一阶非定常双曲问题的间断 - 差分流线扩散法及其误差估计[*1)]

张　阳
(南开大学数学科学学院, 天津 300071)

摘　要

本文提出了求解一阶非定常双曲问题的一种新型有限元方法. 间断 - 差分流线扩散法 (DFDSD 方法), 建立了 Euler 型 DFDSD 格式, 并对格式解的稳定性和收敛性进行了理论分析, 最后给出了数值算例说明算法的有效性.

关键词: 一阶双曲问题, 流线扩散, 间断有限元

THE DISCONTINUOUS FINITE DIFFERENCE STREAMLINE DIFFUSION METHOD FOR TIME DEPENDENT FIRST-ORDER HYPERBOLIC PROBLEM AND ITS ERRORESTIMATES

Zhang Yang
(*School of Mathematics, Nankai University, Tianjin* 300071*, China*)

Abstract

In this paper, a new finite element method, discontinuous finite difference streamline diffusion method is studied for first-order linear hyperbolic problems. A discontinuity-type explicit finite element scheme with artificial diffusion parameter is constructed, the stability and convergence in proper norm are established for the considered scheme. Finally, a numerical example is provided to show the highly efficiency of the new scheme.

Key words: First-order hyperbolic problem, Streamline diffusion, Discontinuous finite element

§1. 引　　言

众所周知, 求解一阶双曲问题的 Galerkin 有限元方法, 仅具有次最优 L^2- 收敛阶估计, 且 Galerkin 有限元解常呈现伪数值振荡. 为改善计算精度与稳定性, 诸多非标准有限元解

∗ 2005 年 6 月 28 日收到.
1) 国家自然科学基金资助 (项目编号:103016).

法相继提出, 其中间断 (Discontinuous) Galerkin 有限元法 (以下简称 DG 方法) 与流线扩散 (Streamline Diffusion) 有限元法 (以下简称 SD 法) 是两种具有鲜明特点, 较为成功的算法. 具体地, DG 方法是一种迎风型显式算法, 它从入流边界开始, 沿流场方向, 自上游往下游, 逐个单元进行计算, 计算简便且可局部并行化. SD 方法则是一种 Petrov-Galerkin 型的人工粘性法, 由于它在流线方向引进人工粘性 (扩散) 项, 使计算过程具有良好的稳定性. SD 方法是一种隐式方法, 需在计算区域上整体求解离散化方程组, 工作量较大. 文 [1] 已将 DG 方法与 SD 方法结合在一起, 提出了求解一阶双曲问题的间断流线扩散法 (Discontinuous Streamline Diffusion FEM), 以下简称之为 DSD 法, 其基本思想是保持 DG 算法的基本结构, 但在从上游往下游逐个单元作显式计算时, 将 Galerkin 框架改为 SD 框架. 这样既保持了 DG 方法迎风、显式的特点, 又进一步改善 SD 法的稳定性. 由于文 [1] 在使用 DSD 法处理非定常问题时, 将时间变量与空间变量同等看待, 采用时空有限元方法求解, 这一处理无形中使求解问题的维数增加了一维, 对高维问题和非线性问题的处理会带来许多困难.

基于以上分析, 本文构造对时间变量作差分离散而对空间变量作 DSD 离散的全离散间断流线扩散法 (Discontinuous Finite Difference Streamline Diffusion Method), 简称 DFDSD 方法, 对一阶线性双曲型问题进行了理论分析与数值计算.

§2. 一阶双曲问题的 DFDSD 格式

设 Ω 为二维多边形区域, $[0,T]$ 为时间区域, 其边界为 Γ, 考虑一阶双曲问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta(x,t)\cdot\nabla u+\sigma(x,t)u=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{2.1}$$

$$u(x,t)=g(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_-(t)\times(0,T), \tag{2.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{2.3}$$

其中 $\beta=(\beta_1,\beta_2),\nabla$ 为梯度算符. $\Gamma=\Gamma_-(t)\cup\Gamma_+(t)$.

$\Gamma_-(t)=\{x\in\Gamma:\beta(x,t)\cdot\gamma(x)<0\}$, $\gamma(x)$ 为 Γ 在 x 处的单位外法向, $\Gamma_+(t)=\{x\in\Gamma:\beta(x,t)\cdot\gamma(x)\geq 0\}=\Gamma\setminus\Gamma_-(t)$. 称 Γ_- 为方程 (2.1) 在时刻 t 时的入 (内) 流边界, Γ_+ 为时刻 t 时的出 (外) 流边界.

假定 $\beta_1,\beta_2,\sigma\in W^{1,\infty}(\Omega\times[0,T])\cap C(\bar\Omega\times[0,T]), f\in L^\infty(L^2(\Omega)), g\in L^\infty(L^2(\Gamma_-(t)))$, $u_0\in L^2(\Omega)$.

