应用信息论最小误差熵研究卡尔曼滤波递推算法*

万 幼 川

（武汉测绘科技大学）

A RECURRENCE ALGORITHM OF KALMAN FILTERING WITH LEAST ERROR ENTROPY

Wan Youchuan

(*Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*)

Abstract

In this paper, the relation between entropy and variance is discussed. Then, according to the characteristics of least error entropy, a recurrence algorithm of kalman filtering is derived.

一、熵及与方差的关系

若 $\boldsymbol{X}$ 为具有概率密度函数 $\rho(x)$ 的随机矢量，则其熵的定义

$$H(X)=E[-\log\rho(x)]=-\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\log\rho(x)dx. \tag{1-1}$$

已知随机矢量 $\boldsymbol{X}$ 的观测矢量 $\boldsymbol{Z}$，则其条件熵 $H(X/Z)$ 的定义

$$\begin{aligned}H(X/Z)&=E[-\log\rho(x/z)]=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,z)\log\rho(x/z)dxdz\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}\rho(z)dz\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x/z)\log\rho(x/z)dx.\end{aligned} \tag{1-2}$$

X 与 Z 间的平均互信息量的定义

$$I(X;Z)=H(X)-H(X/Z)=H(Z)-H(Z/X). \tag{1-3}$$

具有某一概率分布的随机变量 X，其熵与方差间存在一定的对应关系。下面讨论高斯分布下的熵与方差的关系。

一维随机变量 X 为高斯分布下的概率密度函数为

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

* 1992 年 10 月 4 日收到。

其中m是X的均值即 $m=E[x]=\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx$

σ^2 是x的方差即 $\sigma^2=E[(X-m)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\rho(x)dx$ 由(1-1)式熵的定义可知

$$\begin{aligned} H(X) &= -\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\log\rho(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\log\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\log\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\log 2\pi\sigma^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2. \end{aligned} \tag{1-4}$$

N维高斯随机矢量 $\boldsymbol{X}=X_1X_2\cdots X_N$ 的概率密度函数

$$\rho(X)=\rho(x_1x_2\cdots x_N)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}|M|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}r_{ik}(x_i-m_i)(x_k-m_k)\right\}. \tag{1-5}$$

由 $r_{ik}(i,k=1,2\cdots N)$ 组成的矩阵R和由 $E[(X_i-m_i)(X_k-m_k)]$ 组成的协方差矩阵 M，是两个互逆矩阵，且都为对称矩阵，亦有

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}r_{ik}\mu_{ik}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}r_{ik}\mu_{ki}\right)=N,$$

其中 $\mu_{ik}=E[(X_i-m_i)(X_k-m_k)]$ 则N维高斯随机矢量熵

$$\begin{aligned} H(X) = H(X_1X_2\cdots X_N) &= -\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\log\rho(x)dx \\ &= \log\{(2\pi)^{N/2}|M|^{\frac{1}{2}}\}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}r_{ik}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)(x_i-m_i)(x_k-m_k)dx \\ &= \log\{(2\pi)^{N/2}|M|^{\frac{1}{2}}|\}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}r_{ik}\mu_{ik} \\ &= \log\{(2\pi)^{N/2}|M|^{\frac{1}{2}}\}+\frac{1}{2}N \\ &= \frac{1}{2}\log|M|+\frac{N}{2}\log(2\pi e), \end{aligned} \tag{1-6}$$

即高斯随机矢量的熵取决于协方差矩阵

$$M=\begin{bmatrix} E[(X_1-m_1)(X_1-m_1)\cdots E[(X_1-m_1)(X_N-m_N)] \\ E[(X_2-m_2)(X_1-m_1)\cdots E[(X_2-m_2)(X_N-m_N)] \\ \vdots \\ E(X_N-m_N)(X_N-m_1)\cdots E[(X_N-m_N)(X_N-m_N)] \end{bmatrix}.$$

