

一阶拟线性方程物理解的计算*

周毓麟 李德元 龚静芳 (北京第九研究所)

THE CALCULATION OF PHYSICAL SOLUTIONS OF QUASILINEAR EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

Zhou Yu-lin Li De-yuan Gong Jing-fang

Abstract

In this paper a simple graphic method is given for physical solution of the initial valued problem

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^+, & \text{for } x > 0, \\ u^-, & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

of the quasilinear equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0.$$

Stability of some difference schemes with high order of accuracy is considered. Several numerical examples are given. Using difference schemes with high order of accuracy, weak solutions which have "random" property in some sense are obtained instead of physical solutions.

1

从六十年代开始,不少作者研究了双曲型方程组的高阶截断误差的计算方法,试图用来改善二维流体力学问题的计算结果。格式精度的高阶与流场波区的不光滑之间的差别使得人们认为,在光滑区采用高阶格式,而在间断区采用低阶格式的方法是可行的。在[1]中,研究单调差分格式的同时,用 Lax-Wendroff 格式(下面简称 L-W 格式)计算了一阶拟线性方程初始间断分解的问题,得到了问题的无数个弱解中的一个,而没有得到问题的唯一的物理解。这是个很有意义的现象。但是,为什么得到的是这个弱解,而不是其他弱解呢?怎样才能得到物理解呢?

另一方面,在流体力学问题的计算中,引入人为粘性项,可以光滑化冲击波的间断,而引进热传导项却不一定能光滑化冲击波的间断,避免不掉计算中的振动现象^[2]。似乎简单地提高格式截断误差的阶数,或者任意引入人为粘性项或格式粘性来光滑解的间断性,并不见得总能如愿地算出所需要的物理解来。

本文对于一阶拟线性方程的初始间断分解问题的解析解给出了一个简单的图解方

* 1979年11月9日收到。

法. 从 Hirt 判别差分格式稳定性的思想来看, 各种不同高阶精度的差分格式是有雷同之处的, 所以, 这里只用 L-W 格式以及类似的高阶格式进行计算. 对于这些差分格式, 我们分析了它们的稳定性, 并讨论了计算结果.

2

给定一阶拟线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

其中 $\varphi(u)$ 是 u 的一个单值的连续可微函数. 当方程 (2.1) 的初值问题

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.2)$$

的初值函数形如

$$u_0(x) = \begin{cases} u^+, & \text{当 } x > 0, \\ u^-, & \text{当 } x < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

时, 这种初值问题可称为初始间断分解问题.

在块块光滑的函数类里, 初值问题 (2.1), (2.2) 的弱解 $u(x, t)$, 对于在 $t \geq 0$ 上的任意有界支集函数 $f(x, t)$, 适合积分恒等式

$$\iint [f_t u + f_x \varphi(u)] dx dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0) u(x, 0) dx = 0. \quad (2.4)$$

弱解也是在光滑区域中按古典意义满足方程 (2.1)、在不光滑线上或在间断线上满足间断关系式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi(u^+) - \varphi(u^-)}{u^+ - u^-} \quad (2.5)$$

的函数 $u(x, t)$, 其中 $\frac{dx}{dt}$ 为间断曲线 $x = x(t)$ 的斜率, u^\pm 分别表示在 (x, t) 点上 $u(x, t)$ 的左右极限值 $u(x \pm 0, t)$. 问题 (2.1), (2.2) 的弱解是不唯一的, 可以有无穷多个. 问题 (2.1), (2.2) 的物理解是适合所谓熵条件^[3]

$$\frac{\varphi(u^+) - \varphi(v)}{u^+ - v} \leq \frac{\varphi(u^+) - \varphi(u^-)}{u^+ - u^-} \quad (2.6)$$

的弱解, 其中 v 为 u^+ 和 u^- 之间的任意值. 当 $u^- > u^+$ 时, (2.6) 可以写为

$$\varphi(v) \leq \frac{u^+ - v}{u^+ - u^-} \varphi(u^-) + \frac{v - u^-}{u^+ - u^-} \varphi(u^+). \quad (2.7)$$

由此可见, 在区间 $[u^+, u^-]$ 上曲线 $z = \varphi(v)$ 落在联接 $(u^+, \varphi(u^+))$ 与 $(u^-, \varphi(u^-))$ 两点的弦的下面. 当 $u^- < u^+$ 时, (2.6) 可以写成

$$\varphi(v) \geq \frac{u^+ - v}{u^+ - u^-} \varphi(u^-) + \frac{v - u^-}{u^+ - u^-} \varphi(u^+), \quad (2.8)$$

于是在区间 $[u^-, u^+]$ 上, 曲线 $z = \varphi(v)$ 落在联接 $(u^-, \varphi(u^-))$ 与 $(u^+, \varphi(u^+))$ 两点的弦的上面.

