一类非线性发展方程的计算稳定性判据* 1)

周振中
(湖南计算中心)

THE COMPUTING STABILITY CRITERION FOR A NONLINEAR EVOLUTION EQUATION

Zhou Zhen-zhong
(*Hunon Computing Center*)

Abstract

This paper gives a computing stability criterion for the 'leap-frog' scheme and 'Crank-Nicolson' schme approximation of equation $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{n}\frac{\partial u^n}{\partial x}=0$ (n is an even positive integer) by a primary method. The main theorem in [3] is also extended.

在用数值方法求解非定常流体运动时，在数值天气预报中，必须设计计算稳定的格式． 这时计算稳定性的研究就有很重要的意义． 平流方程虽然简单，却有很大的代表性[5]．因而很多作者都着意研究了平流方程的计算稳定性问题[1-6]．

非线性平流方程可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}=0. \tag{1}$$

这是 Burgers 方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f$ 当 $\nu=0$、$f=0$ 时的特殊情形． 郭本瑜在[1]、[2]中详尽地研究了 Burgers 方程的数值解，严格证明了初、边值问题的误差估计，圆满地解决了解 Burgers 方程的守恒型差分格式、修正逆风差分格式的稳定性及收敛性． B. Fornberg 在[3]中研究了对特殊初分布的"蛙跳"格式及"Crank-Nicolson"格式的计算稳定性，主要结果是下面的定理一．本文将定理一推广到(1)的一般形式 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial u^n}{\partial x}=0$ (n 为正偶数)的情形，并用初等方法证明之．

数值求解(1)时，在 (x, t) 平面布网 (x_i, t_k)

* 1982 年 9 月 18 日收到．

1) 本文于 1982 年 8 月在首届全国计算物理学术交流会上报告．

$$t_k = k\Delta t,\ X_j = j\Delta x,\ k = 0, 1, 2, \cdots,\ j = 0, 1, \cdots N.$$

关于(1)的计算稳定性,[3]中有如下定理:

定理 1. 对方程(1)若用'蛙跳格式'

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\Delta t} + \frac{\theta}{2}\frac{(u_{j+1}^k)^2 - (u_{j-1}^k)^2}{2\Delta x} + (1-\theta)u_j^k\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta x} = 0 \tag{2}$$

逼近,或用 'Crank-Nicolson' 格式

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + \frac{\theta}{2}\frac{(\bar{u}_{j+1})^2 - (\bar{u}_{j-1})^2}{2\Delta x} + (1-\theta)\bar{u}_j\frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \tag{3}$$

逼近,对格式(2)初值取为

$$\{u_j^0\} = \{\cdots, 0, \varepsilon_0, -\varepsilon_0, 0, \varepsilon_0, -\varepsilon_0, 0, \cdots\},\ \varepsilon_0 > 0, \tag{4}$$

$$\{u_j^1\} = \{\cdots, 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0, \cdots\},\ \varepsilon_1 > 0; \tag{5}$$

对格式(3)初值取为

$$\{u_j^0\} = \{\cdots, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, \cdots\},\quad \varepsilon > 0, \tag{6}$$

则格式(2)、(3)计算稳定的必要条件是 $\theta = \frac{2}{3}$. 对格式(3),若还采用周期边界条件,则 $\theta = \frac{2}{3}$ 也是计算稳定的充分条件.

定理 1 中出现的符号意义如下:其中

$$\bar{u}_j = \frac{1}{2}(u_j^{k+1} + u_j^k),\qquad u_j^k = u(j\Delta x, k\Delta t).$$

(1) 的一般形式是 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{n}\frac{\partial u^n}{\partial x} = 0$. 它可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta}{n}\cdot\frac{\partial u^n}{\partial x} + (1-\theta)u^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

数值求解(7)时,常用的计算格式有'蛙跳格式'

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\Delta t} + \frac{\theta}{n}\frac{(u_{j+1}^k)^n - (u_{j-1}^k)^n}{2\Delta x} + (1-\theta)(u_j^k)^{n-1}\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta x} = 0 \tag{8}$$

及 Crank-Nicolson 格式

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + \frac{\theta}{n}\frac{(\bar{u}_{j+1})^n - (\bar{u}_{j-1})^n}{2\Delta x} + (1-\theta)(\bar{u}_j)^{n-1}\frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2\Delta x} = 0, \tag{9}$$

其中 $\bar{u}_j$、u_j^k 的意义和定理 1 中的相同. 格式(8)、(9)的计算稳定性问题,有如下定理:

定理 2. 若对方程(7)采用(8)、(9)来逼近,对格式(8)初值取为

$$\{u_j^0\} = \{\cdots, 0, -\varepsilon_0, \varepsilon_0, 0, -\varepsilon_0, \varepsilon_0, 0, \cdots\},\ \varepsilon_0 > 0, \tag{10}$$

$$\{u_j^1\} = \{\cdots, 0, -\varepsilon_1, \varepsilon_1, 0, -\varepsilon_1, \varepsilon_1, 0, \cdots\},\ \varepsilon_1 > 0. \tag{11}$$

对格式(9),初值取为

$$\{u_j^0\} = \{\cdots, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, \cdots\},\ \varepsilon > 0, \tag{12}$$

则格式(8)、(9)计算稳定的必要条件是 $\theta = \frac{n}{n+1}$, 其中 n 为正偶数. 对格式(9),若还

采用周期边界条件或零边界条件，则 $\theta = \frac{n}{n+1}$ 亦是计算稳定的充分条件.

在定理 2 的证明之前，首先声明本文所指的计算稳定性是指 L_2 范数意义下的稳定性.

证明. 先证必要性.

由[7]知，方程(1)有形如 $u = w(-x + ut)$ 的解. 又由[4]知，初值问题(1)、(6)的真解具有半群性质，即 $u(s+t) = u(s)\cdot u(t)$. 故可设格式(9)中的 $u(x,t) = r(x)\cdot \xi(t)$，即

$$u_j^k = \xi^k \cdot r_j, \tag{13}$$

代入(9)得

$$\frac{\xi^{k+1}-\xi^k}{\Delta t}\cdot r_j + \left(\frac{\xi^{k+1}+\xi^k}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{\theta}{n}\frac{(r_{j+1})^n-(r_{j-1})^n}{2\Delta x} + (1-\theta)r_j^{n-1}\cdot \frac{r_{j+1}-r_{j-1}}{2\Delta x}\right) = 0 \tag{14}$$

记

$$Tr_j = \frac{\theta}{n}\cdot\frac{(r_{j+1})^n-(r_{j-1})^n}{2\Delta x} + (1-\theta)(r_j)^{n-1}\frac{r_{j+1}-r_{j-1}}{2\Delta x}, \tag{15}$$

则(14)式可写为

$$\frac{\xi^{k+1}-\xi^k}{\Delta t}\cdot r_j + \left(\frac{\xi^{k+1}+\xi^k}{2}\right)^n\cdot Tr_j = 0. \tag{16}$$

将(16)式分离变量，可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\xi^{k+1}-\xi^k}{\Delta t} = c\cdot\left(\dfrac{\xi^{k+1}+\xi^k}{2}\right)^n, & (17)\\[2ex] Tr_j = -cr_j. & (18)\end{cases}$$

当 $c \neq 0$ 时，(17)可视为常微分方程

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = c[\xi(t)]^n \tag{19}$$

的差分近似. (19)式可写为 $d\left(-\frac{\xi^{-(n-1)}}{n-1}\right) = cdt$，取 $\xi(0)=1$，则(19)的解为 $[\xi(t)]^{n-1} = \frac{1}{1-(n-1)ct}$. 当 $t = \frac{1}{(n-)c}$ 时，$\xi(t)$ 将发散至无限.

由差分算子理论[4]，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi(t)}{dt} = A\xi(t) \quad (A = c[\xi(t)]^{n-1}), \qquad 0\leqslant t\leqslant T\\[2ex] \xi(0)=1\end{cases}$$

的真解可记为 $\xi(t) = E(t)\xi(0)$; $\xi(t+\Delta t) = E(\Delta t)\xi(t)$. 差分方程(17)可写为 $\xi(t_k+\Delta t) = c_1(\Delta t)\xi(t_k)$ 或 $\xi(t+\Delta t) = c_1(\Delta t)\xi(t)$，$0\leqslant t\leqslant T$，其中 $c_1(\Delta t)$ 应满足

$$\left\|\frac{c_1(\Delta t)\xi(t)-\xi(t)}{\Delta t} - A\xi(t)\right\| \to 0，当\ \Delta t\to 0，0\leqslant t\leqslant T. \tag{19'}$$

上式中的范数及以下出现的范数均为 L_2 范数．方程（17）是用尤拉方法的平均公式对(19)作的差分逼近，由[5]知(17)是(19)的一个恒稳格式．(19)′表明：(17)是(19)的一个相容性逼近，即对任意 $\varepsilon>0$，能找到 $-\delta>0$，使

$$\|\{E(\Delta t)-c_1(\Delta t)\}\xi(t)\|<\varepsilon\Delta t,\ 当\ 0\leqslant t\leqslant T,\ 0<\Delta t<\delta \qquad (19)''$$

