线性延迟微分代数方程块隐式 θ- 方法的渐近稳定性*

徐 阳 赵景军 刘明珠

(哈尔滨工业大学数学系 哈尔滨 150001)

ASYMPTOTIC STABILITY OF IMPLICIT BLOCK θ-METHOD FOR LINEAR DELAY DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Xu Yang Zhao JingJun Liu MingZhu

(*Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology,* 150001)

Abstract

This paper is concerned with the asymptotic stability of numerical methods for the linear delay differential-algebraic equations. A sufficient condition such that the implicit block θ-method is asymptotically stable is derived. Furthermore, some numerical examples are done to demonstrate the conclusion.

Key words: delay differential-algebraic equations, asymptotic stability, numerical methods

§1. 引 言

近几年来，许多文章致力于延迟微分方程解析解及数值方法的研究. 延迟微分方程广泛地应用于生物学、金融学、计算机辅助设计、非线性动力系统等许多科学与工程领域 [1], 其中延迟微分代数方程为电路分析、化学过程模拟及最优控制等问题提供有效的数学模型. 在文献 [2,3] 中，对微分代数方程的数值方法进行了稳定性讨论，据我们所知，只有少数几篇文章研究了延迟微分代数方程的稳定性. 这主要是由于此类方程不仅具有延迟项，而且还具有代数条件限制，使得分析变得十分困难. 实际上，延迟微分代数方程可以简化为延迟微分方程，通过特征方程来讨论其数值方法的稳定性 [4]. 在文献 [5] 中，分析了线性延迟微分代数方程一些非并行数值方法的渐近稳定性.

块隐式 θ- 方法是块方法的特殊情况，是一种典型的并行算法. 在文献 [6] 中，分析了对常微分方程及延迟微分方程而言，块 θ- 方法的性质. 在文献 [7] 中，研究了线性常延迟微分方程块隐式方法的稳定性.

* 2002 年 10 月 28 日收到.

本文主要研究线性延迟微分代数方程块隐式 θ- 方法的渐近稳定性，给出了此数值方法渐近稳定的一个充分条件.

§2. 延迟微分代数方程的渐近稳定性

本文研究线性延迟微分代数方程

$$Ay'(t)+By(t)+Cy'(t-\tau)+Dy(t-\tau)=0, \tag{2.1}$$

其中 $\tau>0$, $A,B,C,D\in R^{d\times d}$, A 是奇异的，并且假设在 $(-\tau,0)$ 上选取初始函数值 $\phi(t)$, 使得方程 (2.1) 有惟一解.

在文献 [8] 中，研究了方程 (2.1) 解析解的存在性与惟一性. 假设方程 (2.1) 的解总是惟一存在的，下面讨论解的稳定性.

定义 2.1. 如果存在一个常数 $r>0$, 使得对任意的初始值 $\phi(t)$ 满足 $|\phi(t)|<r$, 方程的解 $y(t)$ 都有 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$, 则称方程 (2.1) 是渐近稳定的.

这里要求初始值在一定范围内取值，可以保证方程 (2.1) 解的存在惟一性.

在文献 [5] 中，对方程 (2.1) 解析解进行了分析.

引理 2.1[5]**.** 方程 (2.1) 是渐近稳定的，如果满足

$$\text{矩阵束 }(A,B)\text{ 的奇异值都具有负实部} \tag{2.2}$$

$$\sup_{Res\geq 0}\rho[(sA+B)^{-1}(sC+D)]<1, \tag{2.3}$$

其中 $\rho(\cdot)$ 表示谱半径. 对任意的 $u\in R^n$, 都有

$$\left|u^TAu\right|\geq\left|u^TCu\right|. \tag{2.4}$$

由条件 (2.2) 可知矩阵 B 非奇异. 否则，矩阵束 $\lambda A+B$ 将有一个奇异值为 0.

§3. 块隐式 θ- 方法的渐近稳定性

本节讨论块隐式 θ- 方法的稳定性. 这种方法不仅具有较好的稳定性，而且又不需要使用高阶导数，是一种十分有效的算法.