问题 (2.1), (2.2) 的物理解是唯一存在的, 而且当初始函数单调时, 问题 (2.1), (2.2) 的物理解对任意 $t \geq 0$ 是变量 x 的单调函数. 因此, 问题 (2.1), (2.3) 的物理解在 $t \geq 0$ 时对 x 是单调的.

可以看出, 问题 (2.1), (2.3) 的解 $u(x, t)$ 是自型的, 自型变量为 $\xi = \frac{x}{t}$, 未知函数则

为 $u(x, t) = U(\xi)$. 于是, $U(\xi)$ 适合方程

$$[-\xi + \varphi'(U)]U' = 0; \quad (2.9)$$

问题的边界条件应为

$$U(\xi) = \begin{cases} u^+, & \text{当 } \xi \rightarrow +\infty \text{ 时,} \\ u^-, & \text{当 } \xi \rightarrow -\infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (2.10)$$

所以, 问题 (2.9), (2.10) 的物理解 $U(\xi)$, 应当是由曲线

$$U = \text{const. 与 } \varphi'(U) = \xi$$

分段组成的对 ξ 单调的函数, 并且在间断点上适合间断关系式 (2.5) 与熵条件 (2.6).

下面叙述一阶拟线性方程初始间断分解问题 (2.1), (2.3) 的一种简单的图解方法.

函数 $\varphi(u)$ 是定义在有界或无界区间 $-\infty \leq a \leq u \leq b \leq +\infty (a < b)$ 上连续可微的单值函数. 因此, 在 (u, z) 平面上的曲线 $z = \varphi(u)$ 把区域 $D\{|z| < \infty, a \leq u \leq b\}$ 分成上下两个区域 $D^+ = \{z \geq \varphi(u), a \leq u \leq b\}$ 与 $D^- = \{z \leq \varphi(u), a \leq u \leq b\}$.

现在考虑 $u^- > u^+ (u^+, u^- \in [a, b])$ 的情况. 在区域 D^+ 上作一条联接 $(u^+, \varphi(u^+))$ 与 $(u^-, \varphi(u^-))$ 两点的最短曲线, 即在 D^+ 上联接这两点的一条绷紧的曲线 $z = \varphi^*(u)$, 它是一条在 $[u^+, u^-]$ 上连续可微的向上凸的曲线. 这条曲线可以分为若干段:

$$u^+ = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_{k-1} < u_k = u^-, \quad (2.11)$$

使得每一段曲线 $z = \varphi^*(u)$, 或者就是曲线 $z = \varphi(u)$ 上的一段弧线, 或者是联接曲线 $z = \varphi(u)$ 上两点的一段直线. 这种直线段的两个端点可以都是切点, 可以只有一个是切点而另一个不是切点, 也可以都不是切点. 显然, 这条绷紧曲线 $z = \varphi^*(u)$ 是依赖于 u^+ 与 u^- 的. 因为 $z = \varphi^*(u)$ 是凸曲线, 所以 $z = \varphi^*(u)$ 是在 $[u^+, u^-]$ 上的降曲线, 它的对应于 $z = \varphi^*(u)$ 的直线段的部分是常数段.

设 (ξ, U) 平面上的 ξ 轴与 U 轴分别重合于 (u, z) 平面上的 u 轴与 z 轴. 曲线 $z = \varphi'(u)$ 对直线 $z = u$ 的反映曲线 $u = \varphi'(z)$ 就是在 (ξ, U) 平面上的曲线 $\xi = \varphi'(U)$. 对应于 $z = \varphi^*(u)$ 的反映曲线, 在 (ξ, U) 平面上有曲线 $\xi = \varphi^{**}(U)$. 在曲线 $\xi = \varphi^{**}(U)$ 的端点 (ξ^+, u^+) 接上一段直线 $U = u^+, \xi^+ \leq \xi < \infty$, 在端点 (ξ^-, u^-) 接一段直线 $U = u^-, -\infty < \xi \leq \xi^-$. 这样得到的 $U(\xi) (-\infty < \xi < \infty)$ 就给出问题 (2.1), (2.3) 的物理解.

设在 $[u_j, u_{j+1}] (j = 0, 1, \cdots, k-1)$ 上的曲线段 $z = \varphi^*(u)$ 是曲线 $z = \varphi(u)$ 的一段弧线. 因为这段曲线是凸的, 故 $\varphi''(u) \equiv \varphi^{*''}(u) \leq 0$, $\varphi'(u)$ 在 $[u_j, u_{j+1}]$ 上是单调下降的. 对应于这段曲线的解曲线 $U(\xi)$, 就是在 $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ 上的曲线 $\xi = \varphi^{**}(U) = \varphi'(U)$, 其中 $\xi_j = \varphi'(u_j)$, $\xi_{j+1} = \varphi'(u_{j+1})$.