如同文 [3], 为在数值处理上避免处理由使用随 t 而改变的变网格有限元空间及由此导致的分析上的困难, 我们假定在空间边界 Γ 上, $\beta(x,t)$ 的指向不随 t 的变化而变化 (特别地, 当 $\beta(x,t)$ 与 t 无关时, 自然满足), 从而 $\Gamma_-(t)$ 为一固定的曲线段, 记为 Γ_-. 对时间变量 t 作差分离散, 设 $\Delta t=\tau$ 为时间步长, $t^n=n\tau,\ n=0,1,\cdots,N=[T/\tau]$. 对空间区域 $\bar\Omega$ 进行拟均匀三角剖分, $\mathcal{T}_h=\{k:k\in\bar\Omega\}$, k 为 $\mathcal{T}_h$ 的单元, k 的边界为 ∂k, 网格参数为 h $(0<h<h_0<1)$.

用 $P_r(k)$ 表示 k 上次数 $\leq r$ 的多项式集合. 定义

$$V_h=\{v\in L^2(\Omega),v\mid_k\in P_r(k),\forall k\in\mathcal{T}_h\},\ r\geq 0.$$

记 $\beta^n(x)=\beta(x,t^n)$, 对 $\forall k\in\mathcal{T}_h$, 设 ∂k 由直线 $l_j(j=1,2,3)$ 组成, 用 $\gamma(x)$ 表示 ∂k 的单位外法向. 在 $t=t^n$ 时刻, 对 $\forall k\in\mathcal{T}_h$, 定义

$$\bar\beta_j^n=\frac{1}{|\,l_j\,|}\int_{l_j}\beta^n(x)ds,\ j=1,2,3\quad (|\,l_j\,|\ \text{为}\ l_j\ \text{的长度}),$$
$$\bar\beta^n(x)=\bar\beta_j^n,\quad \text{对}\ \forall x\in l_j,\ j=1,2,3,$$
$$\partial k_-^n=\{x\in\partial k,\bar\beta^n(x)\cdot\gamma(x)<0\},\quad \partial k_+^n=\partial k\backslash\partial k_-^n.$$

相应地, ∂k_-^n 和 ∂k_+^n 分别称为单元 k 的入流和出流边界.

注意到当 $v\in V_h, v|_{\partial k}$ 可能间断, 在 $t=t^n$ 时刻, 对 $v,w\in V_h$ 和 $x\in\partial k$, 定义

$$v_+^n(x)=\lim_{s\to0^+}v(x+s\bar\beta^n(x)),v_-^n(x)=\lim_{s\to0^-}v(x+s\bar\beta^n(x)),[v^n(x)]=v_+^n(x)-v_-^n(x),$$

$$\langle v,w\rangle_{\partial k_-^n}=\int_{\partial k_-^n}vw|\bar\beta^n\cdot\gamma|ds,\quad |v|^2_{\partial k_-^n}=\langle v,v\rangle_{\partial k_-^n},$$

$$\langle v,w\rangle_{\Gamma_-^n}=\sum_{\partial k_-^n\subset\Gamma_-}\langle v,w\rangle_{\partial k_-^n},\quad |v|^2_{\Gamma_-^n}=\langle v,v\rangle_{\Gamma_-^n}.$$

类似地, 亦可定义 $\langle v,w\rangle_{\partial k_+^n},|v|_{\partial k_+^n},\langle v,w\rangle_{\Gamma_+^n},|v|_{\Gamma_+^n}$. 记

$$(v,w)_k=\int_k vwdx,\ ||v||_k=(v,v)_k,\ (v,w)=\int_\Omega vwdx,\ ||v||=(v,v).$$

令 $v^n(x)=v(x,t^n),\ \Delta_tv^n=(v^n-v^{n-1})/\tau,\ v_\beta=\beta(x)\cdot\nabla v$, 那么在 $t=t^n$ 时刻, 问题 (2.1)-(2.3) 可以写成

$$\Delta_tu^n+u^n_{\beta^n}+\sigma^nu^n=f^n+E_1^n,\quad n=1,2,\cdots,N,\tag{2.4}$$

$$u_-^n|_{\Gamma_-}=g^n,\tag{2.5}$$

$$u^0=u_0,\ x\in\Omega,\tag{2.6}$$

这里 $E_1^n=\Delta_tu^n-(\frac{\partial u}{\partial t})^n$ 为截断误差.

