# 一维抛物型方程的一个新的高精度显式差分格式[*1)]

马明书

(河南师范大学数学系 新乡 453002)

# A NEW HIGH ACCURACY EXPLICIT DIFFERENCE SCHEME WITH BRANCHING STABLE FOR SOLVING PARABOLIC EQUATION OF ONE-DIMENSION

Ma Mingshu

(*Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang* 453002)

**Abstract**

This paper presents a branching stable explicit difference scheme for solving parabolic equation of one-dimension. The local truncation error for method is $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$, stability condition is $r < 1/2$.

**Key words:** one-dimension parabolic equation, explicit difference scheme, truncation error

工程技术中，常常需要求解抛物型方程. 一维情形下的模型问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0,\ a > 0, & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L, & (2) \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0. & (3) \end{cases}$$

用差分方法解上述问题，隐格式常因计算量很大而不便使用，构造稳定性好精度高的显格式是非常必要的. 文 [1] 构造了求解 $p$ 维抛物型方程的分支绝对稳定的显式差分格式, 但格式的精度不高，截断误差仅为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. 本文就 $p = 1$ 情形构造了一个解问题 (1)–(3) 的新的显格式，精度较文 [1] 有较大的提高，截断误差可达 $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$.

## § 1. 差分格式的构造

设 $\Delta t$ 为时间步长， $\Delta x = L/M$($M$ 为正整数) 为空间步长，网函数 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ 记为 $u_j^n$. 对方程 (1) 建立如下的差分格式:

$$\begin{aligned} &\eta_1 \Delta_t u_j^n + \eta_2 \Delta_t u_j^{n-1} + \frac{\eta_3}{2}(\Delta_t u_{j+1}^n + \Delta_t u_{j-1}^n) + \frac{\eta_4}{2}(\Delta_t u_{j+1}^{n-1} + \Delta_t u_{j-1}^{n-1}) \\ &= a[\theta_1 \delta_x^2 u_j^{n+1} + (1 - \theta_1 - \theta_2)\delta_x^2 u_j^n + \theta_2 \delta_x^2 u_j^{n-1}], \end{aligned} \tag{4}$$

* 1999 年 7 月 5 日收到.

其中 $\Delta_t$ 是关于 $t$ 的一阶向前差商, $\delta_x^2$ 是关于 $x$ 的二阶中心差商, $\eta_1$–$\eta_4, \theta_1, \theta_2$ 为待定参数.

将 (4) 式中各节点上的 $u$ 以其在节点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ 处展开的 Taylor 级数代入, 并利用方程 (1) 可得

$$\begin{aligned}
&(\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4)a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(\eta_1-\eta_2+\eta_3-\eta_4)a^2\Delta t\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{1}{2}(\eta_3+\eta_4)a\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\\
&+\frac{1}{6}(\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4)a^3\Delta t^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{1}{4}(\eta_3-\eta_4)a^2\Delta t\Delta x^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\\
&=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\theta_1-\theta_2)a^2\Delta t\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{1}{12}a\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)a^3\Delta t^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\\
&+\frac{1}{12}(\theta_1-\theta_2)a^2\Delta t\Delta x^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+O(\Delta t^3+\Delta x^4).
\end{aligned}$$

为了使 (4) 式成为具有截断误差 $O(\Delta t^3+\Delta x^4)$ 的显格式, 只需

$$\begin{cases}
\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4=1,\\
\dfrac{1}{2}(\eta_1-\eta_2+\eta_3-\eta_4)a^2\Delta t+\dfrac{1}{2}(\eta_3+\eta_4)a\Delta x^2\\
\qquad=(\theta_1-\theta_2)a^2\Delta t+\dfrac{1}{12}a\Delta x^2,\\
\dfrac{1}{6}(\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4)a^3\Delta t^2+\dfrac{1}{4}(\eta_3-\eta_4)a^2\Delta t\Delta x^2\\
\qquad=\dfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)a^3\Delta t^2+\dfrac{1}{12}(\theta_1-\theta_2)a^2\Delta t\Delta x^2,\\
\eta_3=2\theta_1 r,
\end{cases}$$

其中 $r=a\Delta t/\Delta x^2$. 解上述方程组得

$$\begin{aligned}
\eta_1&=\frac{1}{6}-2\theta_1 r+\frac{1}{6r}(\theta_1-\theta_2)+\frac{1}{12r},\\
\eta_2&=\frac{5}{6}+\Big(2\theta_2-\frac{2}{3}\Big)r+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{6r}\Big)(\theta_1-\theta_2)-\frac{1}{12r},\\
\eta_3&=2\theta_1 r,\quad \eta_4=\Big(\frac{2}{3}-2\theta_2\Big)r-\frac{1}{3}(\theta_1-\theta_2).
\end{aligned}$$

