

# 线性系统的并行计算格式和频率响应分析<sup>\*1)</sup>

费景高

(北京计算机应用和仿真技术研究所)

## PARALLEL COMPUTATION SCHEMES FOR LINEAR SYSTEM AND FREQUENCY RESPONSE ANALYSIS

Fei Jinggao

(Beijing Institute of Computer Application and Simulation Technology 100854)

### Abstract

The parallel computation schemes are presented for the simulation model of the linear constant-coefficient subsystem in the application of the combination methods. For the simulation model and the related digital net, the formulas of the frequency response to the complex exponential inputs are derived.

**Key words:** Linear System, Digital Simulation, Algorithm, Frequency Response, Simulation Model, Digital Net

### § 1. 引言

许多动力学系统可以分成一系列快子系统和慢子系统,在进行数字仿真时,可以对这些子系统采用不同的数值积分方法和不同的积分步长,即采用组合算法.在图1表示出动力学系统分成一个快子系统和一个慢子系统的情形,其中慢系统采用积分步长 $T$ .快系统采用积分步长 $h, h = \frac{T}{L}$ ,  $L$ 为一个整数.慢子系统的输出数据序列为 $\{u_n\}$ ,其采样周期为 $T$ .通过插值器得到采样周期 $h$ 的快数据序列 $\{r_i\}$ ,它是快子系统的输入.通过数据融合将快子系统的输出序列 $\{y_i\}$ 转换成慢子系统的输入序列 $\{v_j\}$ .数据融合的方法可以为直接取 $L$ 个数据中的若干个或者取 $L$ 个数据序列点的平均值.子系统的数值积分方法和积分步长,插值方法和数据融合方法都将影响整个系统数字仿真的精度和稳定性.对于图1给出的强耦合系统的数值稳定性分析是很困难的,我们将利用子系统的数字仿真模型的开环频率响应特性来判断整个仿真模型的数值稳定性.为此,需要对仿真子模型的开环频率响应特性进行分析.本文分析快子系统为常系数线性系统的仿真子模型的开环频率响应,即分析当 $u_n$ 为复指数序列 $e^{j\omega n T}$ 时,序列 $y_i$ 的性质.为叙述简单起见,我们只对 $u_n$ 和 $y_i$ 为实数的情形进行讨论.

\* 1999年6月23日收到.

1) 国家自然科学基金资助项目(19871080).

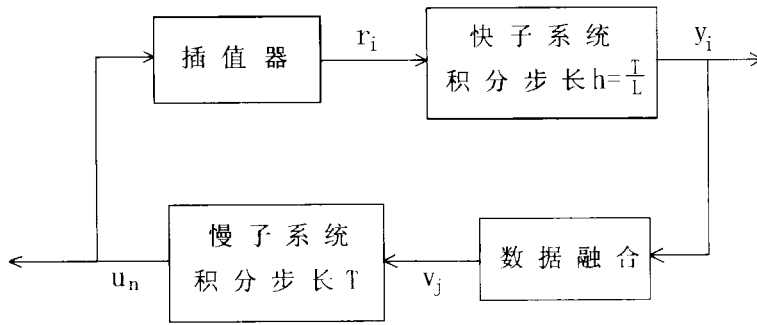


图 1 动力学系统数字仿真组合算法示意图

本文结果已应用到图 2 给出的数字控制系统中的数字控制器（数字网络，数字滤波器）的频率响应分析，其中控制对象可以是飞行器的质心运动，姿态运动或弹性振动。

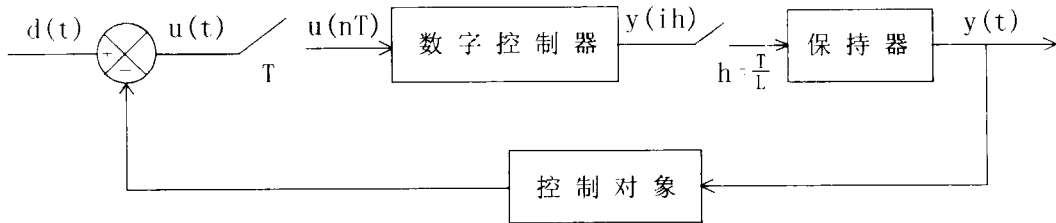


图 2 数字控制系统

## § 2. 组合算法的并行计算格式

设图 1 中的快子系统为线性系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Br, \tag{2.1}$$

$$y = Cx + Dr, \tag{2.2}$$

其中  $r$  为输入变量， $y$  为输出变量， $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)^T$  为状态变量， $A, B, C$  和  $D$  分别为  $m \times m, m \times 1, 1 \times m, 1 \times 1$  维常数矩阵。设慢子系统的输出信号  $u(t)$  在点  $t_n = t_0 + nT$  上的采样值为  $u_n = u(t_n)$ ，则系统 (2.1)(2.2) 在  $[t_n, t_{n+1}]$  上的输入值  $r(t)$  由插值器插值得到。常用的插值器（保持器）得到的  $r(t)$  有形式

$$r(t) = d_{-1}(\tau)u_{n+1} + d_0(\tau)u_n + d_1(\tau)u_{n-1}, \quad t \in (t_n, t_{n+1}], \quad \tau = \frac{t - t_n}{T}. \tag{2.3}$$

例如零阶保持器

$$d_{-1}(\tau) = 0, \quad d_0(\tau) = 1, \quad d_1(\tau) = 0.$$

隐式一阶保持器

$$d_{-1}(\tau) = \tau, \quad d_0(\tau) = 1 - \tau, \quad d_1(\tau) = 0.$$

隐式二阶保持器

$$d_{-1}(\tau) = 0.5\tau(1 + \tau), \quad d_0(\tau) = 1 - \tau^2, \quad d_1(\tau) = 0.5\tau(\tau - 1).$$