二、最小误差熵估计

令N维零均值随机矢量 $\boldsymbol{X}$ 的估计误差为

$$\tilde{X}=X-\hat{X}(z),$$

则由(1-6)式可知，其误差熵为

$$H(\tilde{X})=\frac{1}{2}\log|M|+\frac{N}{2}\log(2\pi e). \tag{2-1}$$

上式表明误差熵 $H(\tilde{X})$ 与误差方差阵存在一定的对应关系．欲使误差熵作为估计准则，并与最小方差估计准则等效，则必须使最小误差熵 $\min H(\tilde{X})$ 与最小方差阵 $\min M$ 相对应，即

$$\min H(\tilde{X})\Longleftrightarrow\min M. \tag{2-2}$$

由(2-1)式得

$$\min H(\tilde{X})\Longleftrightarrow\min|M|. \tag{2-3}$$

因此，式(2-2)变为求下列对应关系：

$$\min|M|\Longleftrightarrow\min M. \tag{2-4}$$

对于对称矩阵A与B，若对任意非零矢量 $\boldsymbol{X}$，恒有

$$X^TAX\geqslant X^TBX,$$

则称A大于或等于B记作 $A\geqslant B$．因此式(2-4)对应关系，实际为下列求证问题：

若$n\times n$阶正定对称矩阵A与B，对任意$n\times 1$维非零矢量$\boldsymbol{X}$，恒有$X^TAX\geqslant X^TBX$，则

$$|A|\geqslant|B|.$$

证．因N维正态分布的概率密度函数为

$$\rho(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}|M|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}X^TM^{-1}X\right).$$

由概率论知

$$\int_{R^N}\rho(x)dx=\int_{R^N}\frac{1}{(2\pi)^{N/2}|M|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}X^TM^{-1}X\right)dx=1. \tag{2-5}$$

由(2-5)式得

$$\int_{R^N}(2\pi)^{-N/2}\exp\left(-\frac{1}{2}X^TM^{-1}X\right)dx=|M|^{\frac{1}{2}}. \tag{2-6}$$

令

$$Q=M^{-1},$$

由于M为正定对称矩阵，故Q存在，并仍为正定对称矩阵．这样(2-6)式可变为

$$\int_{R^N}(2\pi)^{-N/2}e^{-\frac{1}{2}X^TQX}dx=|Q|^{-\frac{1}{2}}.$$

利用上面关系，当 $X^TAX\geqslant X^TBX$ 时，必有

$$|A|^{-\frac{1}{2}}=\int_{R^N}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}e^{-\frac{1}{2}X^TAX}dx\leqslant\int_{R^N}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}e^{-\frac{1}{2}X^TBX}dx=|B|^{-\frac{1}{2}},$$

所以

$$|A| \geqslant |B|.$$

由此可知最小误差熵估计与最小方差估计准则等价.

下面来研究误差熵的一些性质. 由于估计误差 $\tilde{X} = X - \hat{X}(Z)$,故根据熵的性质可得

$$H(X,Z) = H(\tilde{X},Z).$$

由于

$$H(X,Z) = H(Z) + H(X/Z),$$

则由上式和熵的性质得

$$H(\tilde{X},Z) = H(Z) + H(\tilde{X}) - I(\tilde{X};Z).$$

由此误差熵可表示为

$$H(\tilde{X}) = H(X/Z) + I(\tilde{X};Z).$$

由于条件熵与估计方法无关且 $I(\tilde{X};Z) \geqslant 0$, 于是得误差熵的一些性质如下:

(1) $H(\tilde{X}) \geqslant H(X/Z)$, 即条件熵 $H(X/Z)$ 为误差熵的下限;

(2) $\min H(\tilde{X}) \Longleftrightarrow \min I(\tilde{X};Z)$,即最小误差熵与 $\tilde{X}$、Z 间最小平均互信息量 $I(\tilde{X};Z)$ 等效;

(3) 当 $I(\tilde{X};Z) = 0$ 时,误差熵达其下限,即

$$H(\tilde{X}) = H(X/Z);$$

(4) $H(X/Z)$ 为 X 与 Z 间纯统计关系的函数.

三、卡尔曼滤波递推算法推导

卡尔曼滤波是线性无偏最小方差估计,而最小误差熵与最小方差估价等价,因此可以用最小误差熵来研究卡尔曼滤波.

设离散系统的 n 维状态方程与 m 维测量方程分别为

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1},$$
$$Z_k = H_kX_k + V_k.$$

动态噪声 $\{W_k\}$ 与观测噪声 $\{V_k\}$ 的统计特性为

$$E[W_k] = 0, \operatorname{cov}(W_k,W_j) = E[W_kW_j^T] = Q_k\delta_{k,j}$$
$$E[V_k] = 0, \operatorname{cov}(V_k,V_j) = E[V_k,V_j^T] = R_k\delta_{kj},$$
$$\operatorname{cov}(W_k,V_j) = E[W_kV_j^T] = 0.$$

系统初始状态的统计特性为

$$E(X_0) = \bar{X}_0, \operatorname{var}X_0 = E[(X - \bar{X}_0)(X - \bar{X}_0)^T] = P_0,$$
$$\operatorname{cov}(X_0,W_k) = E[X_0W_k^T] = 0, \ \operatorname{cov}(X_0,V_k) = E[X_0V_k^T] = 0.$$

现根据观测矢量序列 $Z_1, Z_2 \cdots Z_k$ 用最小误差熵估计推演卡尔曼递推算法.

