线性连续回归模型基于 Laguerre 多项式逼近的 Markov 参数估计*1)

赵明旺
(武汉钢铁学院自动化系)

MARKOV PARAMETER ESTIMATION FOR LINEAR CONTINUOUS REGRESSIVE MODELS VIA LAGUERRE-POLYNOMIAIS APPROXIMATION

Zhao Ming-wang
(Department of Automation, Wuhan Iron and Steel University)

Abstract

First, the least-squares parameter estimation method for linear continuous regressive models disturbed with Wiener process via Laguerre-Polynomial approximation is proposed. Then, the correlativeness of the polynomial approximating values of Wiener process is discussed. Based on the correlative results of the approximating values of Wiener process, a Markov parameter estimation algorithm which can give an unbiased consistent estimate with the minimum covariance of the parameter estimation error is proposed, and applied to the parameter estimation problem of stochastic dynamical continuous systems in systems and control science. Finally, the computer simulation results show the effectiveness of the method.

一、引　言

正交多项式已成功地引入到可以归结为确定性连续回归模型的确定性连续系统的参数估计中[1-4]. 由于实际工程和社会系统大都存在着随机性的扰动和观测误差,故正交多项式在参数估计中的应用研究延伸到有随机性扰动的连续回归模型无疑是有着极大的理论和实际应用意义的.

本文讨论随机线性连续回归模型基于 Laguerre 多项式逼近的最小二乘参数估计.在得到了 Wiener 过程的 Laguerre 多项式逼近值的协方差阵后，本文将讨论能给出无偏

* 1993 年 9 月 10 日收到.
1) 冶金工业部理论研究基金资助项目.

一致且参数估计误差方差为最小的 Markov 估计方法.

二、最小二乘估计

考虑如下由随机微分方程描述的线性连续回归模型:

$$dy_t = dX_t^\tau \Theta + dw_t, t \geqslant 0, \tag{1}$$

其中 $y_t \in \mathbf{R}$; $X_t = [x_{1t}\ x_{2t}\ \cdots\ x_{nt}]^\tau \in \mathbf{R}^n$ 为回归数据向量;$\Theta = [\theta_1\ \theta_2\ \cdots \theta_n]^\tau \in \mathbf{R}^n$ 为回归参数向量; w_t 为连续随机扰动. 变量 y_t, X_t 和 w_t 均为零初值.

在本文中假设连续随机扰动 w_t 可用连续 Wiener 过程建模. 根据 Wiener 过程和伊藤(Ito)随机积分的定义,扰动 w_t 满足

$$E\left[\int_0^t f_1(s)dw_s\right] = 0, \tag{2}$$

$$E[(w_{t_4} - w_{t_2})(w_{t_3} - w_{t_1})] = (t_3 - t_2)\sigma^2, t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4, \tag{3}$$

$$E\left[\int_0^{t_1} f_1(s)dw_s \int_0^{t_2} f_2(s)dw_s\right] = \sigma^2 \int_0^{t_1} f_1(s)f_2(s)ds, t_1 \leqslant t_2, \tag{4}$$

其中随机积分均为伊藤积分, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为确定性的时间 t 的函数; σ^2 为 Wiener 过程的方差.

为便于讨论用随机微分方程描述的线性连续回归模型 (1) 的正交多项式逼近, 模型(1)经一次随机积分后可表示为

$$y_t = X_t^\tau \Theta + w_t,\ t \geqslant 0. \tag{5}$$

本节的问题是通过对模型(5)的连续过程 y_t 和 X_t 的观测及 Laguerre 多项式逼近来估计模型(5)的回归参数向量 Θ. 类似于文[2—4],下面先引入如下$[0, \infty)$区间的Laguerre 多项式基向量

$$\Phi_{(k)}(t) = [\Phi_0(t)\ \Phi_1(t)\ \cdots\ \Phi_k(t)]^\tau, \tag{6}$$

其中 $\Phi_0(t) = 1$, $\Phi_1(t) = 1 - \beta t, \cdots,$

$$\Phi_{i+1}(t) = \frac{e^{\beta t}}{(i+1)!}\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}}(t^{i+1}e^{-\beta t}) = \frac{[(2i+1-\beta t)\Phi_i(t) - i\Phi_{i-1}(t)]}{(i+1)}, i > 0.$$