记快子系统的数字仿真模型的输出节点为  $s_i = t_0 + ih$ , 有  $s_{nL} = t_n$ . 特别在区间  $[t_n, t_{n+1}]$  中的节点  $s_i$  为  $s_{nL+l}, l = 0, 1, \dots, L$ . 记数字仿真模型得到的 (2.1)(2.2) 的解  $x(t), y(t)$  在  $s_i$  处的近似值分别为  $x_i$  和  $y_i$ . 若使用的是单步数值积分公式, 则可以得到递推式

$$x_{nL+l} = Ex_{nL+l-1} + F_{-1l}u_{n+1} + F_{0l}u_n + F_{1l}u_{n-1}, \quad (2.4)$$

$$y_{nL+l} = Cx_{nL+l} + D\left[d_{-1}\left(\frac{l}{L}\right)u_{n+1} + d_0\left(\frac{l}{L}\right)u_n + d_1\left(\frac{l}{L}\right)u_{n-1}\right], \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (2.5)$$

这是串行计算格式, 即只当知道  $x_{nL+l-1}$  后才能计算  $x_{nL+l}$ . 下面我们推导与其等价的并行计算格式. 设已经计算得到  $x_{(n-1)L+l}$ , 将式 (2.4) 中的  $n$  换成  $n-1$ , 可以从  $x_{(n-1)L+l}$  开始, 递推计算得到  $x_{(n-1)L+l+1}, \dots, x_{nL}, x_{nL+1}, \dots, x_{nL+l}$ . 有

$$\begin{aligned} x_{(n-1)L+l+2} &= Ex_{(n-1)L+l+1} + F_{-1l+2}u_n + F_{0l+2}u_{n-1} + F_{1l+2}u_{n-2} \\ &= E^2x_{(n-1)L+l} + (EF_{-1l+1} + F_{-1l+2})u_n + (EF_{0l+1} + F_{0l+2})u_{n-1} \\ &\quad + (EF_{1l+1} + F_{1l+2})u_{n-2}. \end{aligned}$$

依次类推, 我们可以得到计算  $x_{nL+l}$  的递推式

$$x_{nL+l} = Wx_{(n-1)L+l} + H_{-1l}u_{n+1} + H_{0l}u_n + H_{1l}u_{n-1} + H_{2l}u_{n-2}, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (2.6)$$

其中  $W = E^L, H_{-1l}, H_{0l}, H_{1l}, H_{2l}, l = 1, 2, \dots, L$  为适当的矩阵, 并与  $n$  无关. 由式 (2.6) 可以看出, 若  $x_{(n-1)L+l}, l = 1, 2, \dots, L$  已知, 则  $x_{nL+l}, l = 1, 2, \dots, L$  可以并行计算.

对于固定的  $l$ , 记序列  $\{x_{nL+l}\}$  的  $z$  变换为  $X_l$ , 序列  $\{y_{nL+l}\}$  的  $z$  变换为  $Y_l$ . 则由式 (2.6) 和式 (2.5) 得到

$$X_l = z^{-1}WX_l + (zH_{-1l} + H_{0l} + z^{-1}H_{1l} + z^{-2}H_{2l})U, \quad (2.7)$$

$$Y_l = CX_l + \left(zDd_{-1}\left(\frac{l}{L}\right) + Dd_0\left(\frac{l}{L}\right) + z^{-1}Dd_1\left(\frac{l}{L}\right)\right)U, \quad (2.8)$$

其中  $U$  为序列  $\{u_n\}$  的  $z$  变换. 由式 (2.7) 解出  $X_l$ , 并代入式 (2.8), 得到

$$\begin{aligned} Y_l &= \left[C(I - z^{-1}W)^{-1}(zH_{-1l} + H_{0l} + z^{-1}H_{1l} + z^{-2}H_{2l})\right. \\ &\quad \left.+ \left(zDd_{-1}\left(\frac{l}{L}\right) + Dd_0\left(\frac{l}{L}\right) + z^{-1}Dd_1\left(\frac{l}{L}\right)\right)\right]U. \end{aligned} \quad (2.9)$$

由此式立即得到输入  $u_n$  与  $y_{nL+l}$  之间的离散传递函数  $G_l(z)$  为

$$\begin{aligned} G_l(z) &= C(I - z^{-1}W)^{-1}(zH_{-1l} + H_{0l} + z^{-1}H_{1l} + z^{-2}H_{2l}) \\ &\quad + zDd_{-1}\left(\frac{l}{L}\right) + Dd_0\left(\frac{l}{L}\right) + z^{-1}Dd_1\left(\frac{l}{L}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

应用法捷耶夫算法, 可将  $G_l(z)$  改写成

$$G_l(z) = \frac{\beta_{-1}^{(l)}z + \beta_0^{(l)} + \beta_1^{(l)}z^{-1} + \cdots + \beta_m^{(l)}z^{-m} + \beta_{m+1}^{(l)}z^{-m-1}}{1 + \alpha_1z^{-1} + \cdots + \alpha_mz^{-m}}. \quad (2.11)$$

由式 (2.11) 立即得到  $y_{nL+l}$  与  $u_n$  之间的递推式

$$y_{nL+l} = -\alpha_1y_{(n-1)L+l} - \cdots - \alpha_my_{(n-m)L+l} + \beta_{-1}^{(l)}u_{n+1} + \beta_0^{(l)}u_n + \beta_1^{(l)}u_{n-1} + \cdots + \beta_m^{(l)}u_{n-m} + \beta_{m+1}^{(l)}u_{n-m-1}. \quad (2.12)$$

式 (2.12) 与式 (2.4)(2.5) 或式 (2.6)(2.5) 得到的  $y_{nL+l}$  是等价的. 式 (2.12) 是计算快子系统输出的并行计算格式.

