一类保凸插值样条曲线*[1)]

韩 道 康

（北京航空学院）

AN INTERPLATING SPLINE CURVE WITH KEEPING CONVEXITY

Han Dao-kang

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In this paper, a kind of cubic interpolating spline curves is constructed through joining each two successive points on the plane with three pieces of cubic uniform B-Spline curves. Its keeping convexity is similar to that of the cubic B-Spline curve when parameter λ is properly selected. Moreover, it has continuous derivative of second order and explicit form.

一、样 条 公 式

设在平面上给定 n 个点 $\{p_i\}_{i=1}^n$，点 p_i 处的矢量也用记号 p_i 表示．再给定 p_0，p_n 处的导矢为 $p_0'\ p_n'$．用下式增加两点

$$p_0 = p_2 - 2p_1',\quad p_{n+1} = 2p_n' + P_{n-1},$$

用曲线 $s_i(t)$ 来联接 $\{p_i\}_{i=1}^n$ 中两点 p_{i-1} 及 p_i，如果 $p_{i-1} = p_i$，则 $s_i(t) = p_i$，如果 $p_{i-1} \neq p_i$，则 $s_i(t)$ 是由特征折线多边形 $f_{i,1} f_{i,2} f_{i,3} f_{i,4} f_{i,5} f_{i,6}$ 决定的三段三次均匀 B 样条曲线组成．

$$s_i(t) = \sum_{i=1}^{6} f_{i,k} M_3(t+2-k) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 3), \tag{1}$$

其中 $M_3(t)$ 是均匀三次 B 样条基函数，

$$M_3(t) = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{4} (-1)^j C_4^j (t+2-j)_+^3.$$

令 $s_i(t)$ 满足边界条件

$$\begin{cases} s_i(0) = P_{i-1},\ s_i'(0) = \lambda(p_i - p_{i-2}),\ s_i''(0) = \lambda(p_i - 2p_{i-1} + p_{i-2}), \\ s_i(3) = p_i,\quad s_i'(3) = \lambda(p_{i+1} - p_{i-1}),\ s_i''(3) = \lambda(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}), \end{cases} \tag{2}$$

---

* 1982 年 9 月 15 日收到.

1) 作者已调航空工业部三〇四研究所工作.

其中 λ 非负. 由(1)与(2)式

$$\begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ \lambda(p_i - p_{i-2}) \\ \lambda(p_{i+1} - p_{i-1}) \\ \lambda(p_i - 2p_{i-1} + p_{i-2}) \\ \lambda(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ f_{i,3} \\ f_{i,4} \\ f_{i,5} \\ f_{i,6} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

由于(3)式右边数值矩阵是满秩的，故可由(3)式唯一解出诸 $\{f_{i,k}\}_{k=1}^{6}$. 说明当 λ 确定后，曲线 $s_i(t)$ 是存在且唯一的. 由(3)得到

$$\begin{cases} f_{i,1} = -\dfrac{2\lambda}{3} p_i + \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) P_{i-1} + \dfrac{4\lambda}{3} p_{i-2}, \\ f_{i,2} = -\dfrac{\lambda}{6} P_i + \left(1 + \dfrac{\lambda}{3}\right) p_{i-1} - \dfrac{\lambda}{6} p_{i-2}, \\ f_{i,3} = \dfrac{4\lambda}{3} p_i + \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) p_{i-1} - \dfrac{2\lambda}{3} p_{i-2}, \\ f_{i,4} = -\dfrac{2\lambda}{3} p_{i+1} + \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) p_i + \dfrac{4\lambda}{3} p_{i-1}, \\ f_{i,5} = -\dfrac{\lambda}{6} p_{i+1} + \left(1 + \dfrac{\lambda}{3}\right) p_i - \dfrac{\lambda}{6} p_{i-1}, \\ f_{i,6} = \dfrac{4\lambda}{3} p_{i+1} + \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) p_i - \dfrac{2\lambda}{3} p_{i-1}. \end{cases} \tag{4}$$

本文后面要讨论 λ 的选取. 将(4)式代入(1)式并整理，把 $s_i(t)$ 写成另一种形式:

$$s_i(t) = p_{i-2}\varphi_1(t) + p_{i-1}\varphi_2(t) + p_i\varphi_3(t) + p_{i+1}\varphi_4(t), \tag{5}$$