从 (2.4) 中忽略掉 E_1^n, 参考 DSD 格式 [1] 的定义, 问题 (2.1)-(2.3) 的 Euler 型 DFDSD 格式定义为求 $U^n\in V_h,\ n=0,1,2,\cdots,N$, 使得 $\forall k\in\mathcal{T}_h$ 有

$$(\Delta_tU^n+U^n_{\beta^n}+\sigma^nU^n,v+\delta v_{\beta^n})_k+\langle\tilde\sigma^n[U^n],v_+\rangle_{\partial k_-}=(f^n,v+\delta v_{\beta^n})_k,\ \forall v\in P_r(k),\tag{2.7}$$

$$U_-^n|_{\partial k_-}=g^n,\quad \text{当}\ \partial k_-\in\Gamma_-,\tag{2.8}$$

$$(U^0-u_0,v)_k=0,\quad \forall v\in P_r(k),\tag{2.9}$$

这里 $\tilde\sigma^n=1+\delta\sigma^n.\tau=\bar Ch,\bar C>0$ 任意取定, $\delta=\bar{\bar C}h,0<\bar{\bar C}<\bar C/4$.

把 (2.7)-(2.9) 对所有单元 $k\in\mathcal{T}_h$ 相加, 得到 (2.7)-(2.9) 的整体形式

$$(\Delta_tU^n+U^n_{\beta^n}+\sigma^nU^n,v+\delta v_{\beta^n})_\Omega+\sum_{k\in\mathcal{T}_h^n}\langle\tilde\sigma^n[U^n],v_+\rangle_{\partial k_-}=(f^n,v+\delta v_{\beta^n})_\Omega,\forall v\in V_h,\tag{2.10}$$

$$U_-^n|_{\Gamma_-} = g^n, \tag{2.11}$$

$$(U^0 - u_0, v) = 0, \quad \forall v \in V_h. \tag{2.12}$$

§3. DFDSD 格式的稳定性分析

为了表述方便, 简记 $\sum \triangleq \sum\limits_{k\in\mathcal{T}_h}, \bigcup \triangleq \bigcup\limits_{k\in\mathcal{T}_h}$. 在 $t=t^n$ 上, 令 $Q_-^n = \cup\partial k_-^n, Q_+^n = \cup\partial k_+^n$, 并记　$\langle v,w\rangle_{Q_-^n} = \sum\langle v,w\rangle_{\partial k_-^n}$,　$\langle v,w\rangle_{Q_+^n} = \sum\langle v,w\rangle_{\partial k_+^n}$,

$$B(w^n,v;w^{n-1}) \triangleq \sum(\Delta_t w^n + w^n_{\beta^n} + \sigma^n w^n, v+\delta v_\beta)_k + \langle\tilde\sigma^n[w^n], v_+\rangle_{Q_-^n}. \tag{3.1}$$

引理 3.1[3]**.** 存在与 k,h,n 无关的常数 C^* 和 $C^{**}>0$, 使得 $\forall v\in P_r(k)$,

$$\|v\|_{L^2(\partial k)} \le C^* h^{-\frac{1}{2}}\|v\|_k, \quad \forall k\in\mathcal{T}_h, \tag{3.2}$$

$$\left|\int_{\partial k} v^2(\beta^n - \bar\beta^n)\cdot\gamma ds\right| \le C^{**}\|v\|_k^2, \quad \forall k\in\mathcal{T}_h. \tag{3.3}$$

引理 3.2. 存在与 k,h,n 无关的常数 $C_0, C_1>0$, 使得 $\forall w^n, w^{n-1}\in V_h$ 和 $\forall w_-^n|_{\Gamma_-} \in L^2(\Gamma_-)$, 有

$$B(w^n,w^n;w^{n-1}) + C_0\|w^n\|^2 + \frac{\sigma_1}{2}|w_-^n|^2_{\Gamma_-} \ge \frac{1}{2}\left[\Delta_t\|w^n\|^2 + \sigma_0|[w^n]|^2_{Q_-^n} + \sigma_0|w_-^n|^2_{\Gamma_+}\right]$$
$$+C_1\delta\|w^n_{\beta^n}\|^2 + \frac{1}{4}\|\Delta_t w^n\|^2, \tag{3.4}$$

这里 $\Delta_t\|w^n\|^2 \triangleq (\|w^n\|^2 - \|w^{n-1}\|^2)/\tau$, $\sigma_0 = \inf\limits_{x,t}|\tilde\sigma(x,t)|$, $\sigma_1 = \sup\limits_{x,t}|\tilde\sigma(x,t)|$.