设在 $[u_j, u_{j+1}] (j = 0, 1, \cdots, k-1)$ 上的曲线段 $z = \varphi^*(u)$ 是一段直线. 对应于直线段的是在解曲线 $U(\xi)$ 上的一个间断, 间断上的跳跃是 $[u_j, u_{j+1}]$, 间断的位置是

$$\xi = \varphi^{**}(U) = \frac{\varphi(u_{j+1}) - \varphi(u_j)}{u_{j+1} - u_j}, \quad U \in [u_j, u_{j+1}]. \quad (2.12)$$

当两个端点 $(u_j, \varphi(u_j))$ 与 $(u_{j+1}, \varphi(u_{j+1}))$ 都是切点时,

$$\xi = \xi_j = \varphi'(u_j) = \varphi'(u_{j+1}) = \xi_{j+1}.$$

对于 $[u_0, u_1]$ 的情况, 可以只有一个切点 $(u_1, \varphi(u_1))$, 这时

$$\xi = \xi_1 = \varphi'(u_1).$$

对于 $[u_{k-1}, u_k]$ 的情况, 可以只有一个切点 $(u_{k-1}, \varphi(u_{k-1}))$, 这时

$$\xi = \xi_{k-1} = \varphi'(u_{k-1}).$$

当 $k = 1$ 时, $[u_0, u_1]$ 所对应的两个端点 $(u_0, \varphi(u_0))$ 与 $(u_1, \varphi(u_1))$ 可以都不是切点, 则间断的位置为

$$\xi = \frac{\varphi(u_1) - \varphi(u_0)}{u_1 - u_0} = \varphi^*(U), \quad U \in [u_0, u_1].$$

在 (x, t) 平面上的间断曲线的方程为 $x = \xi t, \frac{dx}{dt} = \xi$. 等式 (2.12) 说明在此间断上间断关系式是成立的. 在这间断上左极限值 u_{j+1} 大于右极限值 u_j , 从作图 $\varphi^*(u) \geq \varphi(u)$, 于是弦在曲线上面, 所以熵条件 (2.7) 或 (2.6) 是满足的.

由此可见, 这样作出的解曲线 $U(\xi)$ 就是所需要的物理解.

对于 $u^- < u^+ (u^-, u^+ \in [a, b])$ 的情况, 联接 $(u^-, \varphi(u^-))$ 与 $(u^+, \varphi(u^+))$ 两点的最

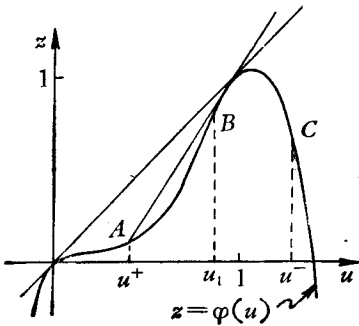


图 1

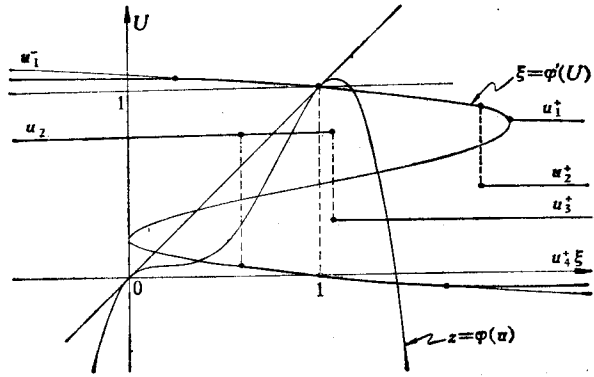


图 3

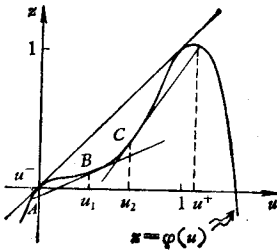


图 2

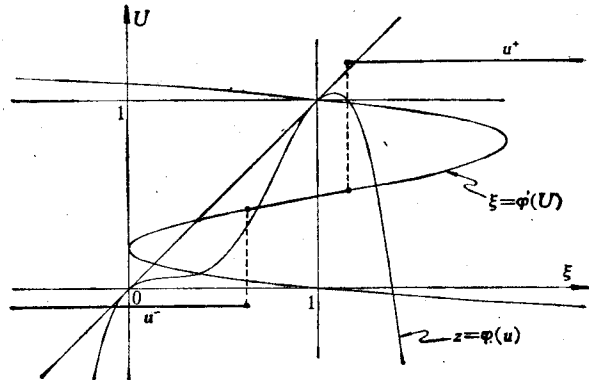


图 4

短绷紧的曲线应该是在区域 D^- 上作的, 因此, 这条绷紧曲线 $z = \varphi^*(u)$ 是个连续可微的向上凹的曲线. 可以用类似的方法作出问题 (2.1), (2.3) 的唯一物理解的解曲线来.

这样, 对于任意给定的连续可微单值函数 $\varphi(u)$, 对于任意常数 u^+ 与 u^- , 可以用以上方法作出问题 (2.1), (2.3) 的物理解的图形及其解析表达式.