其中

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \dfrac{4\lambda}{3} M_3(t+1) - \dfrac{\lambda}{6} M_3(t) - \dfrac{2\lambda}{3} M_3(t-1), \\ \varphi_2(t) = \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) M_3(t+1) + \left(1 + \dfrac{\lambda}{3}\right) M_3(t) + \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) M_3(t-1), \\ \qquad + \dfrac{4\lambda}{3} M_3(t-2) - \dfrac{\lambda}{6} M_3(t-3) - \dfrac{2\lambda}{3} M_3(t-4), \\ \varphi_3(t) = -\dfrac{2\lambda}{3} M_3(t+1) - \dfrac{\lambda}{6} M_3(t) + \dfrac{4\lambda}{3} M_3(t-1) + \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) \\ \qquad \times M_3(t-2) + \left(1 + \dfrac{\lambda}{3}\right) M_3(t-3) + \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) M_3(t-4), \\ \varphi_4(t) = -\dfrac{2\lambda}{3} M_3(t-2) - \dfrac{\lambda}{6} M_3(t-3) + \dfrac{4\lambda}{3} M_3(t-4) \ (0 \leqslant t \leqslant 3). \end{cases} \tag{6}$$

二、保凸性条件

我们来选择 λ，使所有的曲线段都是保凸的．为此，我们先选仅使某段 $s_i(t)$ 保凸的控制参数 $\lambda^{(i)}$，它使 $s_i(t)$ 的形状完全决定于折线 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 在 p_{i-1} 及 p_i 两点的凸凹情况．若折线在 p_{i-1} 点 p_i 点同时凸，则 $s_i(t)$ 凸；若折线在 p_{i-1} 点凸，在 p_i 点凹，则 $s_i(t)$ 由凸变凹．恰有一拐点；若 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 有相邻三点共线时，我们选择 $\lambda^{(i)}$，使 $s_i(t)$ 呈现较"理想"状态．令(如图 1)

$$\begin{cases} a_1^{(i)} = p_{i-1} - p_{i-2},\ a_2^{(i)} = p_i - p_{i-1},\ a_3^{(i)} = p_{i+1} - p_i, \\ C_{12}^{(i)} = \det|a_1^{(i)}a_2^{(i)}|, C_{23}^{(i)} = \det|a_2^{(i)}a_3^{(i)}|,\ C_{31}^{(i)} = \det|a_3^{(i)}a_1^{(i)}|, \\ b_k^{(i)} = f_{i,k+1} - f_{i,k}\quad (k = 1, 2, 3, 4, 5), \\ e_q^{(i)} = f_{i,1} - f_{i,q}\quad (q = 4, 5, 6), \\ \bar{e}^{(i)} = f_{i,3} - f_{i,6}\ (\text{见图 2}) \end{cases} \tag{7}$$

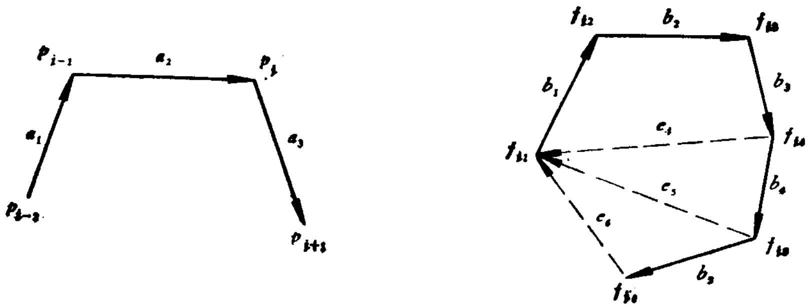


图 1

在研究第 i 段曲线 $s_i(t)$ 时，为了书写简洁在不致引起混淆的情况下，我们将(7)式中各量的上标记号略去不写，例如记 $\lambda^{(i)}$ 为 λ，$a_1^{(i)}$ 为 a_1 等等．