证明. 由 (3.1),

$$B(w^n,w^n;w^{n-1}) = \sum\left(\Delta_t w^n + w^n_{\beta^n} + \sigma^n w^n, w^n + \delta w^n_\beta\right)_k + \langle\tilde\sigma^n[w^n], w_+^n\rangle_{Q_-^n}. \tag{3.5}$$

易得

$$(\Delta_t w^n, w^n) = \frac{1}{2}\left(\tau\|\Delta_t w^n\|^2 + \Delta_t\|w^n\|^2\right), \quad \left(w^n_{\beta^n}, \delta w^n_{\beta^n}\right) = \delta\|w^n_{\beta^n}\|^2,$$

$$\left|(\Delta_t w^n, \delta w^n_{\beta^n})\right| \le \frac{\tau}{4}\|\Delta_t w^n\|^2 + \frac{\delta^2}{\tau}\delta\|w^n_{\beta^n}\|^2,$$

$$\left(w^n_{\beta^n} + \sigma^n w^n, w^n\right)_k + \left(\sigma^n w^n, \delta w^n_{\beta^n}\right)_k = ((\sigma^n - \frac{1}{2}\mathrm{div}\beta^n)w^n, w^n)_k$$
$$-\frac{\delta}{2}((\sigma^n_{\beta^n} + \sigma^n\mathrm{div}\beta^n)w^n, w^n)_k + \frac{1}{2}\int_{\partial k}\tilde\sigma^n(w^n)^2\beta^n\cdot\gamma ds,$$

$$\int_{\partial k}\tilde\sigma^n(w^n)^2\beta^n\cdot\gamma ds = \int_{\partial k}\tilde\sigma^n(w^n)^2\bar\beta^n\cdot\gamma ds + \int_{\partial k}\tilde\sigma^n(w^n)^2(\beta^n - \bar\beta^n)\cdot\gamma ds,$$

$$\int_{\partial k}\tilde\sigma^n(w^n)^2\bar\beta^n\cdot\gamma ds = \int_{\partial k_+^n}\tilde\sigma^n(w_-^n)^2\bar\beta^n\cdot\gamma ds - \int_{\partial k_-^n}\tilde\sigma^n(w_+^n)^2|\bar\beta^n\cdot\gamma|ds$$

将这些式子代入 (3.5), 并取 $C_1 \le 1 - \dfrac{\bar{\bar{C}}}{\bar{C}}$, 有

$$B(w^n, w^n; w^{n-1}) \ge \frac{1}{2}\Delta_t\|w^n\|^2 + C_1\delta\|w^n_{\beta^n}\|^2 - \|\sigma^n - \frac{1}{2}\mathrm{div}\beta^n\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))}\|w^n\|^2$$

$$-\frac{\delta}{2}\|\sigma^n_{\beta^n} - \sigma^n\mathrm{div}\beta^n\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))}\|w^n\|^2 + \frac{1}{4}\tau\|\Delta_t w^n\|^2 + \frac{1}{2}\langle\tilde{\sigma}^n w^n_-, w^n_-\rangle_{Q^n_+}$$

$$-\frac{1}{2}\langle\tilde{\sigma}^n w^n_+, w^n_+\rangle_{Q^n_-} + \langle\tilde{\sigma}^n[w^n], w^n_+\rangle_{Q^n_-} - \frac{1}{2}\sum\left|\int_{\partial k}\tilde{\sigma}^n(w^n)^2(\beta^n - \bar{\beta}^n)\cdot\gamma ds\right|.$$

注意到 $\langle\tilde{\sigma}^n w^n_-, w^n_-\rangle_{Q^n_+} = \langle\tilde{\sigma}^n w^n_-, w^n_-\rangle_{Q^n_-} - \langle\tilde{\sigma}^n w^n_-, w^n_-\rangle_{\Gamma_-} + \langle\tilde{\sigma}^n w^n_-, w^n_-\rangle_{\Gamma_+}$ 对 $\int_{\partial k}\tilde{\sigma}^n (w^n)^2 (\beta^n - \bar{\beta}^n)\cdot\gamma ds$ 应用 (3.3) 并取 $C_0 = \|\sigma^n - \frac{1}{2}\mathrm{div}\beta^n\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))} + \frac{\delta}{2}\|\sigma^n_{\beta^n} - \sigma\beta^n\mathrm{div}\beta^n\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))} + \frac{1}{2}C^{**}$, 则估计式 (3.4) 得证.

定理 3.1. 对于足够小的 $\Delta t(=\tau)$, Euler DFDSD 格式 (2.10)-(2.12) 有唯一解 $\{U^n\}_{n=1}^N$, 并有下面的稳定性估计

$$\max_{1\le n\le N}\|U^n\|^2 + \sum_{n=1}^N\left(|[U^n]|^2_{Q^n_-} + |U^n_-|^2_{\Gamma_+}\right)\tau + \sum_{n=1}^N\left(\tau\|\Delta_t U^n\|^2 + \delta\|U^n_{\beta^n}\|^2\right)\tau$$

$$\le C(\|f\|^2_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \|g\|^2_{L^\infty(L^2(\Gamma_-))} + \|u_0\|^2), \tag{3.6}$$

这里 C 与 τ, h 无关.