将 $\eta_1$–$\eta_4$ 之值代入 (4) 式, 可得含有参数 $\eta=\theta_1-\theta_2$ 的截断误差为 $O(\Delta t^3+\Delta x^4)$ 的三层显式差分格式

$$\begin{aligned}
(2r+2\eta+1)u_j^{n+1}&=(8r^2+2\eta r)(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)+(2-16r^2-8r-4\eta r+4\eta)u_j^n\\
&+(4r^2-2\eta r)(u_{j+1}^{n-1}+u_{j-1}^{n-1})+(10r+4\eta r-8r^2-2\eta-1)u_j^{n-1}.
\end{aligned}\tag{5}$$

## § 2. 稳定性与收敛性

用 Fourier 分析法容易算出格式 (5) 的传播矩阵为

$$G(S)=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $g_{11}=[4\eta-8r(4r+\eta)S-8r+2]/(2r+2\eta+1)$, $g_{12}=[8r(\eta-2r)S-2\eta+10r-1]/(2r+2\eta+1)$, $g_{21}=1$, $g_{22}=0$, $S=\sin^2\dfrac{\theta}{2}\in[0,1]$. $G(S)$ 的特征方程为

$$\lambda^2-g_{11}\lambda-g_{12}=0. \tag{6}$$

**引理 1**[2]. 特征方程 (6) 的根满足 $|\lambda_{1,2}|\le 1$ 的充要条件是

$$|g_{11}|\le 1-g_{12}\le 2. \tag{7}$$

**引理 2**[3]. 差分格式 (5) 稳定, 即矩阵族 $G^n(S)$ $(S\in[0,1],n=1,2,\cdots)$ 一致有界的充要条件是:

(1) $|\lambda_{1,2}|\le 1$, ($\lambda_{1,2}$ 是方程 (6) 的根), (8)

(2) $N_0^1\Big((1-\dfrac{1}{4}|g_{11}+g_{22}|^2)^2\Big)\cap N_0^1(|(g_{11}-g_{22})^2+4g_{12}g_{21}|)$
$\subseteq N_0^1((g_{11}-g_{22})^2)\cap N_0^1(g_{12}^2)\cap N_0^1(g_{21}^2)$. (9)

其中 $N_0^1(f(s))$ 表示多项式 $f(s)$ 在 [0, 1] 区间内所有实根的集合 (重根要重复计).

首先考虑 (9) 式, 由于 $g_{21}=1$, 所以 $N_0^1(g_{21}^2)$ 是空集, 故 (9) 式成立的充要条件是使

$$1-\frac{1}{4}g_{11}^2=g_{11}^2+4g_{12}=0. \tag{10}$$

成立的 $S$ 或者不存在, 或者不属于区间 [0, 1]. 当 $g_{12}\ne -1$ 时, 使 (10) 式成立的 $S$ 不存在. 由 (7), (8) 两式知格式 (5) 稳定的条件为

$$-1+g_{12}\le g_{11}\le 1-g_{12}<2. \tag{11}$$

由 $g_{11}\le 1-g_{12}$ 得 $48r^2s/(2r+2\eta+1)\ge 0$, 此式成立的充要条件是

$$\eta>-r-1/2. \tag{12}$$

当 (12) 式成立时, 由 $1-g_{12}<2$ 和 $-1+g_{12}\le g_{11}$ 分别得下列两式:

$$2(2r-\eta)S-3<0, \tag{13}$$

$$-4r(r+\eta)S+2\eta+1-4r\ge 0. \tag{14}$$

(13) 式成立的一个充分条件是 $2r-\eta<3/2$, 即

$$\eta>2r-3/2. \tag{15}$$

(14) 式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases} r<1/2, \\ \eta\ge 2r-1/2, & (16) \\ \eta\ge(4r^2+4r-1)/(2-4r). & (17) \end{cases}$$

注意到条件 (16) 强于条件 (15) 与 (12), 故知当条件

$$\begin{cases} r<1/2, \\ \eta\ge\max\{2r-1/2,(4r^2+4r-1)/(2-4r)\} \end{cases} \tag{18}$$

满足时 (11) 式成立. 又根据 Lax 的稳定性与收敛性等价定理可得：

**定理**. 当条件 (18) 满足时，格式 (5) 稳定且收敛.

## § 3. 参数的选取与差分格式的确定

参数 $\eta$ 应按条件 (18) 选取，现提供如下方法：

1. 当 $r < 1/2$, 且 $2r - 1/2 \geq (4r^2 + 4r - 1)/(2 - 4r)$ 时，此即 $r \leq 1/6$, 应取 $\eta \geq 2r - 1/2$, 为确定起见，取 $\eta = 2r - 1/2$. 此时格式 (5) 成为

$$u_j^{n+1} = \Big(2r - \frac{1}{6}\Big)(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \Big(\frac{1}{3} - 4r\Big)u_j^n + \frac{1}{6}(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + \frac{2}{3}u_j^{n-1}, \tag{19}$$

其截断误差为 $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$, 稳定性条件为 $r \leq 1/6$.