### § 3. 变换方法的并行计算格式

设图 1 中的快子系统由传递函数

$$H(s) = \frac{1 + \lambda_1s + \lambda_2s^2 + \cdots + \lambda_ms^m}{1 + \mu_1s + \mu_2s^2 + \cdots + \mu_ms^m} \quad (3.1)$$

给出. 通过引进状态变量  $x$ , 可以将式 (3.1) 改写成等价的微分方程形式 (2.1)(2.2), 然后建立它的数字仿真模型. 但是通过变换方法可以直接由  $H(s)$  得到离散传递函数  $G(z)$ , 从而得到输出  $y_i$  与输入  $r_i$  之间的递推公式. 所谓变换方法是建立  $s$  平面与  $z$  平面之间的一种映射. 例如常用的双线性变换法建立的映射为

$$s = \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (3.2)$$

将式 (3.2) 代入  $H(s)$  中得离散传递函数

$$G_{yh}(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_mz^{-m}}. \quad (3.3)$$

由此立即得到图 1 中  $y_i$  和  $r_i$  之间的递推

$$y_i = -a_1y_{i-1} - a_2y_{i-2} - \cdots - a_my_{i-m} + b_0r_i + b_1r_{i-1} + \cdots + b_mr_{i-m}, \quad (3.4)$$

式中  $r_i = r(t_i)$  仍由公式 (2.3) 计算.

令序列  $\{y_{nL+l}\}$ ,  $\{r_{nL+l}\}$ ,  $\{u_n\}$  的  $z$  变换分别为  $Y_l(z)$ ,  $R_l(z)$  和  $U(z)$ ,  $l = 1, 2, \cdots, L$ . 由式 (2.3) 有

$$R_l(z) = D_l(z)U(z), \quad D_l(z) = d_{-1}\left(\frac{l}{L}\right)z + d_0\left(\frac{l}{L}\right) + d_1\left(\frac{l}{L}\right)z^{-1}. \quad (3.5)$$

取正整数  $k$ , 有  $(k-1)L \leq m$ ,  $(k-1)L + L - 1 \geq m$ , 并且当  $j > m$  时, 令系数  $a_j = 0$ ,  $b_j = 0$ . 作多项式  $\bar{a}_l(z)$  和  $\bar{b}_l(z)$ ,  $l = 0, 1, \cdots, L-1$  如下:

$$\bar{a}_l(z) = a_l + a_{L+l}z^{-1} + \cdots + a_{(k-1)L+l}z^{-(k-1)}, \quad (3.6)$$

$$\bar{b}_l(z) = b_l + b_{L+l}z^{-1} + \cdots + b_{(k-1)L+l}z^{-(k-1)}. \quad (3.7)$$



$y_{nL+l}$  为

$$\begin{aligned} y_{nL+l} &= G_l(e^{j\omega T})e^{j\omega nT} = G_l(e^{j\omega T})e^{j\omega nLh} \\ &= [G_l(e^{j\omega T})e^{-j\omega lh}]e^{j\omega(nL+l)h}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

为了对输出  $y_i$  进行频率响应分析, 取  $I$  为充分大的  $L$  的整数. 记  $\omega_\mu = \frac{2\pi}{Th}\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, I-1$ , 并取  $\omega = \omega_{\bar{\mu}}$ ,  $\bar{\mu}$  为 0 和  $I-1$  之间的任意一个取定的整数. 由式 (4.1), 对于任意  $i = nL+l$ , 有

$$y_i = [G_l(e^{j\omega T})e^{-j\omega lh}]e^{j\omega ih}. \quad (4.2)$$

它是周期序列,  $I$  是它的一个周期. 周期序列  $y_i$  可以表示成

$$y_i = \sum_{\mu=0}^{I-1} Y(\omega_\mu)e^{j\omega_\mu ih}, \quad (4.3)$$

其中

$$Y(\omega_\mu) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I y_i e^{-j\omega_\mu ih}. \quad (4.4)$$

由  $y_i$  的表示式 (4.2), 并且若有  $I = NL$ ,

$$\begin{aligned} Y(\omega_\mu) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I y_i e^{-j\omega_\mu ih} = \frac{1}{I} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=1}^L y_{nL+l} e^{-j\omega_\mu(nL+l)h} \\ &= \frac{1}{I} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=1}^L [G_l(e^{j\omega T})e^{-j\omega lh}] e^{j(\omega - \omega_\mu)(nL+l)h}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

如果  $\mu = \bar{\mu} + kN$ ,  $k = 0, 1, \dots, L-1$ , 则由式 (4.5)

$$\begin{aligned} Y(\omega_{\bar{\mu}+kN}) &= \frac{1}{I} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=1}^L [G_l(e^{j\omega T})e^{-j\omega lh}] e^{-j2\pi \frac{k}{Lh}lh} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L G_l(e^{j\omega T}) e^{-j(\omega + 2\pi \frac{k}{2h})lh}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

如果  $\mu \neq \bar{\mu} + kN$ , 则有

$$Y(\omega_\mu) = \frac{1}{I} \sum_{l=1}^L [G_l(e^{j\omega T})e^{-j\omega lh}] e^{j(\omega - \omega_\mu)lh} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega - \omega_\mu)nLh}.$$

由于

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega - \omega_\mu)nLh} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(\bar{\mu} - \mu)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(\bar{\mu} - \mu)}} = 0,$$

所以有

$$Y(\omega_\mu) = 0. \quad (4.7)$$

由式 (4.6) 看出组合算法的输出  $y_i$  中除包含原来的输入频率  $\omega$  的复指数信号外, 还包含  $L-1$  个其它频率的信号, 称它们为诱发频率信号.