证明. 由 (2.10)-(2.12), 有

$$B(U^n, U^n; U^{n-1}) = (f^n, U^n + \delta U^n_{\beta^n}), \quad n = 1, 2, \cdots, N. \tag{3.7}$$

由 ε 不等式得

$$(f^n, U^n + \delta U^n_{\beta^n}) \le (\frac{1}{4} + \frac{\tau}{4})\|f^n\|^2 + \|U^n\|^2 + \frac{\delta^2}{\tau}\|U^n_{\beta^n}\|^2. \tag{3.8}$$

再由引理 3.2 和 (2.11), 有

$$\Delta_t\|U^n\|^2 + 2\sigma_0|[U^n]|^2_{Q^n_-} + 2\sigma_0|U^n_-|^2_{\Gamma_+} + (1 - \frac{2\delta}{\tau})\delta\|U^n_{\beta^n}\|^2 + \frac{\tau}{2}\|\Delta_t U^n\|^2$$

$$\le 2(1 + C_0)\|U^n\|^2 + 2\|f^n\|^2 + 2\sigma_1|g^n|^2, \quad n = 1, 2, \cdots, N. \tag{3.9}$$

上式两边同乘以 τ, 并从 1 加到 n, 再利用 Gronwall 不等式, 并注意到 $\|U^0\| \le \|u_0\|$, 可以得到: 若 τ 足够小, 以至 $1 - 2(1 + C_0)\tau \ge \mu_0 > 0$, 并且

$$\sum_{n=1}^N\|f^n\|^2\tau \le T\|f\|^2_{L^\infty(L^2(\Omega))}, \quad \sum_{n=1}^N|g^n|^2\tau \le T\|f\|^2_{L^\infty(L^2(\Gamma_-))}, \tag{3.10}$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\|U^n\|^2+\sum_{n=1}^{N}\left(|[U^n]|^2_{Q^n_-}+|U^n_-|^2_{\Gamma_+}\right)\tau+\sum_{n=1}^{N}\left(\tau\|\Delta_t U^n\|^2+\delta\|U^n_{\beta^n}\|^2\right)\tau \\
&\le C(\|f\|^2_{L^\infty(L^2(\Omega))}+\|g\|^2_{L^\infty(L^2(\Gamma_-))}+\|u_0\|^2),\ n=1,2,\cdots,N. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

从而 (3.6) 式得证.

§4. DFDSD 格式的误差估计

令 u 是 (2.1)-(2.3) 的解, 并假定

$$
u\in L^\infty(H^{r+1}(\Omega))\cap C(\bar{\Omega}\times[0,T]),\ \frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(H^{r+1}(\Omega)),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in L^2(L^2(\Omega)). \qquad (4.1)
$$

那么式子

$$
B(u^n,v;u^{n-1})=(f^n+E^n_1,v+\delta v^n_{\beta^n}),\ \forall v\in V_h,\ n=1,2,\cdots,N \qquad (4.2)
$$

中的截断误差 E^n_1 有下面的估计

$$
\|E^n_1\|^2\le K_1\tau\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\|^2_{L^2(t^{n-1},t^n;L^2(\Omega))}, \qquad (4.3)
$$

其中 K_1 与 $h\tau$ 无关. 注意到 $[u^n]=0$, 由 (4.2) 和 (2.10)-(2.12) 有

$$
B(u^n-U^n,v;u^{n-1}-U^{n-1})=(E^n_1,v+\delta v_{\beta^n},\ \forall v\in V_h,\ n=1,2,\cdots,N, \qquad (4.4)
$$

$$
(u^n_--U^n_-)|_{\Gamma_-}=0, \qquad (4.5)
$$

$$
(u^0-U^0,v)=0,\ \forall v\in V_h. \qquad (4.6)
$$

定义 $\tilde{u}(t):[0,T]\to V_h$, 使得 $\forall k\in\mathcal{T}_h$,

$$
(\tilde{u}(t)-u(t),v)_{=}0,\ \forall v\in P_r(k),\ t\in[0,T]. \qquad (4.7)
$$

令 $\xi^n=U^n-u^n,\eta^n=u^n-\tilde{u}^n,e^n=u^n-U^n=\eta^n-\xi^n$, 并取 $\tilde{u}^n_-|_{\Gamma_-}=g^n$, 则

$$
B(\xi^n,v;\xi^{n-1})=B(\eta^n,v;\eta^{n-1})-(E^n_1,\xi^n+\delta\xi^n_{\beta^n}),\ \forall v\in V_h,\ n=1,2,\cdots,N, \qquad (4.8)
$$

