegar, A polynomial-time algorithm based on Newton's method for linear programming, Mathematical Programming, Vol. 40, (1988) 59—94.

[26] R. Saigal, On the class of complementary cones and Lemka's algorithm, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 23, (1972) 46—50.

[27] M. J. Todd, Y. Ye, A centered projective algorithm for linear programming, Mathematics of Operations Research, Vol. 15, (1990) 508—529.