对于  $L=2$ ,  $y_i$  中的输入频率  $\omega$  的信号  $y_i(\omega)$  为

$$y_i(\omega) = Y(\omega)e^{j\omega ih} = \frac{1}{2}[G_1(e^{j\omega T})e^{-j\omega h} + G_2(e^{j\omega T})e^{-j\omega T}]e^{j\omega ih}. \quad (4.8)$$

$y_i$  中的诱发频率信号  $y_i(\omega_{\bar{\mu}+N})$  为

$$\begin{aligned} y_i(\omega_{\bar{\mu}+N}) &= Y(\omega_{\bar{\mu}+N})e^{j(\omega+\frac{\pi}{h})ih} \\ &= \frac{1}{2}[G_1(e^{j\omega T})e^{-j(\omega+\frac{\pi}{h})h} + G_2(e^{j\omega T})e^{-j(\omega+\frac{\pi}{h})2h}]e^{j(\omega+\frac{\pi}{h})ih} \\ &= \frac{1}{2}[-G_1(e^{j\omega T})e^{-j\omega h} + G_2(e^{j\omega T})e^{-j\omega T}]e^{j(\omega-\frac{\pi}{h})ih} \\ &= \frac{1}{2}[-G_1(e^{j\omega T})e^{-j\omega h} + G_2(e^{j\omega T})e^{-j\omega T}]e^{-j(\omega_s-\omega)ih}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中  $\omega_s = \frac{\pi}{h} = \frac{2\pi}{T}$  为采样圆频率. 因此诱发频率信号为相对于  $\omega_s$  的频率  $\omega$  的折叠频率信号.

当  $L=4$  时, 则输出  $y_i$  中将包含四个频率

$$\omega_k = \omega + \frac{\pi}{2h}k, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

的信号, 它们相应的频率响应分别为

$$Y_k = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^4 G_l(e^{j\omega T})e^{-j(\omega+\frac{\pi k}{2h})lh}. \quad (4.10)$$

对于一般的正整数  $L$ , 输出  $y_i$  中将包含  $L$  个频率

$$\omega_k = \omega + \frac{2\pi}{Lh}k, \quad k = 0, 1, \dots, L-1$$

的信号, 它们相应的频率响应  $Y_k$  为

$$Y_k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L G_l(e^{j\omega T})e^{-j(\omega+\frac{2\pi}{Lh}k)lh}. \quad (4.11)$$

$y_i$  中所包含的相应频率信号为

$$y_i(\omega_k) = Y_k e^{j\omega_k ih}, \quad k = 0, 1, \dots, L. \quad (4.12)$$

## § 5. 数据融合的递推格式和频率响应分析

数据融合的目的是要由快子系统的输出序列形成慢子系统计算中要求的输入序列  $v_j$ . 按照慢子系统所用的数值积分方法可以确定输入序列  $v_j$  的周期. 例如若采用欧拉法, 输入周

期为  $T$ , 这时可记  $v_j$  为  $v_n$ . 若使用的是经典的四阶龙格 - 库塔方法, 则输入周期为  $\frac{T}{2}$ . 在慢子系统的积分周期  $[t_n, t_{n+1} = t_n + T]$  上所要求的输入值为  $v_{2n}, v_{2n+1}, v_{2(n+1)}$ . 这些值将由快子系统的输出序列  $y_i$  通过数据融合形成. 为讨论简单起见, 我们只考虑慢子系统每个计算周期只需要一个输入值的情形, 即  $j = n$  的情形.

选取因子  $f_1, f_2, \dots, f_L$  满足条件

$$\sum_{l=1}^L f_l = 1. \quad (5.1)$$

由快子系统的输出  $y_i$  构造慢子系统的输入  $v_n$  为

$$v_n = \sum_{l=1}^L f_l y_{(n-1)L+l}. \quad (5.2)$$

记

$$\beta_i = \sum_{l=1}^L f_l \beta_i^{(l)}, \quad i = -1, 0, 1, \dots, m+1. \quad (5.3)$$

由式 (2.12) 和  $v_{n+1}$  的定义, 我们看到  $v_n$  满足下面的递推式:

$$\begin{aligned} v_{n+1} = & -\alpha_1 v_n - \alpha_2 v_{n-1} - \dots - \alpha_m v_{n-m+1} \\ & + \beta_{-1} u_{n+1} + \beta_0 u_n + \beta_1 u_{n-1} + \dots + \beta_m u_{n-m} + \beta_{m+1} u_{n-m-1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

因此当给出慢子系统的输出值  $u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, \dots$ , 后, 只需进行一次递推就可以得到慢子系统的输入值  $v_{n+1}$ , 不需要真正得到  $y_{(n-1)L+l}$  后再按式 (5.2) 进行数据融合.

记

$$G_\nu(z) = \frac{\beta_{-1}z + \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_m z^{-m} + \beta_{m+1} z^{-(m+1)}}{z + \alpha_1 + \alpha_2 z^{-1} + \dots + \alpha_m z^{-(m-1)}}. \quad (5.5)$$

当快子系统的输入为复指数序列  $\{u_n = e^{j\omega n T}\}$  时, 递推式 (5.4) 的稳态输出为

$$v_n = G_\nu(e^{j\omega T}) e^{j\omega n T},$$

其中  $G_\nu(e^{j\omega T})$  为数据融合的频率响应特性.

## § 6. 频率响应分析的例子

设图 1 中的快子系统由传递函数

$$H(s) = \frac{1 + 0.3s + 0.0625s^2}{1 + 0.136s + 0.4388 \times 10^{-2}s^2 + 0.86 \times 10^{-4}s^3 + 0.76 \times 10^{-6}s^4 + 0.4 \times 10^{-8}s^5} \quad (6.1)$$



给出. 慢子系统的输出周期  $T = 0.02$ , 快子系统的采样周期  $h = 0.01$ , 插值器采用零阶保持器. 由双线性变换式 (3.2) 得到由式 (3.3) 给出的  $H(s)$  的离散传递函数  $G_{yh}(z)$ , 式中  $m = 5$ . 由于采用零阶保持器, 由  $G_{yh}(z)$  得到下面的递推式:

$$\begin{aligned} y_{2n+1} = & -a_1 y_{2n} - a_2 y_{2n-1} - a_3 y_{2n-2} - a_4 y_{2n-3} - a_5 y_{2n-4} \\ & + b_0 u_n + (b_1 + b_2) u_{n-1} + (b_3 + b_4) u_{n-2} + b_5 u_{n-3}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} y_{2n+2} = & -a_1 y_{2n+1} - a_2 y_{2n} - a_3 y_{2n-1} - a_4 y_{2n-2} - a_5 y_{2n-3} \\ & + (b_0 + b_1) u_n + (b_2 + b_3) u_{n-1} + (b_4 + b_5) u_{n-2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