上述定义的 Laguerre 多项式的正交性体现在[2-4]

$$\int_0^\infty \lambda(t)\Phi_i(t)\Phi_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ r_i = \dfrac{1}{\beta}, & i = j, \end{cases}$$

其中 $\lambda(t) = e^{-\beta t}$ 为 Laguerre 多项式的加权函数.

由计算数学可知, Laguerre 多项式不仅对连续过程有着良好的逼近完备性,而且有便于求积分运算的特点[2-5]. 下面给出对连续过程 y_t 的逼近式来说明如何利用 Laguerre 多项式逼近连续过程

$$y_t \approx Y_k^\tau \Phi_{(k)}(t), \tag{7}$$

其中

$$Y_k = [y_0\quad y_1\quad \cdots\quad y_k]^\tau,$$

$$y_i = \frac{1}{r_i}\int_0^\infty y_t \Phi_i(t)dt,\ i = 0, 1, \cdots, k. \tag{8}$$

由 y_t 的逼近向量 Y_k 可很方便地求得如下 y_t 的 i 重积分的 Laguerre 多项式逼近值：

$$\int_0^t \cdots \int_0^{s_{i-1}} y_{s_i} \mathrm{d}s_i \cdots \mathrm{d}s_1 = Y_k^\tau P_k^{i\tau} \Phi_{(k)}(t), \tag{9}$$

其中 P_k^i 为如下定义的 i 次积分矩阵[2-4]：

$$P_k^i = P_k^{i-1} P_k,\quad P_k^\tau \Phi_{(k)}(t) = \int_0^t \Phi_{(k)}(s)\mathrm{d}s. \tag{10}$$

由 Laguerre 多项式满足的微分递推关系可推得[2-5]

$$P_k = \frac{1}{\beta}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

因此，类似于前面 y_t 的逼近处理，由多项式基向量(6)逼近模型(5)后有如下逼近式：

$$Y_k = H_k \Theta + W_k, \tag{12}$$

其中

$$H_k = [X_0 \quad X_1 \quad \cdots \quad X_k]^\tau,\ X_i = [x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots \quad x_{in}]^\tau,\ i = 0,1,\cdots,k,$$

$$W_k = [w_0\ w_1\ \cdots\ w_k]^\tau,$$

$$x_{ij} = \frac{1}{r_i}\int_0^\infty x_{jt}\Phi_i(t)\mathrm{d}t,\ i = 0,1,\cdots,k, j = 1,2,\cdots,n, \tag{13}$$

$$w_i = \frac{1}{r_i}\int_0^\infty w_t \Phi_i(t)\mathrm{d}t, i = 0,1,\cdots,k. \tag{14}$$

由(11)式知，w_i 为连续 Wiener 过程 w_t 的 Laguerre 多项式逼近值且有

$$Ew_i = E\left[\frac{1}{r_i}\int_0^\infty \lambda(t)\int_0^t \mathrm{d}w_s \Phi_i(t)\mathrm{d}t\right] = 0, \tag{15}$$

即 w_i 可视为零均值噪声．因此，由 y_t 和 x_{jt} 的观测值可借助式(8)和(13)计算出逼近值 y_i 和 x_{ij}，然后利用最小二乘法估计出回归参数 Θ．综上所述，有如下连续回归模型(1)的基于 Laguerre 多项式的最小二乘参数估计算法过程：