2. 当 $r < 1/2$, 且 $2r - 1/2 \leq (4r^2 + 4r - 1)/(2 - 4r)$ 时，此即 $1/6 \leq r < 1/2$, 应取 $\eta \geq (4r^2 + 4r - 1)/(2 - 4r)$, 为确定起见，取 $\eta = (4r^2 + 4r - 1)/(2 - 4r)$. 此时格式 (5) 成为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \Big(3r - 3r^2 - \frac{1}{4}\Big)(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \Big(6r^2 - \frac{1}{2}\Big)u_j^n \\ &\quad + \Big(\frac{1}{4} - 3r^2\Big)(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + \Big(6r^2 - 6r + \frac{3}{2}\Big)u_j^{n-1}, \end{aligned} \tag{20}$$

其截断误差为 $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$, 稳定性条件为 $1/6 \leq r < 1/2$.

联合使用格式 (19), (20) 则对任意的 $0 < r < 1/2$, 就构成一个截断误差为 $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$ 的稳定且收敛的三层显格式. 由于当 $r = 1/6$ 时，格式 (19) 与 (20) 化为同一格式，故按文 [1] 的说法，也可称格式 (19), (20) 为分支稳定的显格式.

## § 4. 数值例子

对初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = e^{-t}\sin 1, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{21}$$

利用本文格式和文 [1] 格式 ($p = 1$ 时格式 (37)) 求数值解, 并比较结果. 取 $\Delta x = 1/10$, $\Delta t = r\Delta x^2 = r/100$, $r = 1/8,\ 1/4,\ 3/8,\ 1/2$ 来计算. 为方便，用问题 (21) 的精确解 $u(x,t) = e^{-t}\sin x$ 计算第一层的值 $u_j^1$, 然后按文 [1] 格式和本文格式计算到 $n = 200$ 的结果如表 1.

**表 1**

| | $r = 1/8$ | | | $r = 1/4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 精确解 | 本文格式 (19) | 文 [1] 格式 | 精确解 | 本文格式 (20) | 文 [1] 格式 |
| 0.1 | 0.07775036 | 0.07775035 | 0.07773023 | 0.06055205 | 0.06055205 | 0.06053439 |
| 0.3 | 0.23015142 | 0.23015139 | 0.23009602 | 0.17924214 | 0.17924214 | 0.17919380 |
| 0.5 | 0.37337706 | 0.37337703 | 0.37330129 | 0.29078640 | 0.29078639 | 0.29072097 |
| 0.7 | 0.50171734 | 0.50171731 | 0.50164580 | 0.39073894 | 0.39073892 | 0.39067701 |
| 0.9 | 0.61005574 | 0.61005571 | 0.61002193 | 0.47511198 | 0.47511197 | 0.47508366 |

**续表 1**

| | $r=3/8$ | | | $r=1/2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 精确解 | 本文格式 (20) | 文 [1] 格式 | 精确解 | 本文格式 (20) | 文 [1] 格式 |
| 0.1 | 0.04715791 | 0.04715799 | 0.04714400 | 0.03672669 | 0.03674195 | 0.03671508 |
| 0.3 | 0.13959368 | 0.13959392 | 0.13955564 | 0.10871589 | 0.10875790 | 0.10868393 |
| 0.5 | 0.22646430 | 0.22646462 | 0.22641287 | 0.17637094 | 0.17642847 | 0.17632705 |
| 0.7 | 0.30430649 | 0.30430680 | 0.30425870 | 0.23699463 | 0.23704915 | 0.23695218 |
| 0.9 | 0.37001699 | 0.37001709 | 0.36999478 | 0.28817009 | 0.28819605 | 0.28814636 |

由表看出，对满足稳定性条件的不同的 $r$ 值，本文格式解与精确解均有很好的吻合，它较文 [1] 格式精确 3–4 位有效数字，这个数值结果与理论分析完全一致．另外，虽然 $r=1/2$ 不满足稳定性条件，但计算仍然稳定，只是精度低了点．

## 参考文献

[1] 曾文平，多维抛物型方程的分支绝对稳定的显式格式，高等学校计算数学学报，**19**：2 (1997), 112–121.

[2] 李荣华，关于二次方程根的分析及其在差分法中的应用，吉林大学学报 (自), 1 (1963), 7–11.

[3] 马驷良，二阶矩阵族 $G^n(\kappa,\Delta t)$ 一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用，高等学校计算数学学报，**2**：2(1980), 41–53.