这是串行计算格式. 应用 2 节中的技巧可以将其转换成等价的并行计算格式

$$\begin{aligned} y_{2n+1} = & -\alpha_1 y_{2(n-1)+1} - \alpha_2 y_{2(n-2)+1} - \alpha_3 y_{2(n-3)+1} - \alpha_4 y_{2(n-4)+1} - \alpha_5 y_{2(n-5)+1} \\ & + \beta_0^{(1)} u_n + \beta_1^{(1)} u_{n-1} + \beta_2^{(1)} u_{n-2} + \beta_3^{(1)} u_{n-3} + \beta_4^{(1)} u_{n-4} + \beta_5^{(1)} u_{n-5}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} y_{2(n+1)} = & -\alpha_1 y_{2n} - \alpha_2 y_{2(n-1)} - \alpha_3 y_{2(n-2)} - \alpha_4 y_{2(n-3)} - \alpha_5 y_{2(n-4)} \\ & + \beta_0^{(2)} u_n + \beta_1^{(2)} u_{n-1} + \beta_2^{(2)} u_{n-2} + \beta_3^{(2)} u_{n-3} + \beta_4^{(2)} u_{n-4} + \beta_5^{(2)} u_{n-5}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

式中系数  $\alpha_i, \beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}$  按下列公式进行计算:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2a_2 - a_1^2 \\ \alpha_2 &= 2a_4 + a_2^2 - 2a_1 a_3 \\ \alpha_3 &= 2a_2 a_4 - a_3^2 - 2a_1 a_5 \\ \alpha_4 &= a_4^2 - 2a_3 a_5 \\ \alpha_5 &= -a_5^2 \\ \beta_0^{(1)} &= b_0 \\ \beta_1^{(1)} &= a_2 b_0 + b_2 + b_1 - a_1(b_1 + b_0) \\ \beta_2^{(1)} &= a_4 b_0 + a_2(b_2 + b_1) + (b_4 + b_3) - a_1(b_3 + b_2) - a_3(b_1 + b_0) \\ \beta_3^{(1)} &= a_4(b_2 + b_1) + a_2(b_4 + b_3) + b_5 - a_1(b_5 + b_4) - a_3(b_3 + b_2) - a_5(b_1 + b_0) \\ \beta_4^{(1)} &= a_4(b_4 + b_3) + a_2 b_5 - a_3(b_5 + b_4) - a_5(b_3 + b_2) \\ \beta_5^{(1)} &= a_4 b_5 - a_5(b_5 + b_4) \\ \beta_0^{(2)} &= b_1 + b_0 - a_1 b_0 \\ \beta_1^{(2)} &= a_2(b_1 + b_0) + b_3 + b_2 - a_1(b_2 + b_1) - a_3 b_0 \\ \beta_2^{(2)} &= a_4(b_1 + b_0) + a_2(b_3 + b_2) + b_5 + b_4 - a_1(b_4 + b_3) - a_3(b_2 + b_1) - a_5 b_0 \\ \beta_3^{(2)} &= a_4(b_3 + b_2) + a_2(b_5 + b_4) - a_1 b_5 - a_3(b_4 + b_3) - a_5(b_2 + b_1) \\ \beta_4^{(2)} &= a_4(b_5 + b_4) - a_3 b_5 - a_5(b_4 + b_3) \\ \beta_5^{(2)} &= -a_5 b_5 \end{aligned}$$

当输入为复指数序列  $u_n = e^{j\omega n T}$  时, 由式 (6.4)(6.5) 得到的  $y_{2n+1}$  和  $y_{2n+2}$  的稳态值分别

为

$$y_{2n+1} = G_1(e^{j\omega T})e^{j\omega nT} = [G_1(e^{j\omega T})e^{-j\omega h}] e^{j\omega(2n+1)h} \quad (6.6)$$

和

$$y_{2n+2} = G_2(e^{j\omega T})e^{j\omega nT} = [G_2(e^{j\omega T})e^{-j\omega T}] e^{j\omega(2n+2)h}. \quad (6.7)$$

即有式 (4.1) 给出的形式,  $G_1(\cdot)$  和  $G_2(\cdot)$  由式 (3.10) 给出, 并且  $\beta_{-1}^{(l)} = \beta_{m+1}^{(l)} = 0$ . 由 1 节中的分析, 由式 (6.6)(6.7) 给出的  $y_i$  可以表示成

$$y_i = Y_0(\omega)e^{j\omega ih} + Y_1(\omega)e^{-j(\omega_s - \omega)ih}. \quad (6.8)$$

式中  $Y_1(\omega)$  和  $Y_2(\omega)$  分别为

$$Y_0(\omega) = \frac{1}{2} [G_1(e^{j\omega T})e^{-j\omega h} + G_2(e^{j\omega T})e^{-j\omega T}] \quad (6.9)$$

和

$$Y_1(\omega) = \frac{1}{2} [-G_1(e^{j\omega T})e^{-j\omega h} + G_2(e^{j\omega T})e^{-j\omega T}]. \quad (6.10)$$

它们是递推式 (6.2)(6.3) 或 (6.4)(6.5) 的频率响应特性, 其中  $Y_0(\omega)$  是输入频率响应,  $Y_1(\omega)$  为诱发频率响应. 在图 3 中画出  $Y_0(\omega)$  和  $Y_1(\omega)$  的对数幅频曲线.