对于任意给定的曲线 $z = \varphi(u)$ 的图形, 从绷紧的曲线形状 (对于各种不同的 u^+ 与

u^- 的值), 很容易看出解曲线的形状. 譬如, 对于

$$\varphi(u) = u - 3\sqrt{3}u^2(u-1)^2 \quad (2.13)$$

的情况, 当 $u^- > u^+$ 时, 解曲线的形状可能有 $LCL, LSL, LCSL, LSCL, LCSCSL$ 五种, 其中 L 表示 $U = \text{const}$ 或 $u(x, t) = \text{const}$ 的直线段, C 表示表达式为 $\varphi'(U) = \xi$ 或 $\varphi'(u) = \frac{x}{t}$ 的曲线段, S 表示适合间断关系式与熵条件的间断; 当 $u^- < u^+$ 时, 可以有 $LCL, LSL, LSCL, LCSL, LSCSL$ 五种形状. 图 1 中的 ABC 是条绷紧曲线 $z = \varphi^*(u)$, 它对应于形状为 $LCSL$ 的解曲线. 图 2 中 $ABCD$ 绷紧曲线 $z = \varphi^*(u)$ 对应于 $LSCSL$ 形状的解曲线. 在图 3 中画了五条 $u^- > u^+$ 情况的解曲线, 它们的形状对应于 (u^-, u^+) 分别为 (u_1^-, u_1^+) 属 LCL 形, (u_1^-, u_2^+) 属 $LCSL$ 形, (u_1^-, u_3^+) 属 $LCSCSL$ 形, (u_2^-, u_3^+) 属 LSL 形, (u_2^-, u_4^+) 属 $LSCL$ 形. 图 4 是对应于 $u^- < u^+$ 情况的 $LSCSL$ 形状的解曲线.

3

我们用 L-W 格式及其变形格式计算了一阶拟线性方程 (2.1) 的初始值问题.

设 $v(x, t)$ 是定义在网格结点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$) 集合上的方程 (2.1) 的差分近似解, 这里 Δx 和 Δt 是空间和时间步长. 记 $v_j^n = v(j\Delta x, n\Delta t)$, $f_j^n = \varphi(v_j^n)$ 等等, 并令 $\frac{d}{du} \varphi(u) = a(u)$. 今后凡是 $n\Delta t$ 时刻的量, 均将上标 n 略去. 计算采用的格式有以下三类:

(一) 第一类格式如下:

$$v_j^{n+1} = v_j - \frac{1}{2} \lambda (f_{j+1} - f_{j-1}) + \varepsilon_2 \lambda^2 [a_{j+\frac{1}{2}}(f_{j+1} - f_j) - a_{j-\frac{1}{2}}(f_j - f_{j-1})], \quad (3.1)$$

其中 $\lambda = \Delta t / \Delta x$, $a_{j+\frac{1}{2}} = a\left(\frac{v_j + v_{j+1}}{2}\right)$. 当 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ 时, 这就是 L-W 格式, 其精确度是二阶的. 当 $\varepsilon_2 > \frac{1}{2}$ 时, 格式 (3.1) 是一阶精确度的, 可看成与二阶方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\right) \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

相容, 其右端是使解光滑化的人为粘性项;

(二) 第二类格式如下:

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & v_j - \frac{1}{2} \lambda (f_{j+1} - f_{j-1}) + \varepsilon_2 \lambda^2 [a_{j+\frac{1}{2}}(f_{j+1} - f_j) - a_{j-\frac{1}{2}}(f_j - f_{j-1})] \\ & + \frac{1}{2} (1 + \text{sgn } a_j) \varepsilon_3 \lambda [(1 - a_{j+\frac{1}{2}}^2 \lambda^2)(f_{j+1} - f_j) - 2(1 - a_{j-\frac{1}{2}}^2 \lambda^2)(f_j - f_{j-1}) \\ & + (1 - a_{j-\frac{1}{2}}^2 \lambda^2)(f_{j-1} - f_{j-2})] + \frac{1}{2} (1 - \text{sgn } a_j) \varepsilon_3 \lambda [(1 - a_{j+\frac{1}{2}}^2 \lambda^2)(f_{j+2} - f_{j+1}) \\ & - 2(1 - a_{j+\frac{1}{2}}^2 \lambda^2)(f_{j+1} - f_j) + (1 - a_{j-\frac{1}{2}}^2 \lambda^2)(f_j - f_{j-1})] \\ & - \varepsilon_4 \lambda^4 (v_{j+2} - 4v_{j+1} + 6v_j - 4v_{j-1} + v_{j-2}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $\text{sgn } a_j$ 当 $a_j \geq 0$ 时等于 1, 当 $a_j < 0$ 时等于 -1. 当 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{6}$, $\varepsilon_4 = 0$ 时, 格式 (3.2) 为三阶精确度的, 而当 $\varepsilon_3 \neq \frac{1}{6}$ 时, 精确度只是二阶的. 这时相当于解一个加