1. $k-1$ 时刻一步预测值 $\hat{X}_{k/k-1}$ 与滤波值 $\hat{X}_{k-1}$ 间关系

设其关系为

$$\hat{X}_{k/k-1} = A_p\hat{X}_{k-1}, \tag{3-1}$$

式中矩阵 A_p 的选择应使一步预测误差

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_{k/k-1} &= X_k - \hat{X}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1} - A_p\hat{X}_{k-1}\\ &= \Phi_{k,k-1}\widetilde{X}_{k-1} + \Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1} - A_p\hat{X}_{k-1}\end{aligned} \tag{3-2}$$

的误差熵 $H(\hat{X}_{k/k-1})$ 为最小，而误差熵 $H(\hat{X}_{k/k-1})$ 为最小则一步预测误差 $\widetilde{X}_{k/k-1}$ 的方差阵 $P_{k/k-1}$ 应该最小。显然这时有

$$A_p = \Phi_{k,k-1}. \tag{3-3}$$

将(3-3)代入(3-2)式得最优一步预测误差

$$\widetilde{X}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1}\widetilde{X}_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1}. \tag{3-4}$$

由最小误差性质(3)，则最优一步预测有

$$H(\widetilde{X}_{k/k-1}) = H(X_k/Z_1^{k-1}), \tag{3-5}$$

其中 $Z_1^{k-1}=\{Z_1Z_2\cdots Z_{k-1}\}$. 因 $\widetilde{X}_{k/k-1}$ 与 X_k/Z_1^{k-1} 为正态分布，故 $\widetilde{X}_{k/k-1}$ 的方差阵 $P_{k/k-1}$ 应等于条件随机矢量 X_k/Z_1^{k-1} 的方差阵 $\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1})$，即

$$P_{k/k-1} = \mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1}), \tag{3-6}$$

得

$$\begin{aligned}P_{k/k-1} &= E[\widetilde{X}_{k/k-1}\widetilde{X}_{k/k-1}^T] = E[(\Phi_{k,k-1}\widetilde{X}_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1})(\Phi_{k,k-1}\widetilde{X}_{k-1}\\ &\quad + \Gamma_{k-1}W_{k-1})^T] = \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^T.\end{aligned} \tag{3-7}$$

2. 卡尔曼滤波递推算法

设

$$\hat{X}_k = A_k\hat{X}_{k-1} + B_kZ_k, \tag{3-8}$$

式中矩阵 A_k 与 B_k 的选择应使 k 时刻的滤波误差

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_k &= X_k - \hat{X}_k = X_k - A_k\hat{X}_{k-1} - B_kZ_k = X_k - A_k\hat{X}_{k-1} - B_k(H_kX_k + V_k)\\ &= (I - B_kH_k)X_k - A_k\hat{X}_{k-1} - B_kV_k\\ &= (I - B_kH_k)(\Phi_{k,k-1}X_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1}) - A_k\hat{X}_{k-1} - BV_k\\ &= (I - B_kH_k)[\Phi_{k,k-1}(\hat{X}_{k-1} + \widetilde{X}_{k-1}) + \Gamma_{k-1}W_{k-1}] - A_k\hat{X}_{k-1} - B_kV_k\\ &= (I - B_kH_k)(\Phi_{k,k-1}\widetilde{X}_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1}) - B_kV_k\\ &\quad + [(I - B_kH_k)\Phi_{k,k-1} - A_k]\hat{X}_{k-1}\\ &= (I - B_kH_k)\widetilde{X}_{k/k-1} - BV_k + [(I - B_kH_k)\Phi_{k,k-1} - A_k]\hat{X}_{k-1}\end{aligned} \tag{3-9}$$