由(4)式和(7)式得到

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{3\lambda}{2}a_1 + \dfrac{\lambda}{2}a_2, & b_2 = \dfrac{\lambda}{2}a_1 + \dfrac{3\lambda}{2}a_2, \\ b_3 = -\dfrac{2\lambda}{3}a_1 + \left(1 - \dfrac{8\lambda}{3}\right)a_2 - \dfrac{2\lambda}{3}a_3, & b_4 = \dfrac{3\lambda}{2}a_2 + \dfrac{\lambda}{2}a_3, \\ b_5 = \dfrac{\lambda}{2}a_2 + \dfrac{3\lambda}{2}a_3, & \\ e_4 = -\dfrac{4\lambda}{3}a_1 - \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right)a_2 + \dfrac{2\lambda}{3}a_3, & e_5 = -\dfrac{4\lambda}{3}a_1 - \left(1 + \dfrac{5\lambda}{6}\right)a_2 + \dfrac{\lambda}{6}a_3, \\ e_6 = -\dfrac{4\lambda}{3}a_1 - \left(1 + \dfrac{4\lambda}{3}\right)a_2 - \dfrac{4\lambda}{3}a_3, & \bar{e} = \dfrac{2\lambda}{3}a_1 - \left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right)a_2 - \dfrac{4\lambda}{3}a_3, \end{cases} \tag{8}$$

及

$$\det|b_1b_2| = 2\lambda^2C_{12},$$

$$\begin{cases}\det|b_2b_3| = \left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{3}\right)C_{12}-\lambda^2C_{23}+\frac{\lambda^2}{3}C_{31},\\ \det|b_3b_4| = -\lambda^2C_{12}+\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{3}\right)C_{23}+\frac{\lambda^2}{3}C_{31},\\ \det|b_4b_5| = 2\lambda^2C_{23},\\ \det|b_3e_4| = (2\lambda-4\lambda^2)C_{12}-\frac{4\lambda^2}{3}C_{23}+\frac{4\lambda^2}{3}C_{31},\\ \det|e_4b_1| = \left(\frac{3\lambda}{2}-\frac{5\lambda^2}{3}\right)C_{12}-\frac{\lambda^2}{3}C_{23}+\lambda^2C_{31},\\ \det|e_5b_1| = \left(\frac{3\lambda}{2}+\frac{7\lambda^2}{12}\right)C_{12}-\frac{\lambda^2}{12}C_{23}+\frac{\lambda^2}{4}C_{31},\\ \det|b_4e_5| = 2\lambda^2C_{12}+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{2\lambda^2}{3}\right)C_{23}-\frac{2\lambda^2}{3}C_{31},\\ \det|b_5e_6| = \frac{2\lambda^2}{3}C_{12}+\left(\frac{3\lambda}{2}+\frac{4\lambda^2}{3}\right)C_{23}-2\lambda^2C_{31},\\ \det|e_6b_1| = \left(\frac{3\lambda}{2}+\frac{4\lambda^2}{3}\right)C_{12}+\frac{2\lambda^2}{3}C_{23}-2\lambda^2C_{31},\end{cases} \tag{9}$$

以及

$$\begin{cases}\det|b_5\bar{e}| = -\frac{\lambda^2}{3}C_{12}+\left(\frac{3\lambda}{2}-\frac{5\lambda^2}{3}\right)C_{23}+\lambda^2C_{31},\\ \det|\bar{e}b_3| = -\frac{4\lambda^2}{3}C_{12}+(2\lambda-4\lambda^2)C_{23}+\frac{4\lambda^2}{3}C_{31}.\end{cases} \tag{10}$$

有关 $s_i(t)$ 的保凸性，我们分下面各种情况讨论，以下假定 $p_{i-1} \neq p_i$。

1）设折线 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 在 p_{i-1}、p_i 点同时凸

$$C_{12}<0, \quad C_{23}<0. \tag{11}$$

我们希望 $s_i(t)$ 凸．当(9)式中十个式子全小于零时，$f_{i,1}f_{i,2}f_{i,3}f_{i,4}f_{i,5}f_{i,6}$ 是凸折线．它们决定的三段三次均匀 B 样条曲线 $s_i(t)$ 应是凸的[3]．(9) 式中前七个式子小于零的充分条件是

$$|C_{31}|<\min\left[\left(\frac{3}{2\lambda}-1\right)|C_{12}|-3|C_{23}|,\left(\frac{3}{2\lambda}-1\right)|C_{23}|-3|C_{12}|\right]. \tag{12}$$