了三阶导数作为人为粘性项的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \left(\varepsilon_3 - \frac{1}{6} \right) (\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(1 - a^2 \lambda^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right].$$

(3.2) 中最后一项逼近四阶导数 $-\varepsilon'_4 (\Delta t)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, 也可看成是人为粘性项, 加上之后不影响格式的精确度。

(三) 第三类格式如下:

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & v_j - \frac{1}{2} \lambda (f_{j+1} - f_{j-1}) + \varepsilon_2 \lambda^2 [a_{j+\frac{1}{2}} (f_{j+1} - f_j) - a_{j-\frac{1}{2}} (f_j - f_{j-1})] \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \lambda [(1 - a_{j+1}^2 \lambda^2) (f_{j+2} - f_j) - 2(1 - a_j^2 \lambda^2) (f_{j+1} - f_{j-1}) \\ & + (1 - a_{j-1}^2 \lambda^2) (f_j - f_{j-2})] \\ & - \varepsilon_4 a_j^2 \lambda^2 (1 - a_j^2 \lambda^2) (v_{j+2} - 4v_{j+1} + 6v_j - 4v_{j-1} + v_{j-2}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

当 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{6}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{24}$ 时, (3.3) 为 Zwas-Abarbanel 的三阶精确度格式^[4], 如 $\varepsilon_4 > \frac{1}{24}$, 则相当于加四阶导数作为人为粘性项。

如果设 $\mu = \lambda \max_j |a_j|$, 则格式 (3.1) 当 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ 时, 其稳定性条件为 $\mu \leq 1$ 。同样这也是 Zwas-Abarbanel 的三阶精确度格式的稳定性条件。对于其它各种情况, 将方程 (2.1) 中的 $\varphi(u)$ 换成 au (a 是常数), 然后用 Fourier 方法讨论常系数线性方程差分格式的稳定性。引入符号 $\Delta^2 v_j = v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}$ 。这时, 格式 (3.1), (3.2), (3.3) 可写成统一的形式:

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & v_j - \frac{1}{2} a \lambda (v_{j+1} - v_{j-1}) + \varepsilon_2 a^2 \lambda^2 \Delta^2 v_j \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_3 a \lambda (1 - a^2 \lambda^2) (\Delta^2 v_{j+1} - \Delta^2 v_{j-1}) \\ & - \left[\left(\frac{1}{2} \varepsilon'_3 + \varepsilon_4 |a| \lambda \right) |a| \lambda (1 - a^2 \lambda^2) + \varepsilon'_4 \right] \Delta^2 \Delta^2 v_j. \end{aligned} \quad (3.4)$$

当 $\varepsilon_3 = \varepsilon'_3 = \varepsilon'_4 = \varepsilon_4 = 0$ 时, (3.4) 就是格式 (3.1); $\varepsilon_3 = \varepsilon'_3$, $\varepsilon_4 = 0$ 是格式 (3.2); 而 $\varepsilon'_3 = \varepsilon'_4 = 0$ 是格式 (3.3)。

对 (3.4) 式两边进行 Fourier 变换, 若记 $\xi = \frac{1}{2} k \Delta x$, 则得格式 (3.4) 的增长因子为

$$\begin{aligned} G = & 1 - 4\varepsilon_2 a^2 \lambda^2 \sin^2 \xi - 16 \left[\left(\frac{1}{2} \varepsilon'_3 + \varepsilon_4 |a| \lambda \right) |a| \lambda (1 - a^2 \lambda^2) + \varepsilon'_4 \right] \sin^4 \xi \\ & - 2ia \lambda [1 + 4\varepsilon_3 (1 - a^2 \lambda^2) \sin^2 \xi] \sin \xi \cos \xi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

现在分别讨论各种格式的稳定性条件。

(一) 对于第一类格式 (3.1), 有

$$|G|^2 = 1 - 4\mu^2 \sin^2 \xi [2\varepsilon_2 - 1 - (4\varepsilon_2^2 \mu^2 - 1) \sin^2 \xi].$$

因此, 当不等式 $2\varepsilon_2 - 1 - (4\varepsilon_2^2 \mu^2 - 1) \sin^2 \xi \geq 0$ 成立时, $|G| \leq 1$, 格式 (3.1) 就稳定。由于 $\varepsilon_2 > \frac{1}{2}$, 所以, 只要不等式 $2\varepsilon_2 - 1 \geq 4\varepsilon_2^2 \mu^2 - 1$ 成立即可。从而推出 $\mu \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_2}}$, 这就

是格式(3.1)的稳定性条件.