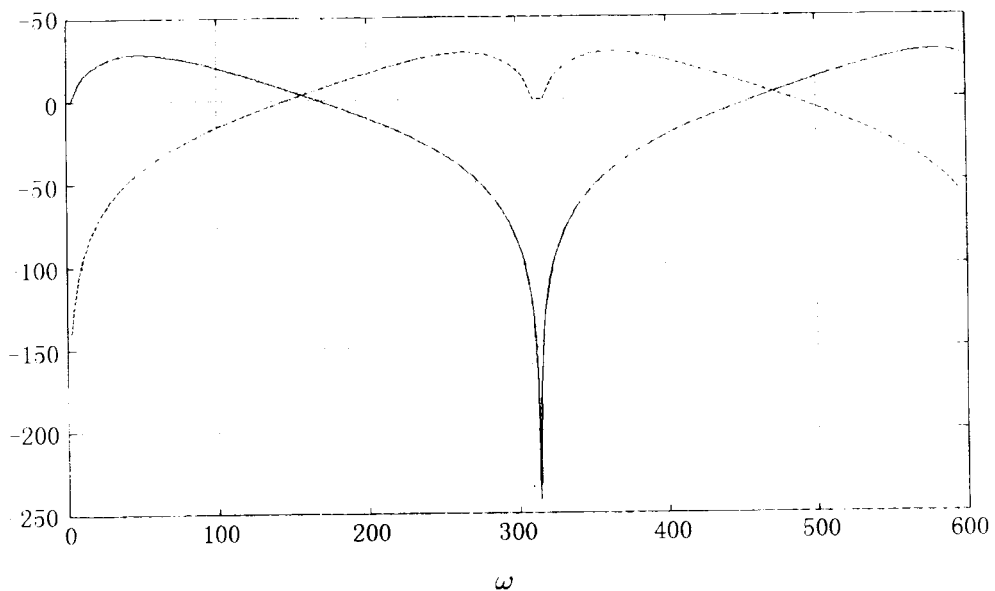


图 3 递推式 (6.2)(6.3) 的对数幅频曲线

—————  $-20 \lg |Y_0(\omega)|$   
 - - - - -  $-20 \lg |Y_1(\omega)|$

由图中看出, 当  $\omega$  很小时, 频率信号分量  $Y_0(\omega)e^{j\omega ih}$  起主要作用. 而当  $\omega$  接近于  $\omega_s$  时, 频率信号分量  $Y_0(\omega)e^{j\omega ih}$  很小, 起主要作用的是量  $Y_1(\omega)e^{-j(\omega_s-\omega)ih}$ , 这时它是低频信号, 因此若将递推式 (6.2)(6.3) 作为数字网络, 在高频范围内  $|Y_0(\omega)|$  很小, 输入频率信号的幅值衰减很多, 能有效地抑制高频信号的通过.

递推式 (6.2)(6.3) 是传递函数  $H(s)$  的数字仿真模型. 当传递函数  $H(s)$  的输入为复指数函数  $u(t) = e^{j\omega t}$  时, 其稳态输出  $y(t)$  为

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}. \quad (6.11)$$

在图 4 中画出  $H(j\omega)$  的对数幅频曲线.  $y_i$  作为数字仿真模型的输出, 为  $y(ih)$  的近似值. 当  $\omega$  较小时, 由  $H(j\omega)$  和  $Y_0(\omega)$  之间的误差可以表明数字仿真模型的精度. 在图 5 中给出  $H(j\omega)$  和  $Y_0(\omega)$  的对数幅频误差曲线. 由图中看出当  $\omega$  较小时 (例如  $\omega < \frac{\pi}{T}$  时)  $|H(j\omega)|$  与  $|Y_0(\omega)|$  之间有较好的精度. 但是当  $\omega$  较大时,  $y_i$  作为  $y(ih)$  的近似值的误差太大. 一方面数字仿真模型将输入的高频信号 ( $200 < \omega < \frac{\pi}{h}$ ) 衰减掉, 另一方面又诱发一个频率为  $\frac{\pi}{h} - \omega$  的低频信号. 将该仿真模型作为数字网络 (或数字滤波器) 是比较合适的, 但需要考虑诱发低频信号对系统精度的影响.

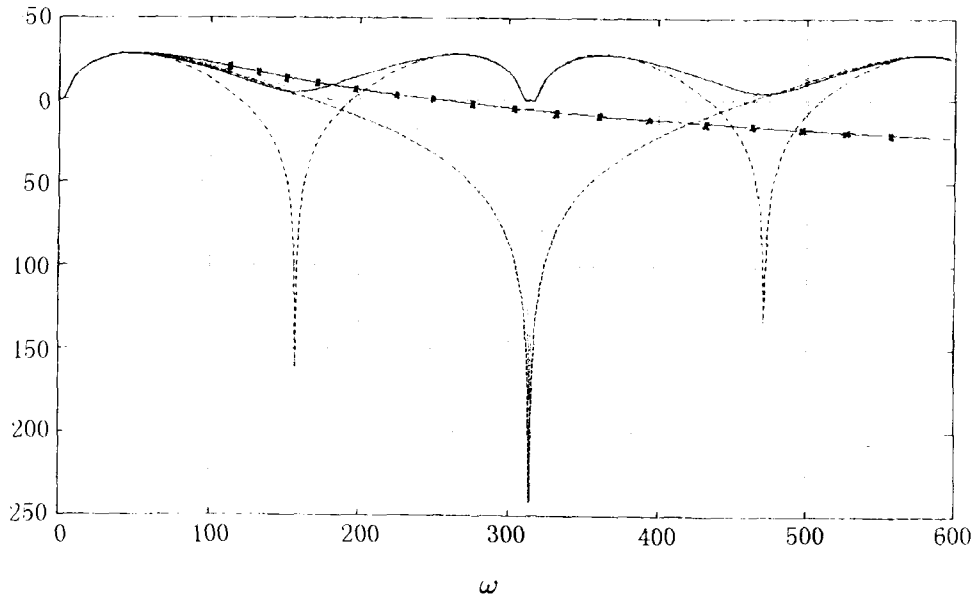


图 4 频率响应分析的对数幅频曲线

- x-x-x-x-  $20 \lg |H(j\omega)|$
- - - - -  $20 \lg |Y_0(\omega)|$
- · · · ·  $20 \lg |G_{yh}(e^{j\omega h})|$
- · - · - ·  $20 \lg |G_{yT}(e^{j\omega T})|$
- — — — —  $20 \lg |G_v(e^{j\omega T})|$