$$
\xi^n_-|_{\Gamma_-}=0,\ \eta^n_-|_{\Gamma_-}=0, \qquad (4.9)
$$

$$
\xi^0=0. \qquad (4.10)
$$

应用引理 3.2 和边界条件 (4.9), 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\Delta_t\|\xi^n\|^2+\sigma_0|[\xi^n]|^2_{Q^n_-}+\sigma_0|\xi^n_-|^2_{\Gamma_+}\right]+C_1\delta\|\xi^n_{\beta^n}\|^2+\frac{\tau}{4}\|\Delta_t\xi^n\|^2 \\
&\le B(\xi^n,\xi^n;\eta^{n-1})+C_0\|\xi^n\|^2 \\
&=B(\eta^n,\xi^n;\eta^{n-1})-(E^n_1,\xi^n+\delta\xi^n_{\beta^n})+C_0\|\xi^n\|^2 \\
&\le B(\eta^n,\xi^n;\eta^{n-1})+\bar{C}_0(\varepsilon)\|\xi^n\|^2+C_2\|E^n_1\|^2+\varepsilon\delta\|\xi^n_{\beta^n}\|^2. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

引理 4.1. 存在常数 $C>0$, 使得

$$\begin{aligned}&\Delta_t\|\xi^n\|^2+|[\xi^n]|^2_{Q^n_-}+|\xi^n_-|^2_{\Gamma_+}+\delta\|\xi^n_{\beta^n}\|^2+\tau\|\Delta_t\xi^n\|^2\\&\le C\{\|\xi^n\|^2+\|\eta^n\|^2+h\|\eta^n\|^2_1+|\eta^n|^2_{Q^n_-}+|\eta^n_-|^2_{\Gamma_+}+\|\Delta_t\eta^n\|^2+\|E^n_1\|^2\}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

证明. 事实上

$$B(\eta^n,\xi^n;\eta^{n-1})=\sum(\Delta_t\eta^n+\eta^n_{\beta^n}+\sigma^n\eta^n,\xi^n+\delta\xi^n_{\beta^n})_k+\langle\tilde\sigma[\eta^n],\xi^n_+\rangle_{Q^n_-}.\tag{4.13}$$

由于 $\xi^n|_k\in P_r(k)$, 并由 $\tilde u$ 的定义, 有

$$(\Delta_t\eta^n,\xi^n)_k=\frac{1}{\tau}(\eta^n-\eta^{n-1},\xi^n)_k=0,\ \forall k\in\mathcal{T}_h.\tag{4.14}$$

分部积分, 就有

$$\begin{aligned}&(\eta^n_{\beta^n}+\sigma^n\eta^n,\xi^n)_k=-(\eta^n,\xi^n_{\beta^n})_k+((\sigma^n-\mathrm{div}\beta^n)\eta^n,\xi^n)_k+\int_{\partial k}\eta^n\xi^n\beta^n\cdot\gamma ds\\&\le-(\eta^n,\xi^n_{\beta^n})_k+\int_{\partial k}\eta^n\xi^n\beta^n\cdot\gamma ds+\|\sigma^n-\mathrm{div}\beta^n\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))}\|\eta\|_k\cdot\|\xi\|_k.\end{aligned}\tag{4.15}$$

令 O_k 为单元 $k\in\mathcal{T}_h$ 的几何中心, 则有 $\beta^n(O_k)\cdot\nabla\xi^n|_k\in P_r(k)$ 和 $|\beta^n(x)-\beta^n(O_k)|\le Ch_k$, 再由 $P_r(k)$ 的逆估计, 可以得到

$$(\eta^n,\xi^n_{\beta^n})_k=(\eta^n,(\beta^n(x)-\beta^n(O_k))\cdot\nabla\xi^n)_k\le C\|\eta^n\|_k\cdot\|\xi^n\|_k.\tag{4.16}$$

另外, 容易证明

$$\begin{aligned}&(\sigma^n\eta^n,\delta\xi^n_{\beta^n})_k=\int_{\partial k}\delta\sigma^n\eta^n\xi^n\beta^n\cdot\gamma ds-\delta((\sigma^n_{\beta^n}+\sigma^n\mathrm{div}\beta^n)\eta^n,\xi^n)\\&\le\int_{\partial k}\delta\sigma^n\eta^n\xi^n\beta^n\cdot\gamma ds+\delta\|\sigma^n_{\beta^n}+\sigma^n\mathrm{div}\beta^n\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))}\|\eta\|_k\|\xi\|_k,\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$(\eta^n_{\beta^n},\delta\xi^n_{\beta^n})_k\le C\delta\|\eta^n\|_{1,k}\cdot\|\xi^n_{\beta^n}\|_k\le C\delta\|\eta^n\|^2_{1,k}+\varepsilon\delta\|\xi^n_{\beta^n}\|^2_k.\tag{4.18}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_{\partial k}\eta^n\xi^n\beta^n\cdot\gamma ds+\int_{\partial k}\delta\sigma^n\eta^n\xi^n\beta^n\cdot\gamma ds=\int_{\partial k}\tilde\sigma^n\eta^n\xi^n\beta^n\cdot\gamma ds\\&=\langle\tilde\sigma^n\eta^n_-,\xi^n_-\rangle_{\partial k^n_+}-\langle\tilde\sigma^n\eta^n_+,\xi^n_+\rangle_{\partial k^n_-}+\int_{\partial k}\tilde\sigma^n\eta^n\xi^n(\beta^n-\bar\beta^n)\cdot\gamma ds,\end{aligned}\tag{4.19}$$