步 1.　由 y_t 和 u_t 的连续观测值或离散采样值由数值积分法则[5]计算(8)和(13)式所示的 Laguerre 多项式逼近值；

步 2.　列写回归方程(12)中的矩阵 H_k；

步 3.　由最小二乘估计原理和式(12)，有如下模型(1)的参数估计算法：

$$\Theta_k = (H_k^\tau H_k)^{-1} H_k^\tau Y_k. \tag{16}$$

三、Markov 参数估计

由参数估计理论可知，当回归方程中的噪声为非白噪声时，最小二乘法不能得到一致的参数估计，但当已知扰动噪声向量的协方差矩阵时，Markov 参数估计方法能得到无偏一致且参数估计误差方差为最小的估计值[6]．因此，下面先给出关于逼近方程(12)中

扰动 w_t 的 Laguerre 多项式逼近值 W_k 的统计协方差矩阵的一个定理，然后讨论模型(1)的 Markov 参数估计.

定理 1. 逼近方程(12)中扰动 w_t 的 Laguerre 多项式逼近值 w_i 的相关性为(由于相关性的对称性,下式仅列出 $i \geqslant j$ 的情况)

$$E[w_iw_j]=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2}{2\beta}, & i=j=0,\\[2mm] \dfrac{\sigma^2}{2^{i+1}\beta}, & i>j=0\\[2mm] \displaystyle\sum_{r=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{j-1}\frac{(-1)^{r+s}(i-1)!(j-1)!\sigma^2}{(r+1)!(i-r-1)!r!(s+1)!(j-s-1)!s!2^{r+s+3}\beta}, & i\geqslant j>0.\end{cases} \tag{17}$$

证明. (1)首先,引入如下微分式:

$$\frac{d^k}{dt^k}(t^ie^{-\beta t})=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j i!k!\beta^j}{(i-k+j)!(k-j)!j!}t^{i-k+j}e^{-\beta t},\ k\leqslant i.$$

(2) 由于 $E[w_iw_j]$ 关于 i 和 j 对称，不失一般性，下面仅讨论 $i\geqslant j$ 的情况. 由(14)式,有

$$\begin{aligned}E[w_iw_j]&=\frac{1}{r_ir_j}E\left[\int_0^\infty\lambda(t)\int_0^t dw_s\Phi_i(t)dt\int_0^\infty\lambda(t)\int_0^t dw_s\Phi_j(t)dt\right]\\&=\beta^2E\left\{\int_0^\infty\left[\int_t^\infty\lambda(s)\Phi_i(s)ds\right]dw_t\int_0^\infty\left[\int_t^\infty\lambda(s)\Phi_j(s)ds\right]dw_t\right\}\\&=\beta^2\sigma^2\int_0^\infty\left[\int_t^\infty\lambda(s)\Phi_i(s)ds\right]\left[\int_t^\infty\lambda(s)\Phi_j(s)ds\right]dt.\end{aligned}$$

当 $i=j=0$ 时,有

$$E[w_0^2]=\beta^2\sigma^2\int_0^\infty\left[\int_t^\infty e^{-\beta s}ds\right]^2dt=\frac{\sigma^2}{2\beta}.$$

当 $i>j=0$ 时,有

$$\begin{aligned}E[w_iw_0]&=\beta^2\sigma^2\int_0^\infty\left[\int_t^\infty e^{-\beta s}e^{\beta s}\frac{d^i}{ds^i}(s^ie^{-\beta s})ds\right]\left[\int_t^\infty e^{-\beta s}ds\right]dt\\&=\frac{\beta^2\sigma^2}{i!}\int_0^\infty\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}(t^ie^{-\beta t})e^{-\beta t}dt\\&=\sum_{r=0}^{i-1}\frac{(-1)^r(i-1)!\beta^{r+1}\sigma^2}{(r+1)!(i-r-1)!r!}\int_0^\infty t^{r+1}e^{-2\beta t}dt=\frac{\sigma^2}{2^{i+1}\beta}.\end{aligned}$$