(二) 对于第二类格式(3.2), 分两种情况讨论:

i) 当 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon'_3$, $\varepsilon'_4 = \varepsilon_4 = 0$ 时, 有

$$|G|^2 = 1 - 4\mu(1 - \mu^2)\sin^4\xi[\mu - 16\varepsilon_3^2\mu(1 - \mu^2)\sin^2\xi + 4\varepsilon_3(1 - 2\mu\cos^2\xi - 2\mu^2\sin^2\xi)].$$

根据 μ 的定义, 有 $\mu > 0$, 因此, 使 $|G| \leq 1$ 的条件是

$$1 - \mu^2 \geq 0, \quad (3.6)$$

$$\Phi(\mu, \varepsilon_3) \equiv \mu - 16\varepsilon_3^2\mu(1 - \mu^2)\sin^2\xi + 4\varepsilon_3(1 - 2\mu\cos^2\xi - 2\mu^2\sin^2\xi) \geq 0. \quad (3.7)$$

首先用一个比较粗糙的估计推出稳定性条件来. 从(3.6)可知 $\mu \leq 1$, 故只要 $8\varepsilon_3\mu(2\varepsilon_3 + 1) \leq 4\varepsilon_3$ 成立, 就可以保证不等式(3.7)成立, 从而推出格式(3.2)的稳定性条件为 $\mu \leq \frac{1}{2(2\varepsilon_3 + 1)}$. 实际上, 这个条件对 μ 的限制过于苛刻.

下面利用函数的极值原理, 即设定义在区间 $a \leq x \leq b$ 上的函数 $F(x)$ 有 $F''(x) \leq 0$, 则在区间 $[a, b]$ 上 $F(x) \geq \min\{F(a), F(b)\}$. 将 $\Phi(\mu, \varepsilon_3)$ 对 μ 求二阶导数, 得

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \Phi(\mu, \varepsilon_3) = -16\varepsilon_3 \sin^2\xi (1 - 6\varepsilon_3\mu).$$

因而当 $\varepsilon_3 = \frac{1}{6}$ 时, 在区间 $0 \leq \mu \leq 1$ 上 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2} \leq 0$. 同时 $\Phi(0, \frac{1}{6}) = \frac{2}{3}$, $\Phi(1, \frac{1}{6}) = \frac{1}{3}$. 所以, 在区间 $0 \leq \mu \leq 1$ 上 $\Phi(\mu, \frac{1}{6}) > 0$. 这样就得到当 $\varepsilon_3 = \frac{1}{6}$ 时格式(3.2)的稳定性条件是 $\mu \leq 1$. 对于 $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$ 的情况, 显然只在区间 $0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}$ 上才有 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2} \leq 0$. 这时 $\Phi(0, \frac{1}{2}) = 2$, $\Phi(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = 1 - \frac{8}{27}\sin^2\xi > 0$, 因此在区间 $0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}$ 上 $\Phi(\mu, \frac{1}{2}) > 0$. 于是当 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ 时, 取 $\mu \leq \frac{1}{3}$ 格式(3.2)就稳定.

ii) 当 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon'_3 = \frac{1}{6}$, $\varepsilon_4 = 0$ 时, 有

$$|G|^2 = 1 - 4\mu(1 - \mu^2)\sin^4\xi[\mu - 16\varepsilon_3^2\mu(1 - \mu^2)\sin^2\xi + 4\varepsilon_3(1 - 2\mu\cos^2\xi - 2\mu^2\sin^2\xi) - 32\varepsilon'_4\lambda^4\sin^4\xi\{\mu + 4\varepsilon_3(1 - \mu^2)\sin^2\xi\} - 8\varepsilon'_4\lambda^4\sin^4\xi].$$

不难看出, 当 $\varepsilon'_4 > 0$ 时, 如果不等式(3.6), (3.7)和

$$\Psi(\mu, \varepsilon_3, \varepsilon'_4) \equiv 1 - 2\mu\sin^2\xi[\mu + 4\varepsilon_3(1 - \mu^2)\sin^2\xi] - 8\varepsilon'_4\lambda^4\sin^4\xi \geq 0$$

同时成立, 则 $|G| \leq 1$. 前面已经指出, 只要 $\mu \leq 1$, 就有 $\Phi(\mu, \frac{1}{6}) \geq 0$. 如果 $\mu = 0.15$, 则有

$$\Psi\left(0.15, \frac{1}{6}, \varepsilon'_4\right) \geq 0.7595 - 0.00405 \frac{1}{a^4} \varepsilon'_4.$$

所以, 对于不太大的 ε'_4 , $\Psi\left(0.15, \frac{1}{6}, \varepsilon'_4\right)$ 是非负的. 因此, 如果 $\varepsilon'_4 \leq 185a^4$, 取 $\mu = 0.15$,

格式就是稳定的.

(三) 对于第三类格式 (3.3), 只要证明当 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{6}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{12}$ 时稳定性条件仍然是 $\mu \leq 1$. 这时有

$$|G|^2 = 1 - \frac{4}{3} \mu^2 (1 - \mu^2) \sin^4 \xi \left[1 + \frac{2}{3} (1 - \mu^2) \sin^2 \xi \right] [1 + 2(1 - \mu^2) \sin^2 \xi].$$

显然, 当 $\mu \leq 1$ 时, $|G| \leq 1$, 即格式稳定.