应用引理 3.2 和迹不等式, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial k}\tilde\sigma^n\eta^n\xi^n(\beta^n-\bar\beta^n)\cdot\gamma ds\le\sigma_1(\int_{\partial k}(\eta^n)^2|\beta^n-\bar\beta^n|ds)^{\frac12}\cdot(\int_{\partial k}(\xi^n)^2|\beta^n-\bar\beta^n|ds)^{\frac12}\\&\le Ch^{\frac12}\|\eta^n\|_{L^2(\partial k)}\cdot\|\xi^n\|_k\le Ch^{\frac12}\|\eta^n\|_{H^1(k)}\cdot\|\xi^n\|_k\le\|\xi^n\|^2_k+C^2h\|\eta^n\|^2_{1,k}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

结合 (4.13)-(4.20), 并注意到 (4.9), 有

$$B(\eta^n,\xi^n;\eta^{n-1})\le C_3(\|\eta^n\|^2+\|\xi^n\|^2)+\varepsilon\delta\|\xi^n_{\beta^n}\|^2+C_2h\|\eta^n\|_1^2$$

$$+\langle\tilde{\sigma}^n\eta^n_-,\xi^n_-\rangle_{Q^n_+}-\langle\tilde{\sigma}^n\eta^n_+,\xi^n_+\rangle_{Q^n_-}+\langle\tilde{\sigma}^n[\eta^n],\xi^n_+\rangle_{Q^n_-}$$

$$\le C_4(\|\eta^n\|^2+\|\xi^n\|^2+h\|\eta^n\|_1^2)+\varepsilon\delta\|\xi^n_{\beta^n}\|^2+\frac{\sigma_0}{4}(|[\xi^n]|^2_{Q^n_-}+\|\xi^n_-\|^2_{\Gamma_+})+\frac{\sigma_1}{\sigma_0}(|\eta^n_-|^2_{Q^n_-}+|\eta^n_-|^2_{\Gamma_+}).$$

将上式代入 (4.11), 并取 ε 足够小, 以至 $C_1-2\varepsilon>0$, 则估计式 (4.12) 得证.

定理 4.1. 设 $u,\{U^n\}$ 分别是问题 (2.1)-(2.3) 和 DFDSD 格式 (2.10)-(2.12) 的解, 则在假设条件 (4.1) 成立的条件下, 存在与 τ,h 无关的常数 $C>0$, 对于足够小的 τ, 有

$$\max_{0\le n\le N}\|e^n\|^2+\sum_{n=1}^N(|[e^n]|^2_{Q^n_-}+|e^n_-|^2_{\Gamma_+})\tau+\sum_{n=1}^N(\tau\|\Delta_te^n\|^2+\delta\|e^n_{\beta^n}\|^2)\tau\le C(h^{2r+1}+\tau^2). \tag{4.21}$$

这里规定了 $U^n_+|_{\Gamma_+}=u^n_+|_{\Gamma_+}=\tilde{u}^n_+|_{\Gamma_+}=0$.

证明. 将 (4.12) 的两边同乘以 τ, 然后对 n 相加, 应用 Gronwall 不等式, 并注意 $\xi^0=0$, 对足够小的 τ, 成立

$$\|\xi^n\|^2+\sum_{j=1}^n(|[\xi^j]|^2_{Q^j_-}+|\xi^j_-|^2_{\Gamma_+}+\delta\|\xi^j_{\beta^j}\|^2+\tau\|\Delta_t\xi^j\|^2)\tau$$

$$\le C_5\sum_{j=1}^n(\|\eta^j\|^2+h\|\eta^j\|_1^2+|\eta^j_-|^2_{Q^j_-}+|\eta^j|^2_{\Gamma_+}+\|\Delta_t\eta^j\|^2+\|E^j_1\|^2)\tau. \tag{4.22}$$

由 (4.3), 有

$$\sum_{j=1}^n\|E^j_1\|^2\le K_1\tau^2\sum_{j=1}^n\|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\|^2_{L^2(t^{j-1},t^j;L^2(\Omega))}\le K_1\tau^2\sum_{j=1}^n\|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\|^2_{L^2(L^2(\Omega))}, \tag{4.23}$$