当 $i\geqslant j>0$ 时,类似于上面的推导,有

$$\begin{aligned}E[w_iw_j]&=\frac{\beta^2\sigma^2}{i!j!}\int_0^\infty\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}(t^ie^{-\beta t})\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}(t^je^{-\beta t})dt\\&=\sum_{r=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{j-1}\frac{(-1)^{r+s}(i-1)!(j-1)!\beta^{r+s+2}\sigma^2}{(r+1)!(i-r-1)!r!(s+1)!(j-s-1)!s!}\int_0^\infty t^{r+s+2}e^{-2\beta t}dt\\&=\sum_{r=0}^{i-1}\sum_{s=0}^{j-1}\frac{(-1)^{r+s}(i-1)!(j-1)!\sigma^2}{(r+1)!(i-r-1)!r!(s+1)!(j-s-1)!s!2^{r+s+3}\beta}.\end{aligned}$$

因此,(17)式得证(证毕).

由定理 1 可知,随机过程 w_t 的逼近值 w_k 的相关性矩阵为

$$E[W_kW_k^{\tau}] = \frac{\sigma^2}{\beta}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & \cdots \\ 1/4 & 1/4 & 1/16 & 0 & \cdots \\ 1/8 & 1/16 & 1/16 & 1/32 & \cdots \\ 1/16 & 0 & 1/32 & 1/32 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

故 Wiener 过程的逼近值 w_i 并不能视为白噪声序列而为有色噪声序列. 由参数估计理论可知[6],上节讨论的最小二乘估计是有偏的.

由参数估计理论知[6]，对于噪声模型及噪声的协方差阵已知的非白噪声扰动的回归方程，Markov 参数估计方法是非常有效的且能得到无偏一致估计，并能使参数估计误差方差为最小. Markov 估计方法的基本思想是将噪声的协方差阵的逆矩阵作为加权矩阵而求取系统的加权最小二乘估计. 因此基于 Markov 参数估计原理和逼近值 W_k 的协方差阵 $E[W_kW_k^{\tau}]$，有如下能得到无偏一致估计值的 Markov 参数估计算法.

$$\Theta_k = (H_k^{\tau}\Sigma_kH_k)^{-1}H_k^{\tau}\Sigma_kY_k, \tag{18}$$

其中加权矩阵 $\Sigma_k = (E[W_kW_k^{\tau}])^{-1}$.

四、仿　真

本节讨论上两节中所提出的基于 Laguerre 多项式逼近的连续回归模型的最小二乘估计和 Markov 估计的计算机仿真,并将上述估计方法推广至系统科学与控制科学领域中所讨论的随机连续动态系统的参数估计中.

例 1.　考虑如下连续回归模型:

$$dy_t = [dx_{1t} \quad dx_{2t} \quad dx_{3t}][3 \quad 2 \quad 1.5]^{\tau} + dw_t. \tag{19}$$

仿真过程如下: 1)先以步长为 0.005 的数值计算方法求解回归模型(19)的输出 y_t,其中 x_{it} 为两个不同频率的正弦信号合成的连续信号,随机扰动 dw_t 为 $[-\gamma dt, \gamma dt]$ 区间内均匀分布的白噪声.

2) 以步长为 0.08 获取前一步模型(19)输出计算中的 x_{it} 和 y_t 的观测值. 由于此时步长为上述数值计算时的 16 倍,故大致可认为估计中数据取自真正的随机连续回归模型的输入输出.

3) 选择适宜的参数 β 和仿真时间 T(一般应使 $e^{-\beta T}$ 尽可能小)，在区间$[0, T]$内用数值积分方法以步长 0.08 计算(8)式和(13)式，然后由(16)和(18)式分别求模型(19)的最小二乘估计和 Markov 估计. 仿真结果如表 1 所示. 在本文仿真中采用如下较简单的复化梯形数值方法计算(8)式和(13)式[5]:

$$\int_0^T x_s ds = \frac{h}{2}\left[x_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_{ih} + x_T\right], \quad nh = T. \tag{20}$$

仿真中 Laguerre 多项式基向量维数为 7,仿真时间段为$[0, 4.8s]$,$\beta = 2$.