成立．(19)′和(19)″是等价的，其中 $E(\Delta t)\xi(t)$ 为微分方程(19)的真解，$c_1(\Delta t)\xi(t)$ 为差分方程(17)的解．当 $t=\dfrac{1}{(n-1)c}$ $(c\neq 0)$ 时，微分方程(19)的解已发散至无限，此时差分方程(17)的解也将发散至无限．否则相容性条件(19)″将不成立．这就表明，当 $c\neq 0$ 时，格式(9)计算不稳定．下面来证明 $\theta\neq\dfrac{n}{n+1}$ 时，将有 $c\neq 0$．事实上，由(13)可见，当 $\xi(0)=\xi^0=1$ 时 $u_j^0=r_j$，即 $\{r_j\}$ 的分布就是 $\{u_j^0\}$的分布，且 $T\{r_j\}=\{Tr_j\}$，故

$$\{r_j\}=\{\cdots,\ \underset{j-2}{0},\ \underset{j-1}{-\varepsilon},\ \underset{j}{\varepsilon},\ \underset{j+1}{0},\ \underset{j+2}{-\varepsilon},\ \underset{j+3}{\varepsilon},\ 0,\ \cdots\},$$

$$\{r_{j+1}\}=\{\cdots,\ \underset{j-3}{0},\ \underset{j-2}{-\varepsilon},\ \underset{j-1}{\varepsilon},\ \underset{j}{0},\ \underset{j+1}{-\varepsilon},\ \underset{j+2}{\varepsilon},\ \underset{j+3}{0},\cdots\},$$

$$\{r_{j-1}\}=\{\cdots,\ \underset{j-3}{-\varepsilon},\ \underset{j-2}{\varepsilon},\ \underset{j-1}{0},\ \underset{j}{-\varepsilon},\ \underset{j+1}{\varepsilon},\ \underset{j+2}{0},\ \underset{j+3}{-\varepsilon}\cdots\}.$$

易验证，当 n 为正偶数时有

$$\begin{aligned}\{(r_{j+1})^n-(r_{j-1})^n\}&=\{\cdots,\ \underset{j-3}{-\varepsilon^n},\ \underset{j-2}{0},\ \underset{j-1}{\varepsilon^n},\ \underset{j}{-\varepsilon^n},\ \underset{j+1}{0},\ \cdots\}\\&=-\varepsilon^{n-1}\{r_j\},\end{aligned} \qquad (20)$$

$$\{r_{j+1}-r_{j-1}\}=\{\cdots,\ \underset{j-3}{\varepsilon},\ \underset{j-2}{-2\varepsilon},\ \underset{j-1}{\varepsilon},\ \underset{j}{\varepsilon},\ \underset{j+1}{-2\varepsilon},\ \underset{j+2}{\varepsilon},\ \underset{j+3}{\varepsilon},\ \cdots\},$$

$$\{r_j^{n-1}\}=\{\cdots,\ \underset{j-2}{0},\ \underset{j-1}{-\varepsilon^{n-1}},\ \underset{j}{\varepsilon^{n-1}},\ \underset{j+1}{0},\ \underset{j+2}{-\varepsilon^{n-1}},\ \underset{j+3}{\varepsilon^{n-1}},\ 0,\ \cdots\},$$

$$\begin{aligned}\{r_j^{n-1}(r_{j+1}-r_{j-1})\}&=\{\cdots,\ \underset{j-2}{0},\ \underset{j-1}{-\varepsilon^n},\ \underset{j}{\varepsilon^n},\ \underset{j+1}{0},\ \underset{j+2}{-\varepsilon^n},\ \underset{j+3}{\varepsilon^n},0,\cdots\}\\&=\varepsilon^{n-1}\cdot\{r_j\}.\end{aligned} \qquad (21)$$

将(20)、(21)代入(15)得

$$\{Tr_j\}=\frac{\theta}{n}\,\frac{-\varepsilon^{n-1}\{r_j\}}{2\Delta x}+(1-\theta)\frac{\varepsilon^{n-1}\{r_j\}}{2\Delta x}=\frac{[n-(n+1)\theta]\varepsilon^{n-1}}{2n\Delta x}\cdot\{r_j\}. \qquad (22)$$