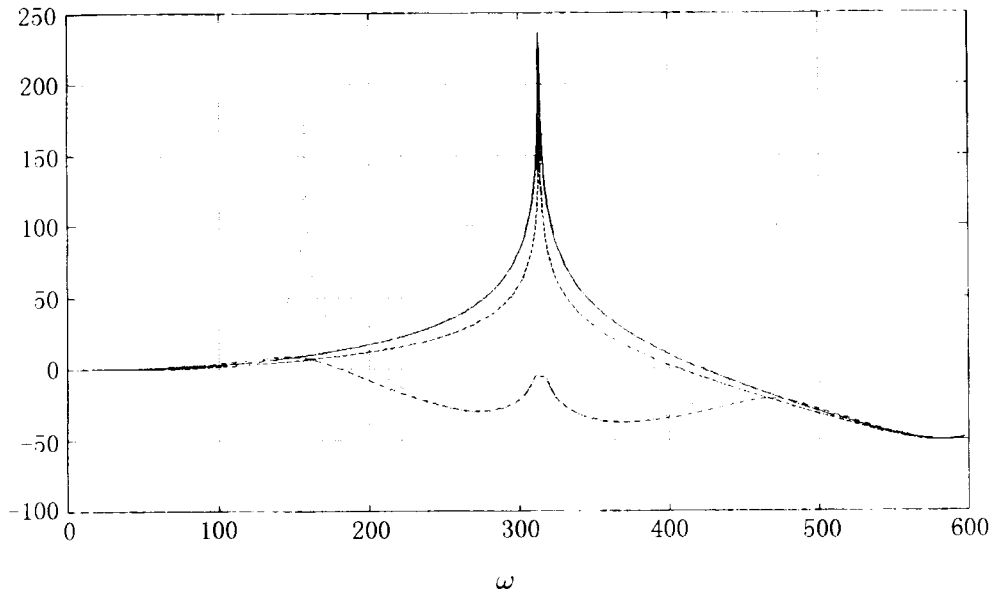


图 5 频率响应的对数幅频误差曲线

- $20 \lg |H(j\omega)| - 20 \lg |Y_0(\omega)|$
- - - - -  $20 \lg |H(j\omega)| - 20 \lg |G_{yh}(e^{j\omega h})|$
- .....  $20 \lg |H(j\omega)| - 20 \lg |G_{yT}(e^{j\omega T})|$
- · - · -  $20 \lg |H(j\omega)| - 20 \lg |G_\nu(e^{j\omega T})|$

为得到  $y_i$  的数据融合结果, 取  $f_1 = f_2 = \frac{1}{2}$ , 得到

$$v_n = \frac{1}{2}(v_{2(n-1)+1} + v_{2(n-1)+2}) \tag{6.12}$$

和

$$G_\nu(z) = \frac{1}{2}[G_1(z) + G_2(z)]. \tag{6.13}$$

在图 4 和图 5 中分别给出它的对数幅频曲线和对数幅频误差曲线. 由图中看出  $|G_\nu(e^{j\omega T})|$  的变化当  $\omega < \frac{\pi}{T}$  时与  $|Y_0(\omega)|$  的变化类似, 但是当  $\omega > \frac{\pi}{T}$  时相差较大.

在图 6 和图 7 中分别画出  $G_\nu(z), G_1(z)$  和  $G_2(z)$  的对数幅频曲线和它们与  $20 \lg |H(j\omega)|$  的误差曲线. 可以看出在  $\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$  附近, 这三条曲线相差较大, 但在低频和高频段, 这三条曲线是相近的.

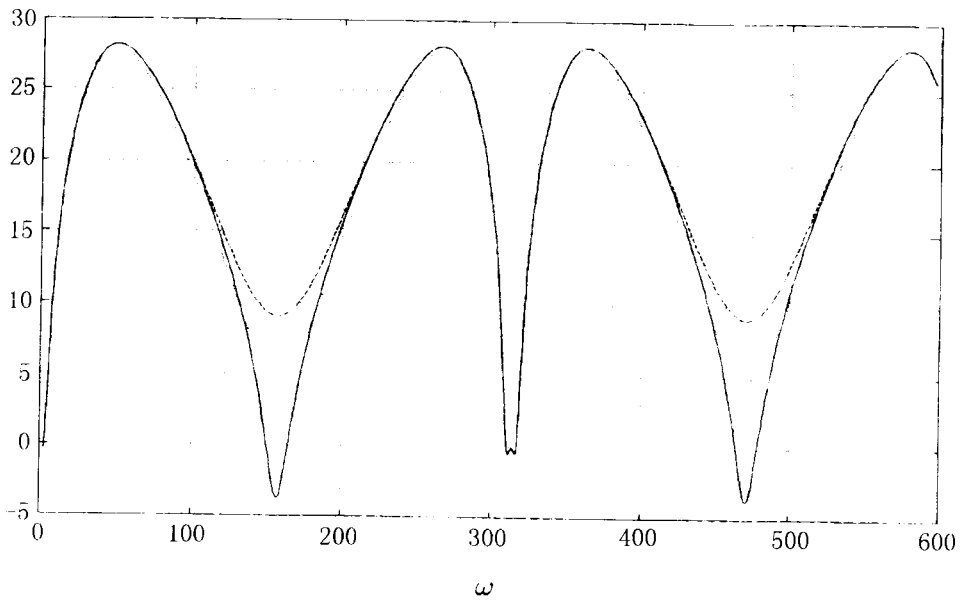


图 6  $y_{2(n-1)+1}, y_{2(n-1)+2}, v_n$  的对数幅频曲线

- $20 \lg |G_1(e^{j\omega T})|$
- $20 \lg |G_2(e^{j\omega T})|$
- .....  $20 \lg |G_\nu(e^{j\omega T})|$