考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t)=f(y(t)), & t\geq 0,\\ y(t)=\phi(t), & t<0,\end{cases}$$

则块隐式 θ- 方法可以表示为

$$\bar{Y}_{n+1}=\bar{Y}_n+\theta hKF(\bar{Y}_{n+1})+(1-\theta)hKF(\bar{Y}_n),\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{3.1}$$

其中矩阵 $K \in R^{s\times s}$, 向量 $\bar{Y}_n = (y_{ns}, y_{ns+1}, \cdots, y_{ns+s-1})^T$, $F(\bar{Y}_n) = (f_{ns}, f_{ns+1}, \cdots, f_{ns+s-1})^T$, 且 $y_n = y(t_n)$, $f_n = f(t_n, y_n)$, $\theta \in [0,1]$. 可以看出, 块隐式 θ- 方法在计算时, 需要已知前面的 s 个初始值.

用块隐式 θ- 方法 (3.1) 来求解方程 (2.1), 则得到差分方程

$$\begin{aligned} &[I\otimes A+\theta h(K\otimes B)]Y_{n+1} \\ =& [I\otimes A-(1-\theta)h(K\otimes B)]Y_n-\delta[I\otimes C+\theta h(K\otimes D)]Y_{n-m+2} \\ &-[(1-\delta)(I\otimes C+\theta h(K\otimes D))+\delta((1-\theta)h(K\otimes D)-I\otimes C)]Y_{n-m+1} \\ &-(1-\delta)[(1-\theta)h(K\otimes D)-I\otimes C]Y_{n-m}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $Y_n = (\bar{Y}_n^T,\ \bar{Y}_{n+1}^T,\ \ldots,\ \bar{Y}_{n+d}^T)^T, I \in R^{s\times s}, \delta = m - \frac{\tau}{h} \in [0,1)$,$\otimes$ 表示 Kronecker 积.

下面针对方程 (2.1), 给出数值方法的稳定性定义.

定义 3.1. 当延迟微分代数方程 (2.1) 满足条件 (2.2)–(2.4) 时, 如果方程的数值解 Y_n 对任意的步长 $h > 0$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0$, 则称此数值方法是渐近稳定的.

为了研究方法的稳定性, 考虑差分方程 (3.2) 的特征多项式

$$p(z) = \det[z^m P(z) + Q(z,\delta)], \tag{3.3}$$

其中 $P(z) = [(z-1)\cdot(I\otimes A) + (\theta z + (1-\theta))h(K\otimes B)]$, $Q(z,\delta) = [\delta z + (1-\delta)]\cdot[(z-1)\cdot(I\otimes C) + (\theta z+(1-\theta))h(K\otimes D)]$.

在分析特征多项式 (3.3) 的性质之前, 先引用两个结论.

引理 3.1[6]**.** 当 $1/2 \le \theta \le 1$ 时, 块隐式 θ- 方法是 A- 稳定的, 当且仅当 $\sigma(K) \subset \{z \in R : z > 0\}$, 其中 $\sigma(\cdot)$ 表示矩阵的谱.

引理 3.2[9]**.** 如果对于任意的 $|z| \ge 1$, 都有 $|P(z)| \ne 0$, 且 $\sup\limits_{|z|=1} \rho[P^{-1}(z)\cdot Q(z,\delta)] < 1$, 那么特征多项式 (3.3) 的所有零点都位于单位圆的内部.

实际应用中, 一般将矩阵 K 取为正定对角阵. 不妨设 $K = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s)$, 其中 $\lambda_i > 0$, $i = 1, \cdots, s$.

定理 3.1. 对满足条件 (2.2)–(2.4) 的方程 (2.1), 当 $1/2 < \theta \le 1$ 时, 如果块隐式 θ- 方法是 A- 稳定的, 那么此方法就是渐近稳定的.

证明. 为了证明方法的渐近稳定性, 则要证明特征多项式 (3.3) 是 Schur 多项式.

由于矩阵 K 为正定对角阵, 即 $K = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s)$, 则有 $P(z) = diag[(z-1)A + (\theta z+(1-\theta))h\lambda_1 B, \cdots, (z-1)A + (\theta z + (1-\theta))h\lambda_s B]$, $Q(z,\delta) = [\delta z + (1-\delta)]\cdot diag[(z-1)C + (\theta z + (1-\theta))h\lambda_1 D, \cdots, (z-1)C + (\theta z + (1-\theta))h\lambda_s D]$.