后三个式子小于零的充分条件是:

$$|C_{31}|<\min\left[\left(\frac{3}{4\lambda}+\frac{2}{3}\right)|C_{12}|+\frac{1}{3}|C_{23}|,\left(\frac{3}{4\lambda}+\frac{2}{3}\right)|C_{23}|+\frac{1}{3}|C_{12}|\right]. \tag{13}$$

把(12)与(13)式统一为

$$|C_{31}|<\min\left[\left(\frac{3}{4\lambda}-\frac{1}{2}\right)|C_{12}|-\frac{3}{2}|C_{23}|,\right.$$
$$\left.\left(\frac{3}{4\lambda}-\frac{1}{2}\right)|C_{23}|-\frac{3}{2}|C_{12}|\right]. \tag{14}$$

这是 $s_i(t)$ 是凸曲线的条件．

2）更进一步，如果 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 还是凸折线，这时，不仅(11)式应成立，还应有[5]

$$C_{31} > 0 \text{ 或 } C_{31} < 0 \text{ 但 } |C_{31}| < \min(|C_{12}|, |C_{23}|). \tag{15}$$

这时只要(12)式成立，$s_i(t)$ 便凸.

因为，当 $C_{12} < 0$，$C_{23} < 0$，$C_{31} > 0$ 时，(9)式中最后三式已小于零，而当 $C_{12} < 0$，$C_{23} < 0$，$C_{31} < 0$ 且 $|C_{31}| < \min(|C_{12}|, |C_{23}|)$ 时，(9)式中最后三个式子中的 C_{12} 和 C_{23} 用 C_{31} 代之，它们还小于零，说明(9)式中后三式小于零. 因此在这两种情况下，只是(9)式中前七个式子小于零的不等式起作用，故(12)式成立时 $s_i(t)$ 凸.

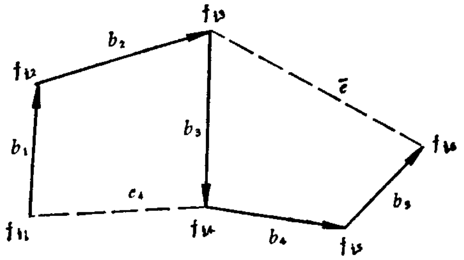


图　2

3) 设折线 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 在 p_{i-1} 点凸，在 p_i 点凹，即

$$C_{12} < 0, \quad C_{23} > 0. \tag{16}$$

我们希望 $s_i(t)$ 的第一段曲线凸，第二段由凸变凹，有一个拐点，第三段凹. 这只须折线 $f_{i,1}f_{i,2}f_{i,3}f_{i,4}$ 凸，折线 $f_{i,2}f_{i,3}f_{i,4}f_{i,5}$ 在 $f_{i,3}$ 点凸，在 $f_{i,4}$ 点凹，折线 $f_{i,3}f_{i,4}f_{i,5}f_{i,6}$ 凹(如图 2 所示)，即

$$\begin{cases} \det|b_1b_2| < 0, \ \det|b_2b_3| < 0, \ \det|b_3e_4| < 0, \ \det|e_4b_1| < 0, \\ \det|b_3b_4| > 0, \ \det|b_4b_5| > 0, \ \det|b_5\bar{e}| > 0, \ \det|\bar{e}b_3| > 0, \end{cases} \tag{17}$$

(17)式中前六个不等式的左边是(9)式中的前六式，后两个不等式左边是(10)式中的两个式子. 通过计算，当(12)式成立时，(17)式成立. $s_i(t)$ 由凸变凹恰有一个拐点.