4

本节将对一阶拟线性方程 (2.1) 的初始间断分解问题 (2.3) 采用上一节提到的各种差分格式作数值试验, 并简单讨论其计算结果.

(一) 在 [1] 中采用 L-W 格式计算方程 (2.1) 与初始值为

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{当 } x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

的问题, 其中 $\varphi(u)$ 取作 (2.13). 在计算过程中, 取参数 $\mu = 0.9$, 得到的结果不是物理解:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } -\infty < x \leq 0.5 + t, \\ 0, & \text{当 } 0.5 + t < x < \infty \end{cases} \quad (4.2)$$

而是一个近似的弱解:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } -\infty < x \leq 0.5 - 3.3t, \\ 1.41, & \text{当 } 0.5 - 3.3t < x \leq 0.5, \\ -0.17, & \text{当 } 0.5 < x \leq 0.5 + 2.2t, \\ 0, & \text{当 } 0.5 + 2.2t < x < \infty. \end{cases} \quad (4.3)$$

如果把参数 μ 从 0.9 换成 0.5, 计算结果仍然不是物理解, 而是不同于 (4.3) 的另一个弱解:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } -\infty < x \leq 0.5 + 0.148t, \\ 1.13, & \text{当 } 0.5 + 0.148t < x \leq 0.5 + 0.9t, \\ 0, & \text{当 } 0.5 + 0.9t < x < \infty. \end{cases}$$

在这个弱解的两个间断点上, 间断关系式都是近似地满足, 但熵条件只在一个间断上满足, 而在另一个上不满足.

计算结果表明, 对于不同的 μ 值, 可以得到不同的弱解. 取 $\Delta t = 0.5 \times 10^{-3}$ 为常数, 计算结果仍是一个近似的弱解 (见图 5).

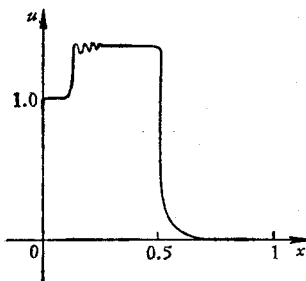


图 5

当 $-\infty < x \leq 0.5 - 2.4t$ 时, $u(x, t) = 1$; 当 $0.5 - 2.4t < x \leq 0.5$ 时, $u(x, t) = 1.36$. 在此间断点上间断关系式被近似地满足, 熵条件也是满足的. 在 $x = 0.5$ 附近, $u(x, t)$ 从 1.36 下降到 0.2—0.3. 从曲线 $z = \varphi(u)$ 的图形上可以看到, 由 $u = 1.35$ 附近的点到 $u = 0.2—0.3$ 附近的点的联线的斜率接近于零. 可见在此间断点上间断关系式被近似地满足. 容易看出, 在这点上熵条件是不满足的. $x = 0.5$ 以后的计算结果, u 从 0.2—0.3 附近连续变化到零.

还作了这样的计算, 取 $\mu = 2.9$, 计算一小段时间, 这

时格式是不稳定的, 积累了一些误差. 然后取 $\mu = 0.9$ 的稳定格式接下去计算, 得到的结果是又一个近似弱解:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } -\infty < x < 0.5 - 1000(t - t_0), \\ 6.14, & \text{当 } 0.5 - 1000(t - t_0) < x < 0.5 + (t - t_0), \\ -5.14, & \text{当 } 0.5 + (t - t_0) < x < 0.5 + 1000(t - t_0), \\ 0, & \text{当 } 0.5 + 1000(t - t_0) < x < \infty, \end{cases}$$

其中 $t_0 \doteq 0.036$ 是从不稳定格式 ($\mu = 2.9$) 改换为稳定格式 ($\mu = 0.9$) 计算的时刻.

从这些结果看来, 不同的计算参数, 得到不同的弱解. 到底能得到哪一个弱解, 看来似乎带有一些“随机”性质. 这种性质好象是由于开头几步计算中的非线性不稳定性积累起来的误差造成的.

(二) 函数 (2.13) 是非凸的. 现在取 $\varphi(u) = -\frac{1}{2}u^2$. 问题 (2.1), (4.1) 的物理解是连续的:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } -\infty < x < 0.5 - t, \\ \frac{0.5 - x}{t}, & \text{当 } 0.5 - t < x < 0.5, \\ 0, & \text{当 } 0.5 < x < \infty. \end{cases}$$

仍采用 L-W 格式计算. $\mu = 0.25, 0.5, 0.9$ 的计算结果见图 6, 得到的仍然不是物理解而是近似的弱解. 由此可见, 利用 L-W 格式计算不出拟线性方程的物理解的原因, 不见得是由于函数 $\varphi(u)$ 的非凸性或者物理解的间断性, 即使物理解是连续的, 也不一定算出物理解来.