的误差熵 $H(\widetilde{X}_k)$ 为最小。误差熵 $H(\widetilde{X}_k)$ 为最小，滤波误差 $\widetilde{X}_k$ 的方差阵 P_k 应该最小，显然这时应选择

$$A_k = (I - B_kH_k)\Phi_{k,k-1}. \tag{3-10}$$

最优滤波误差为

$$\widetilde{X}_k = (I - B_kH_k)\widetilde{X}_{k/k-1} - B_kV_k. \tag{3-11}$$

将(3-10)代入(3-8)式，得最优滤波值为

$$\hat{X}_k = \Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1} + B_k(Z_k - H_k\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}). \tag{3-12}$$

当误差熵 $H(\widetilde{X}_k)$ 为最小时，由误差熵性质得

$$I(\widetilde{X}_k;Z_1^k) = I(\widetilde{X}_k;Z_1^{k-1},Z_k) = 0. \tag{3-13}$$

又因为 $I(X;Y,Z) = I(X;Y) + I(X;Z/Y)$，

故(3-13)式变为

$$I(\widetilde{X}_k;Z_1^{k-1},Z_k)=I(\widetilde{X}_k;Z_1^{k-1})+I(\widetilde{X}_k;Z_k/Z_1^{k-1})=0. \tag{3-14}$$

由于 $\hat{X}_{k-1}$ 满足最小误差熵估计准则，则根据最小误差性质有

$$I(\widetilde{X}_{k-1};Z_1^{k-1})=0, \tag{3-15}$$

$$I(\widetilde{X}_k;Z_1^{k-1})\leqslant I(\widetilde{X}_{k-1};Z_1^{k-1}), \tag{3-16}$$

由式(3-15)、(3-16)可知 $I(\widetilde{X}_k;Z_1^{k-1})=0$，由(3-14)式最小误差熵估计满足下列条件：

$$I(\widetilde{X}_k;Z_k/Z_1^{k-1})=0. \tag{3-17}$$

而

$$\begin{aligned}P_k&=E[\widetilde{X}_k\widetilde{X}_k^T]=E\{[(I-B_kH_k)\widetilde{X}_{k/k-1}-B_kV_k][(I-B_kH_k)\widetilde{X}_{k/k-1}-B_kV_k]^2\}\\&=(I-B_kH_k)P_{k/k-1}(I-B_kH_k)^T+B_kR_kB_k^T.\end{aligned} \tag{3-18}$$

因为 X_k 与 Z_1^k 是正态分布，则条件方差阵

$$\mathrm{var}(X_k/Z_1^k)=\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1}/Z_k/Z_1^{k-1}).$$

可以表示为下式：

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X_k/Z_1^k)&=\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1}/Z_k/Z_1^{k-1})\\&=\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1})-\mathrm{cov}(X_k/Z_1^{k-1},Z_k/Z_1^{k-1})\\&\quad\cdot[\mathrm{var}(Z_k/Z_1^{k-1})]^{-1}\mathrm{cov}(Z_k/Z_1^{k-1},X_k/Z_1^{k-1}).\end{aligned} \tag{3-19}$$

利用测量方程，则

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_k/Z^{k-1},Z_k/Z_1^{k-1})&=\mathrm{cov}(X_k/Z_1^{k-1},H_kX_k+V_k/Z_1^{k-1})\\&=\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1})H_k^T,\end{aligned} \tag{3-20}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Z_k/Z_1^{k-1})&=E[(H_kX_k+V_k/Z_1^{k-1})(H_kX_k+V_k/Z_1^{k-1})^T]\\&=H_k\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1})H_k^T+R_k.\end{aligned} \tag{3-21}$$

由(3-20)、(3-21)得

$$\begin{aligned}&\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1})-\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1})H_k^T[\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1})H_k^T+R_k]^{-1}H_k\mathrm{var}(X_k/Z_1^{k-1})\\&\quad=(I-B_kH_k)P_k(I-B_kH_k)^T+B_kR_kB_k^T.\end{aligned} \tag{3-22}$$

将(3-6)代入(3-22)得

$$\begin{aligned}&P_{k/k-1}H_k^T[B_k^T-(H_kP_{k/k-1}H_k^T+R_k)^{-1}H_kP_{k/k-1}]\\&\quad=B_k[-H_kP_{k/k-1}+(H_kP_kH_k^T+R_k)B_k^T].\end{aligned} \tag{3-23}$$

由此得

$$B_k=P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T+R_k)^{-1}. \tag{3-24}$$

由(3-7)、(3-12)、(3-18)、(3-24)，及所给的初始条件 $\hat{X}_0=\overline{X}_0$ 与 P_0，得卡尔曼滤波递推算法为：