4) 假定 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 有相邻三点共线，比如 p_{i-1}, p_i, p_{i+1} 三点共线. 本文排除讨论如 p_{i+1} 点落在射线 $\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_{i-1}$ 上这种折线回头的情况. 设

$$C_{12} < 0, \quad C_{23} = 0, \quad C_{31} > 0. \tag{18}$$

我们希望组成 $s_i(t)$ 的第一段曲线凸，第二段由凸变凹，有一个拐点，第三段凹，在终点与 $p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 所在直线相切. 这只要(见图 3)

$$\begin{cases} \det|b_1b_2| < 0, \ \det|b_2b_3| < 0, \ \det|b_3e_4| < 0, \ \det|e_4b_1| < 0, \\ \det|b_3b_4| > 0, \ \det|b_4b_5| = 0, \ \det|b_5\bar{e}| > 0, \ \det|\bar{e}b_3| > 0. \end{cases} \tag{19}$$

由于 p_{i-1}, p_i, p_{i+1} 三点共线，由(2)式知 $s_i'(3)$ 与 $s_i''(3)$ 也和 $p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 所在直线共线，且 $\det|s_i'(3)s''(3)| = 0$，说明 $s_i(t)$. 在端点 $s_i(3)$ 处，与直线 $p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 是一阶导矢与二阶导矢相切，且点 $s_i(3)$ 是拐点.

由(9)，(10)，(18)式，易求出(19)式成立的条件

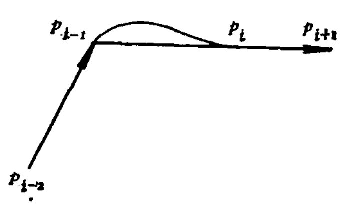
$$|C_{31}| < \left(\frac{3}{2\lambda} - 3\right)|C_{12}|. \tag{20}$$

对 $C_{12} > 0$，$C_{23} = 0$，$C_{31} < 0$ 作类似讨论，仍会得到“理想”控制条件(20). 对 $C_{12} = 0$，$C_{23} \neq 0$ 作类似讨论，得“理想”控制条件

$$|C_{31}| < \left(\frac{3}{2\lambda} - 3\right)|C_{23}|. \tag{21}$$

5) 设 $p_{i-2}, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$ 四点共线，即

$$C_{12} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad C_{31} = 0. \tag{22}$$



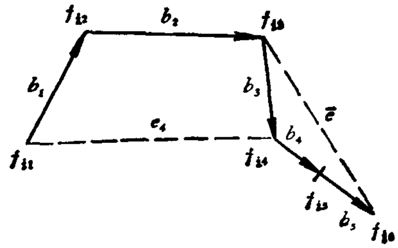


图 3

从(9)式得

$$\det|b_1b_2| = \det|b_2b_3| = \det|b_3b_4| = \det|b_4b_5| = 0,$$

说明 $f_{i,1}f_{i,2}f_{i,3}f_{i,4}f_{i,5}f_{i,6}$ 共线，无论 λ 选何值，$s_i(t)$ 都描绘出 $p_{i-1}p_i$ 线段。

进一步，只要 $C_{12}\cdot C_{23}>0$ 及(14)成立，$s_i(t)$ 是保凸的；只要折线 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 是凸或凹折线及(12)式成立，$s_i(t)$ 是凸或凹曲线；只要 $C_{12}\cdot C_{23}<0$ 及(12)式成立，$s_i(t)$ 是保凸的，而对 $C_{12}\cdot C_{23}=0$ 的情况，我们在4)，5)中已作了分析。

我们对以上情况进行综合，恢复上标记号令

$$E^{(i)}=\max(|C_{12}^{(i)}|,\ |C_{23}^{(i)}|),\quad F^{(i)}=\min(|C_{12}^{(i)}|,\ |C_{23}^{(i)}|). \tag{23}$$

A）如果下列三组条件

$$\begin{cases}(\text{i})\ C_{12}^{(i)}C_{23}^{(i)}>0\ \text{且}\ C_{12}^{(i)}C_{31}^{(i)}<0,\\ (\text{ii})\ C_{12}^{(i)}C_{23}^{(i)}>0\ \ C_{12}^{(i)}C_{31}^{(i)}>0\ \text{且}\ |C_{31}^{(i)}|<F^{(i)},\\ (\text{iii})\ C_{12}^{(i)}\cdot C_{23}^{(i)}<0,\end{cases} \tag{24}$$

有一组成立，则选 $\lambda^{(i)}$ 使(12)式成立，或使

$$|C_{31}^{(i)}|<\left(\frac{3}{2\lambda^{(i)}}-1\right)F^{(i)}-3E^{(i)} \tag{25}$$