只要取 $c=-\dfrac{[n-(n+1)\theta]\varepsilon^{n-1}}{2n\Delta x}$，则(22)就满足(18)式．由此可见，当 $\theta\neq\dfrac{n}{n+1}$ 时，$c\neq 0$．即格式计算不稳定．这就证明了 $\theta=\dfrac{n}{n+1}$ 是格式(9)计算稳定的必要条件．

对格式(8)，仍设 $u(x,t)=r(x)\cdot\xi(t)$ 即将 $u_j^k=r_j\cdot\xi^k$ 代入(8)，得

$$\frac{\xi^{k+1}-\xi^{k-1}}{2\Delta t}\cdot r_j+\frac{\theta}{n}(\xi^k)^n\frac{(r_{j+1})^n-(r_{j-1})^n}{2\Delta x}$$

$$+(1-\theta)(\xi^k)^n\cdot(r_j)^{n-1}\frac{r_{j+1}-r_{j-1}}{2\Delta x}=0. \tag{23}$$

记

$$Tr_j=\frac{\theta}{n}\frac{(r_{j+1})^n-(r_{j-1})^n}{2\Delta x}+(1-\theta)(r_j)^{n-1}\frac{r_{j+1}-r_{j-1}}{2\Delta x} \tag{24}$$

则(23)式可写为

$$\frac{\xi^{k+1}-\xi^{k-1}}{2\Delta t}\cdot r_j+(\xi^k)^n\cdot Tr_j=0. \tag{25}$$

将(25)分离变量，可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\xi^{k+1}-\xi^{k-1}}{2\Delta t}=c(\xi^k)^n, & (26)\\[2ex] Tr_j=-cr_j. & (27)\end{cases}$$

当 $c\neq 0$ 时，(26)亦可视为常微分方程 $\frac{d\xi(t)}{dt}=c\xi^n(t)$ 的差分近似. 由此往下进行和 Crank-Nicolson 格式时完全一样的讨论，即可证明 $\theta\neq\frac{n}{n+1}$ 时，$c\neq 0$. 此时，'蛙跳'格式(8)计算不稳定. 定理的必要性证毕.

证充分性时可仿照[1]中的证法. 当 $\theta=\frac{n}{n+1}$ 时，(9)可写为

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\Delta t}+\frac{1}{n+1}\cdot\left[\frac{(\bar{u}_{j+1})^n-(\bar{u}_{j-1})^n}{2\Delta x}+(\bar{u}_j)^{n-1}\frac{\bar{u}_{j+1}-\bar{u}_{j-1}}{2\Delta x}\right]=0. \tag{28}$$

沿用[1]中的记号并定义

$$J(v,w)=\frac{\Delta t}{n+1}[w^{n-1}v_{\hat{x}}+(w^{n-1}v)_{\hat{x}}], \tag{29}$$

则(28)可写为

$$u_j^{k+1}-u_j^k+J(\bar{u}_j,\bar{u}_j)=0 \tag{30}$$

以 $u_j^{k+1}+u_j^k$ 乘(30)两边并对所有 j 求和得

$$\|u^{k+1}\|^2-\|u^k\|^2+(u^{k+1},J(\bar{u},\bar{u}))+(u^k,J(\bar{u},\bar{u}))=0. \tag{31}$$

不难验证，当具有周期边界条件或零边界条件时有

$$(u,u_{\hat{x}})=0,\ (u,(u^n)_{\hat{x}})=0 \tag{32}$$

由(32)及(29)可知 $(u^{k+1},J(\bar{u},\bar{u}))+(u^k,J(\bar{u},\bar{u}))=0$ 故由(31)得 $\|u^{k+1}\|^2-\|u^k\|^2=0$，即表明格式(9)在 L_2 范数意义下计算稳定. 定理 2 的充分性证毕.

本文在写作过程中曾得到郭本瑜副教授的指导和帮助，特此致谢.

参考文献

[1] 郭本瑜，Burgers 方程的数值解 (I)，高等学校计算数学学报，3:4(1981).
[2] 郭本瑜，Burgers 方程的数值解 (II) 高等学校计算数学学报，4:2(1982).

[3] B. Fornberg, On the instability of leap-frog and Crank-Nicolson Approximation of a nonlinear partial Differential equation, Math. Comp. Vol. 27. Num. 121 (1973) 45—57.
[4] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, Difference method for initial Value problem, Interscience publishs, 2'nd. ed. 1967.
[5] 冯康,数值计算方法,国防工业出版社,1978.
[6] R. D. Richtmyer, A Survey of Difference methods for non-steady fluid dynamics, NCAR Technical Note 63—2, 1962.
[7] R. Courant & D. Hilbert, 数学物理方法 (II) 熊振翔等译 1977, P. 4.