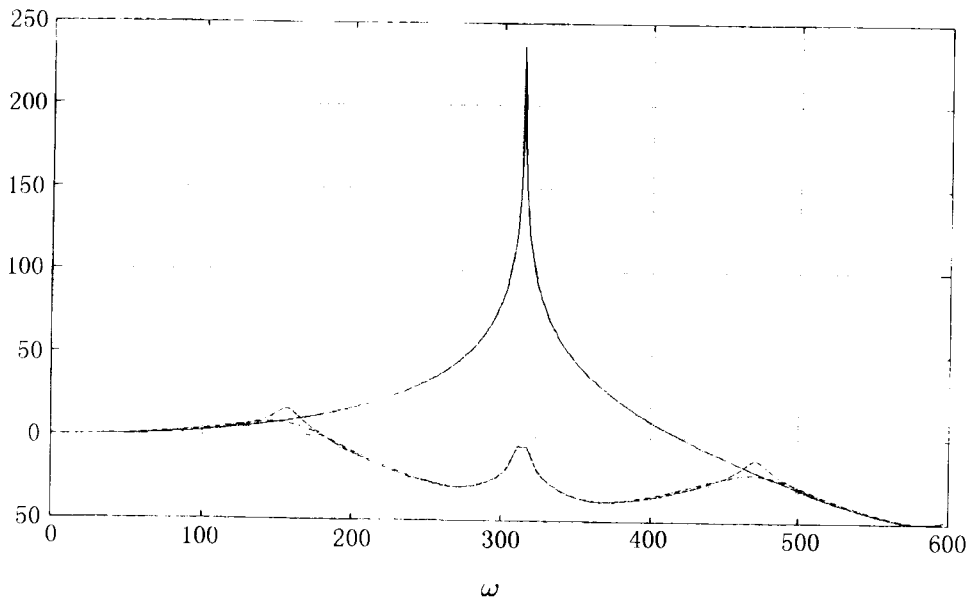


图 7 对数幅频误差曲线

- $20 \lg |H(j\omega)| - 20 \lg |Y_0(\omega)|$
- .....  $20 \lg |H(j\omega)| - 20 \lg |G_1(e^{j\omega T})|$
- $20 \lg |H(j\omega)| - 20 \lg |G_2(e^{j\omega T})|$
- · - · -  $20 \lg |H(j\omega)| - 20 \lg |G_\nu(e^{j\omega T})|$

作为比较, 在图 4 中还画出离散传递函数  $G_{yT}(z)$  和  $G_{yh}(z)$  的对数幅频曲线, 它们是分别以采样周期  $T$  和  $h$  对  $H(s)$  进行双线性变换得到的离散传递函数. 由图 4 和图 5 中的误差曲线可以看出  $|Y_0(\omega)|$  与  $|G_{yh}(e^{j\omega h})|$  相近. 由此可以推出除了一个诱发频率信号以外, 由组合算法得到的信号的频率特性与直接以  $h$  为采样周期的双线性变换的频率特性是相近的.  $|G_{yT}(e^{j\omega T})|$  的相应曲线的误差明显要大. 因此采用组合算法可以克服采样周期大的缺陷, 达到小采样周期的效果.

## § 7. 结 论

本文推导了快子系统数字仿真模型的并行计算格式, 并对其输出进行频率响应分析. 经理论推导和数值试验, 可得到下面的一些结论:

(1) 仿真模型的输入频率响应接近于采样周期为仿真模型计算步长的离散传递函数的频率响应. 从而可弥补实际采样周期大的缺陷.

(2) 在低频部分, 仿真模型的输出与传递函数  $H(s)$  的输出之间的精度很好, 但在高频部分有较大的误差.

(3) 仿真模型的输出除包含输入频率的分量外, 还包含诱发频率信号. 对于  $L=2$  的情形, 若输入信号为复指数序列  $e^{j\omega_i T}$ , 则诱发频率信号的频率为  $\omega_s - \omega$ . 因此输入的低频信号会诱发一个高频信号. 在应用组合算法进行数字仿真或者设计数字网络时, 必须考虑诱发频率信号的效应, 并进行稳定性分析.

(4) 在对组合算法建立的仿真子模型或数字网络进行频率特性测试时, 由图 3 看出, 若输入信号的频率  $\omega$  接近于  $\frac{\pi}{h} = 314$ , 这时  $|Y_0(\omega)|$  很小, 而  $|Y_1(\omega)|$  较大, 信号  $Y_0(\omega)e^{j\omega_i h}$  将占  $Y_1(\omega)e^{-j(\omega_s - \omega)ih}$  中的极小部分 (甚至可能包含到舍入误差中). 利用相关函数方法或者 Fourier 变换方法由输出  $y_i$  中得到  $Y_0(\omega)$  的估计是不精确的, 接近于  $Y_1(\omega)e^{-j(\omega_s - \omega)ih}$  的舍入误差的水平.

(5) 由图 7 看出, 通过数据融合得到的  $v_n$  的幅频特性在  $\frac{\pi}{T}$  之前可以非常接近  $|Y_0(\omega)|$ . 但是在  $\frac{\pi}{T} < \omega < \frac{2\pi}{T}$  之间似乎不可能通过形式为 (5.2) 的数据融合方法得到类似于  $|Y_0(\omega)|$  的频率特性.

(6) 由组合算法构造的数字网络能有效地抑制高频输入信号的影响, 但需要考虑由低频信号诱发的高频信号对稳定性的影响.

## 参 考 文 献

- [1] 绪方胜彦著, 刘君华等译, 离散时间控制系统, 西安, 西安交通大学出版社, 1990 年 5 月.
- [2] A. Haraldsdottir, R.M. Howe, Multiple Frame Rate Integration. AIAA Flight Simulation Technologies Conference, September, 7-9,(1988),26-35.
- [3] 费景高, 线性系统的一种数字仿真方法, 数值计算与计算机应用, 16 : 2 (1995), 134-142.