选

$$0<\lambda^{(i)}<\frac{3F^{(i)}}{2(|C_{31}^{(i)}|+3E^{(i)}+F^{(i)})}. \tag{26}$$

B）如果

$C_{12}^{(i)}\cdot C_{23}^{(i)}>0$，$C_{12}^{(i)}C_{31}^{(i)}>0$ 且 $|C_{31}^{(i)}|>F^{(i)}$ 选 $\lambda^{(i)}$ 使(14)式成立，或

$$|C_{31}^{(i)}|<\left(\frac{3}{4\lambda^{(i)}}-\frac{1}{2}\right)F^{(i)}-\frac{3}{2}E^{(i)} \tag{27}$$

选

$$0<\lambda^{(i)}<\frac{3F^{(i)}}{2(2|C_{31}^{(i)}|+3E^{(i)}+F^{(i)})}. \tag{28}$$

C）如果

$$E^{(i)}>0,\quad F^{(i)}=0,$$

综合(20)，(21)两式

$$|C_{31}^{(i)}|<\left(\frac{3}{2\lambda^{(i)}}-3\right)E^{(i)} \tag{29}$$

选

$$0 < \lambda^{(i)} < \frac{3E^{(i)}}{2(|C_{31}^{(i)}| + 3E^{(i)})}. \tag{30}$$

D）如果

$$E^{(i)} = F^{(i)} = 0,$$

可任选 $\lambda^{(i)}$，$s_i(t)$ 都是线段 $p_{i-1}p_i$，选

$$\lambda^{(i)} = 1. \tag{31}$$

把适合每一段的 $\lambda^{(i)}$ 选出后，我们再来选适合整条曲线的 λ，它使整条曲线保凸

$$\lambda = \min_i(\lambda^{(i)}). \tag{32}$$

在构造曲线时，若要拟合折线 $P_1P_2\cdots P_n$，令 $\lambda = 0$ 即可．若仅需在 p_{i-1}，p_i 两点之间拟合直线段，取 $p_{i-2} = p_{i-1}$，$p_i = p_{i+1}$ 即可．若要求曲线与某直线段相切，取相邻三点共线即可，甚为方便(图 4)．

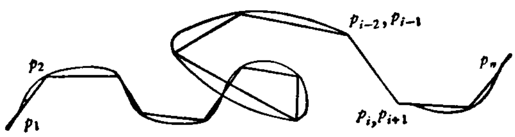


图 4

三、讨　　论

1. 在 $C_{12}^{(i)}$ 与 $C_{23}^{(i)}$ 同号但折线 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 不是凸折线又不是凹折线时，它们决定的三次 B 样曲线可能出现多余拐点[2]．本曲线不会出现多余拐点．在折线 $p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1}$ 有相邻三点共线时，一段三次 B 样条出现一个拐点．本文曲线出现两个拐点，但第二个拐点是该曲线段的端点．因此二者保凸性大致相当．

2. 如果要求计算简便且对保凸性要求不高的场合，可任选一个正数 λ，用我们的曲线作显示插值比较方便．由于它适合非均匀插值，故可作为论文[6]中介绍的适合均匀参数插值的多结点样条函数的补充．

3. 如果各段用不同的 $\lambda^{(i)}$，则得到保凸的但是是一阶斜率连续的拟合曲线．

4. 在实际运用中，只对关键部位选统一的 λ 值．其余部份也用这个 λ 值则在该部分可能不保凸，但关键部位的保凸性得到了保证．

本文得到熊振翔教授、吴骏恒导师的指导，特此致谢．

参　考　文　献

[1] W. J. Gordon, R. F. Riesenfeld, B-Spline Curves and Surfuce, CAGD 1974.
[2] 苏步青，刘鼎元，计算几何，上海科学技术出版社，1981，44—100.
[3] 施法中，北京航空学院硕士论文，1981.
[4] 国外航空编辑部，计算机辅助几何设计，北京，1978. p 6 .
[5] 韩道康，三次非均匀 B 样条的保凸性定理，北京航空学院硕士论文，1981.
[6] 李岳生，齐东旭，样条函数方法，科学出版社，北京，1979，110—114.