因此, 由 (4.22)

$$\max_{0\le n\le N}\|\xi^n\|^2+\sum_{n=1}^N(|[\xi^n]|^2_{Q^n_-}+|\xi^n_-|^2_{\Gamma_+}+\delta\|\xi^n_{\beta^n}\|^2+\tau\|\Delta_t\xi^n\|^2)\tau$$

$$\le C_6\sum_{n=1}^N(\|\eta^n\|^2+h\|\eta^n\|_1^2+|\eta^n_-|^2_{Q^j_-}+|\eta^n|^2_{\Gamma_+}+\|\Delta_t\eta^n\|^2+\tau^2)\tau. \tag{4.24}$$

又据文 [3], 存在与 τ,h 无关的 K_i $(i=2,3,\cdots,6)$, 有

$$\|\eta^n\|\le K_2h^{r+1},\ \|\eta^n\|_{1,k}\le K_3h^r,\ |[\eta^n]|_{Q^n_-}\le K_4h^{r+\frac{1}{2}}, \tag{4.25}$$

$$\|\eta^n_-\|_{\Gamma^n_+}\le K_5h^{r+\frac{1}{2}},\ \sum_{n=1}^N\|\Delta_t\eta^n\|^2\tau\le K_6h^{2r+2}, \tag{4.26}$$

于是由 (4.22), 并应用三角不等式, 收敛阶估计式 (4.21) 就可以得到.

注 1. 当 $\delta=0$ 时, 格式 (2.10)-(2.12) 退化为 [3] 中的 Euler 型 FDDG 格式, 从分析过程可以看出, 这里的论证方法仍然有效.

§5. 数值算例

设已知函数 $u(x,y,t)=(1-\exp(-(1-x-y)t/\varepsilon))/(1-\exp(-1/\varepsilon))$ 为二维问题 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=f$, $(x,y,t)\in\Omega\times(0,2]$, $u(x,y,t)|_{\Gamma_-}=g(x,y,t)$, $t\in[0,2]$, $u(x,y,0)=u_0(x,y)$, $(x,y)\in\bar{\Omega}$ 的解析解. 这里 Ω 为三条直线 $x=0, y=1$ 以及 $y=x$ 围成的三角形区域. 按照前面的定义, 显然入流边界为 $x=0$ $(0\le y\le 1)$. 问题中 f, u_0, g 由已给的 $u(x,y,t)$ 算出. 对此区域, 采用均匀的等腰直角三角形剖分 (单元的各边平行于区域的边界), 应用 Euler 型 DFDSD 格式, 得到 $t=1.05$ 时一些点的计算结果如表 1(取 $\varepsilon=0.001$).

表 1

点坐标	$h=\tau=0.05,\delta=0.01$			$h=\tau=0.005,\delta=0.01$		
	真解 u	有限元解 U	误差 $u-U$	真解 u	有限元解 U	误差 $u-U$
(0.050,0.100)	1.0000	1.0335	-0.0335	1.0000	0.9956	0.0044
(0.050,0.150)	1.0000	0.9673	0.0327	1.0000	0.9950	0.0050
(0.050,0.200)	1.0000	0.9558	0.0402	1.0000	0.9950	0.0050
(0.050,0.250)	1.0000	0.9572	0.0428	1.0000	0.9950	0.0050
(0.050,0.300)	1.0000	0.9559	0.0441	1.0000	0.9950	0.0050

数值计算表明, Euler 型 DFDSD 格式保持了 DG 法显式计算的优点, 且较 DSD 方法程序更易实现. 当连续问题之解为振荡函数或具有局部大梯度变化的函数时 (如文 [1] 中的例子), 标准 Galerkin 有限元法将会呈现严重发散型振荡, DG 方法也严重失真, 而 DFDSD 方法则与 DSD 方法一样, 具有良好的精度与分辨率.

参 考 文 献

[1] 孙澈, 汤怀民, 吴克俭, 一阶双曲问题的间断流线扩散法, 计算数学, 20:1 (1998), 35-44.

[2] 孙澈, 张阳, 魏强, 对流扩散问题的流线扩散有限元分析, 计算数学, 18:3 (1996), 253-260.

[3] Sun Che and Qin Shujie,The full discrete discontinuous finite element analysis for first-order linear hyperbolic equation, J. Comp. Math., 17:1 (1999), 97-112.

[4] C. Johnson and J. Pitkaranta, An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, Math. of Comp., 46(1986), 1-26.

[5] T.J.Huges, Streamline upwind formulation for advection-diffusion,Navier-Stokes and first-order hyperbolic equations, Forth Internat, Conf. on F.E.M. in fluids, Tokyo (1982).