例 2.　考虑如下系统科学与控制科学领域中的随机连续线性动态系统:

$$(1 + 3S + 2S^2)dy_t = 1.5u_tdt + dw_t, \tag{21}$$

其中 S 为伊藤随机积分算子.

由(21)式和前面讨论的 Laguerre 多项式的逼近过程,可得如下回归方程:

$$Y_k = -3P_kY_k - 2P_k^2Y_k + 1.5P_kU_k + W_k = H_k\Theta + W_k, \tag{22}$$

其中 Y_k, U_k 和 W_k 分别为 y_t, u_t 和 w_t 的 Laguerre 多项式逼近值向量, P_k^i 为(10)式所定义的 i 次积分矩阵,

$$\Theta = [3 \quad 2 \quad 1.5]^\tau, \quad H_k = [-P_kY_k \quad -P_k^2Y_k \quad P_kU_k].$$

因此,基于回归方程(22)可进行随机连续动态系统(21)的最小二乘估计和 Markov 估计.本例的仿真过程类似于例 1,其中的输入 u_t 为 $\sin(0.7t)+0.5\sin(0.2t)$. 仿真结果如表 2 所示. 由表 1 和表 2 可知, 本文提出的基于 Laguerre 多项式逼近的连续回归模型的参数估计算法是十分有效的,尤其是 Markov 估计方法更佳,估计误差更小.

表 1 计算机仿真结果

	最小二乘法			Markov 法		
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
$\gamma=0.5$	2.9936	2.0061	1.5032	3.0014	2.0011	1.4992
$\gamma=1.0$	2.9861	2.0135	1.5068	3.0035	2.0030	1.4971
$\gamma=2.0$	2.9647	2.0209	1.5183	3.0086	2.0074	1.4928
真 值	3.0	2.0	1.5	3.0	2.0	1.5

表 2 计算机仿真结果

	最小二乘法			Markov 法		
	a_1	a_2	b_1	a_1	a_2	b_1
$\gamma=0.1$	3.0214	2.0203	1.5148	3.0064	2.0138	1.5120
$\gamma=0.5$	3.0643	2.0956	1.5636	3.0107	2.0559	1.5353
$\gamma=1.0$	3.1111	2.1893	1.6237	2.9772	2.1005	1.5567
真 值	3.0	2.0	1.5	3.0	2.0	1.5

五、结 束 语

本文提出了有连续 Wiener 过程扰动的连续回归模型的基于 Laguerre 多项式逼近的最小二乘参数估计方法和 Markov 估计算法,并基于定理 1 所给出的 Wiener 过程的 Laguerre 多项式逼近值的相关性结果讨论了两种估计的一致性和最小方差性. 文中还将所提出的估计方法推广至系统科学与控制科学领域中所讨论的随机连续动态系统的参数估计中. 计算机仿真结果表明了本文方法的有效性.

参 考 文 献

[1] Unbehauen H, Rao GP, Continuous-time Approaches to System Identification-A Survey. Automatica, 1990; 26(1), 23—35.

[2] Hwang C, Shih YP, Parameter identification via Laguerre polynomials, Int J Systems Sci, 1982, 13, 209—217.
[3] Jha AN, Zaman S, Identification of linear distributed systems using Laguerre operational matrices, Int J Systems Sci, 1985, 16, 761—767.
[4] Ranganathan V, *et al*, Recursive parameter-estimation algorithms for bilinear and non-linear systems using a Laguerre-polynomial approach. Int J Control, 1986, 44, 419—426.
[5] 李庆扬等，数值分析，华中工学院出版社，武汉，1983.
[6] 方崇智，萧德云，过程辨识，清华大学出版社，1988.