当 $|z| \ge 1$, 且 $1/2 < \theta \le 1$ 时, 容易证得 $Re[(z-1)/(\theta z + (1-\theta))] \ge 0$. 于是

$$P(z) = [\theta z + (1-\theta)]\cdot diag\Big[\frac{z-1}{\theta z+(1-\theta)}A + h\lambda_1 B, \cdots, \frac{z-1}{\theta z + (1-\theta)}A + h\lambda_s B\Big].$$

由条件 (2.2) 及 $\lambda_i > 0$, $i = 1, \cdots, s$, 可知矩阵 $P(z)$ 可逆.

因为 $\delta = m - \tau/h \in [0,1)$, 所以当 $|z| = 1$ 时, 有 $|\delta z + (1-\delta)| \le 1$. 于是

$$P^{-1}(z) \cdot Q(z,\delta) = [\delta z + (1-\delta)] \cdot diag\Big[\Big(\frac{z-1}{\theta z + (1-\theta)}A + h\lambda_1 B\Big)^{-1}$$

$$\cdot\Big(\frac{z-1}{\theta z + (1-\theta)}C + h\lambda_1 D\Big), \cdots, \Big(\frac{z-1}{\theta z + (1-\theta)}A + h\lambda_s B\Big)^{-1} \cdot \Big(\frac{z-1}{\theta z + (1-\theta)}C + h\lambda_s D\Big)\Big].$$

由条件 (2.3), 可知当 $|z| = 1$ 时, 有 $\rho[P^{-1}(z) \cdot Q(z,\delta)] < 1$.

根据引理 3.2, 证得特征多项式 (3.3) 是 Schur 多项式. 于是, 数值方法保持了方程 (2.1) 解析解的渐近稳定性, 即块隐式 θ- 方法渐近稳定.

§4. 数值实验

考虑方程

$$Ay'(t) + By(t) + Cy'(t-1) + Dy(t-1) = 0, \tag{4.1}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1/(1+e) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1/(1+e) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/e \end{pmatrix},$$

且初值满足 $y(t) = e^{-t}$, $t \in [-1, 0)$.

方程 (4.1) 的解析解为 $y(t) = e^{-t}$.

这里, 取步长 $h = 0.5$, $\theta = 0.9$, $K = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. 分别应用线性 θ- 方法与块隐式 θ- 方法求解系统 (4.1), 比较数值试验结果.

表 4.1 数值试验结果

t	数值解	迭代次数	
		块隐式 θ- 方法	线性 θ- 方法
5	6.6×10^{-3}	11	17
10	4.5×10^{-5}	20	37
15	3.0×10^{-7}	26	56
20	2.0×10^{-9}	30	75
25	1.0×10^{-11}	32	93

分析数据, 可知在相同的计算精度下, 块隐式 θ- 方法比线性 θ- 方法具有更快的收敛速度, 但是在实际的计算过程中, 块隐式 θ- 方法却比线性 θ- 方法需要更多的存储空间. 现有的计算机硬件条件, 这个要求比较容易满足.

参 考 文 献

[1] A.Iserles, On the generalized pantograph functional-differential equation, European J. Applied Mathematics, 4(1993) 1-38.

[2] U.Ascher, H.Chin, S.Reich, Stability of DAE and invariant manifolds, Numerische Mathematik, 67(1994) 131-149.

[3] C. Lubich, On projected Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations, BIT, 31(1991) 545-550.

[4] U. Ascher, L.R. Petzold, The numerical solution of delay-differential-algebraic equations of retarded and neutral type, SIAM J. Numerical Analysis, 32(1995) 1635-1657.

[5] W.J. Zhu, L.R. Petzold, Asymptotic stability of linear delay differential-algebraic equations and numerical methods, Applied Numerical Mathematics, 24(1997) 247-264.

[6] L.H. Lu, The stability of the block θ-methods, IMA J. Numerical Analysis, 13(1993) 101-114.

[7] G.F. Zhang, Stability of implicit one-block methods for delay differential equations, Appl. Numer. Math., 36(2001) 275-279.

[8] U. Ascher , L.R. Petzold, Stability of computational methods for constrained dynamics systems, SIAM J. Sci. Comput., 14(1993) 95-120.

[9] T.Koto, NP-stability of Runge-Kutta methods based on classical quadrature, BIT, 37(1997) 870-884.