(1) 最优滤波值

$$\hat{X}_k=\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}+B_k(Z_k-H_k\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1})=\hat{X}_{k/k-1}+K_k(Z_k-H_k\hat{X}_{k-k-1}).$$

(2) 最优滤波增益

$$B_k=P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T+R_k)^{-1}.$$

(3) 预测误差方差阵

$$P_{k/k-1}=\Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T+\Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^T.$$

(4) 滤波误差方差阵

$$P_k=(I-B_kH_k)P_{k/k-1}(I-B_kH_k)^T+B_kR_kB_k^T$$

$$= (I - B_k H_k) P_{k/k-1}.$$

四、算　　例

设状态方程和观测方程为

$$\begin{cases} X_k = 0.5X_{k-1} + W_{k-1}, \\ L_k = X_k + V_k, \end{cases} \tag{4-1}$$

式(4-1)中 X、W、V 都是标量，其随机模型是

$$E(W_k) = 0, E(V_k) = 0,$$

$$E(X_0) = \hat{X}(0/0) = 0, \mathrm{cov}(V_k, V_j) = 0,$$

$$\mathrm{cov}(W_k, W_j) = 0, \mathrm{cov}(W_k, V_k) = 0,$$

$$\mathrm{cov}(X_0, V_k) = 0, \mathrm{cov}(X_0, W_k) = 0,$$

$$R_k = 2,\ Q_k = 1,\ P_0 = 1.$$

已知两次观测数据 $L_1 = 4$，$L_2 = 2$，则下面解算 $\hat{X}_{2/2}$ 和 $P_{2/2}$.

① 计算一步预测值

$$\hat{X}_{1/0} = \Phi_{1,0}\hat{X}_{0/0} = 0.5 \times 0 = 0,$$

$$P_{1/0} = \Phi_{1,0}P_0\Phi_{1,0}^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T$$

$$= 0.5^2 + 1 = 1.25.$$

② 求增益矩阵

$$B_1 = P_{1/0}H_1^T[H_1P_{1/0}H_1^T + R_k]^{-1}$$

$$= 1.25(1.25 + 2)^{-1} = 1.25/3.25 = 0.385.$$

③ 计算新息 $\tau_{1/0}$

$$\tau_{1/0} = L_1 - H_1\hat{X}_{1/0} = 4.$$

④ 计算 $\hat{X}_{1/1}$ 和 $P_{1/1}$

$$\hat{X}_{1/1} = \hat{X}_{1/0} + B_1\tilde{L}_{1/0} = 0 + 0.385 \times 4 = 1.54,$$

$$P_{1/1} = (1 - B_1H_1)P_{1/0} = (1 - 0.385) \times 1.25 = 0.77.$$

⑤ 依①—④的公式计算 $\hat{X}_{2/1}, P_{2/1}, B_2, \tilde{L}_{2/1}$ 和 $\hat{X}_{2/2}$、$P_{2/2}$

$$\hat{X}_{2/1} = \Phi_{2,1}\hat{X}_{1/1} = 0.5 \times 1.54 = 0.77,$$

$$P_{2/1} = \Phi_{2,1}P_{1/1}\Phi_{2,1}^T + Q_1 = 0.5^2 \times 0.77 + 1 = 1.19,$$

$$B_2 = P_{2/1}H_2^T(H_2P_{2/1}H_2^T + R_2)^{-1}$$

$$= 1.19(1.19 + 2)^{-1} = 0.373,$$

$$\tilde{L}_{2/1} = L_2 - H_2\hat{X}_{2/1} = 2 - 0.77 = 1.23,$$

$$\hat{X}_{2/2} = \hat{X}_{2/1} + B_2\tilde{L}_{2/1} = 0.77 + 0.373 \times 1.23 = 1.23,$$

$$P_{2/2} = (1 - B_2H_2)P_{2/1} = (1 - 0.373) \times 1.19 = 0.75.$$

参 考 文 献

[1] 姜丹,信息论,中国科技大学出版社 1987.9.
[2] 陆恺等,最优估计理论及其在导航中应用、上海交通大学出版社 1990.7.
[3] 崔希璋等,广义测量平差,测绘出版社,1992.10.
[4] 中国科学院数学研究所,离散时间系统滤波的数学方法,国防工业出版社,1975.
[5] 王宏禹,随机数字信号处理,科学出版社,1988.5.