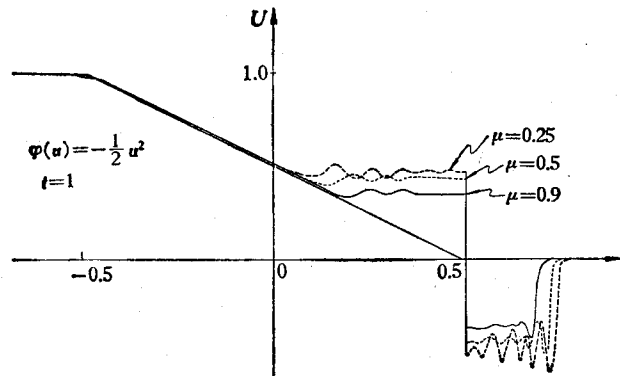


图 6

(三) 用格式 (3.2) 计算 (一) 中问题时, 取 ε_2 略大于 $1/2$, 仍然算不出物理解, 这是由于粘性的作用还不足以克服“随机”的作用. 当 ε_2 大过 $1/2$ 一定量时, 可以算出物理解来. 例如当 $\mu = 0.5, \varepsilon_2 = 1$ 时, 得到了物理解 (4.2) 的近似.

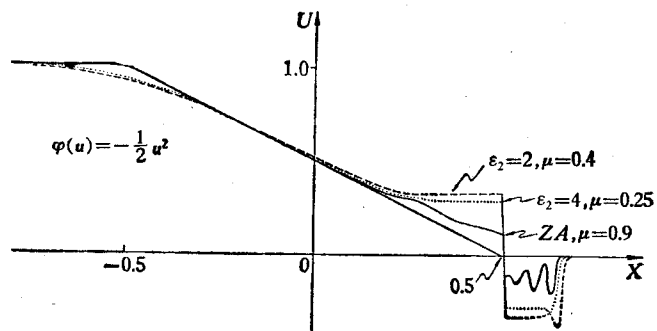


图 7

但是用同样的办法计算 (二) 中的问题, 当 $\varepsilon_2 = 2, \varepsilon_2 = 4$ 时, 仍然得不到物理解 (见图 7). 在 $u=0$ 的附近, 二阶差商的系数的两个因子 $a(u) = u$

可以不取在同一点上, 因此可能异号, 从而产生的不稳定性效应使得数值结果偏离所要求的物理解。

(四) 现在考察更高精度的格式的计算效果。

采用非对称三阶精度的差分格式(3.2), 取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{6}$, $\varepsilon_4 = 0$, 计算(一)中的问题(2.1), (4.1), 得到的不是物理解, 而是个近似弱解:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } -\infty < x < 0.5 + 0.58t, \\ 1.07, & \text{当 } 0.5 + 0.58t < x < 0.5 + 1.03t, \\ -0.102, & \text{当 } 0.5 + 1.03t < x < 0.5 + 1.64t, \\ 0, & \text{当 } 0.5 + 1.64t < x < \infty, \end{cases} \quad (4.4)$$

其中参数 $\mu = 0.5$ 。对以上格式增加一个含四阶导数的人为粘性项, 即取 $\varepsilon_4 = 2$ 与 $\varepsilon_4 = 50$, 并取 $\mu = 0.15$ 进行计算, 得到的结果与(4.4)相差极微。看来由低阶项造成的对物理解的偏离, 想用高阶附加项来纠正是比较困难的。如果在(3.2)中取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_4 = 0$ 进行计算, 不同的 μ 值还是得到不同的近似弱解。

最后, 我们还用三阶精确度格式(3.3)作了一些计算。如果取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{6}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{24}$ 计算(一)中的问题, 还是得不到物理解。将 ε_4 从 $1/24$ 增大到 $1/12$, 计算结果仍然不是物理解。对于(二)中连续解的问题, 用(3.3)格式计算的结果见图7中的ZA曲线。

5

从以上的讨论可以看出, 采用高精度的显式差分格式计算双曲型方程组或流体力学运动方程组, 并不一定能得到近似的物理解。即使方程组具有凸性的性质, 甚至于解是连续的, 高精度差分格式也不会是个理想的差分格式。看来, 对于流体力学运动方程组问题的计算方法说来, 多考虑人为粘性或格式粘性的形式, 以及熵增加性质的问题, 比单纯提高截断误差的阶数, 可能更有意义。除此以外, 对于差分格式的引进, 除了考虑格式的稳定性以外, 还应该考虑到格式的收敛性。只有格式的稳定性, 可以进行计算, 但其结果却未必逼近所需要的物理解。

参 考 文 献

- [1] A. Harten, J. M. Hyman, P. D. Lax, B. Keyfitz, On Finite-Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29** (1976), 297—322.
- [2] 周毓麟, 非线性双曲型方程与人为粘性, 北京第九研究所, 1977.
- [3] О. А. Олейник., Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений, *УМН*, 12. вып. 3 (75), (1957), 3—73.
- [4] G. Zwas, S. Abarbanel, Third and Forth Order Accurate Schemes for Hyperbolic Equations of Conservation Form, *Math. Comput.*, **25** (1971), 229—236.