

# 一种二维数值网格的构造方法<sup>\*1)</sup>

徐涛 水鸿寿

(北京应用物理与计算数学研究所, 计算物理实验室)

## A TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL GRIDS GENERATION METHOD

Xu Tao Shui Hong-shou

(*Laboratory of Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational  
Mathematics*)

### Abstract

The algebraic expressions describing the geometric properties of mesh curves are given. The control functions concerning above properties are introduced and functionals showing those properties are constructed. Based on a theorem, we get the concrete corresponding relation of the control functions with the mesh properties when the functional taken minimum. By the numerical solution of Euler equation obtained from functional minimum, we get the needed grids. This method of grids generation has a quit derict geometric meaning, and its inner control is flexible. Particularly, not only the adaptability with physical preblem is concerned, but also the adaptability with the real physical region. The numerical experiments verified the efficiency of our method.

### § 1. 引 言

二维数值网格构造是一种二维区域上的自动网格生成技术. 是为了适应数值求解任意形状二维区域上的偏微分方程而发展起来的. 它产生以后, 对于一些不规则区域上对边值敏感问题以及非定常二维流动问题等的数值计算起了重要的作用. 从本世纪六十年代开始, 有许多欧美和前苏联等学者在网格构造方面做了许多开拓的和内容较为丰富的工作. 人们也越来越认识到网格构造无论是在差分法还是有限元的数值计算中都具有重要的地位. 在求解非定常问题时, 可以不管物理区域如何变化, 始终保证计算在同一规则的参数区域中. 特别在流体力学计算中, 由于采用不同类型的计算网格, 形成了具有不同风格, 不同特点的计算方法. 网格构造避免了边界

\* 1997年9月9日收到.

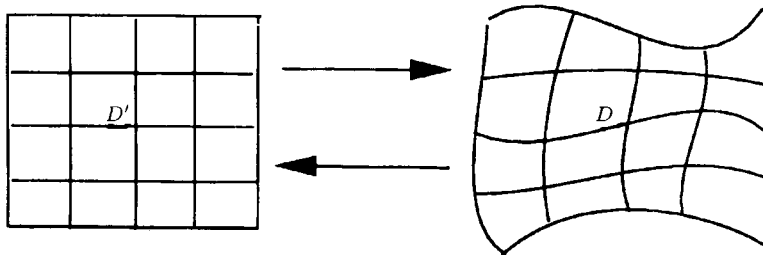
1) 中国工程物理研究院基金支持项目.

条件的近似, 使一些边值问题的边界条件得以精确的利用. 同时通过对内部网格的适应性控制, 用小的代价得到好的计算结果.

如图: 设  $D$  为物理平面上具有任意形状的实际问题求解区域. 网格构造的目的就是要寻求一组变换:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

使它能够把这个复杂区域映成参数空间  $(\xi, \eta)$  中的简单区域  $D' : [0, 1] \times [0, 1]$ .



对于这个变换, 最基本的要求是:

1. 映射把边界  $\rightarrow$  边界, 内点  $\rightarrow$  内点.
2. 映射是一一对应的, 即可逆的.

只有在上述两个要求下, 才保证了区域的对应性, 并且在  $(\xi, \eta)$  平面上  $D'$  中剖分的网格能反映回原求解区域  $D$  中也形成网格.

最简单的网格构造方法是代数方法, 这是通过代数插值的办法, 由边界点的分布来得到内部网格点的位置 (例如, 双线性插值<sup>[2]</sup>). 这种网格构造方法的特点是计算公式简单, 网格生成速度很快, 常常被用来形成一些迭代求解的网格构造方法的初始网格. 对于一般的区域或对网格要求不十分精细的问题, 常常用代数方法来构造网格.

在空气动力学中对于翼型等的外场区的计算时, 要求网格线与物面边界有较强的正交性, 这时人们考虑用保角变化方法来构造网格. 这里给出的映射满足所谓的 Cauchy-Riemann 条件, 即

$$\partial x / \partial \xi = \partial y / \partial \eta, \quad \partial x / \partial \eta = -\partial y / \partial \xi,$$

也就是正交性条件. 在此基础上, 可以具体构造不同的变换形式<sup>[9]</sup>.

对于一般的二维区域, 被讨论更多的是用解微分方程的方法构造网格. 1966年, Winslow 首先在文献 [18] 中采用一 Laplace 方程来构造网格. 用这种方法构造的网格具有分布均匀, 适应区域强的特点, 相应的讨论还可参看文献 [4]. 在此基础上 Годунов 和 Прокопов 在文献 [19] 中引入左端源项  $P, Q$ . 化 Laplace 方程为 Poisson 方程来构造网格. 通过选择  $P, Q$  来调整网格疏密等性质. 在文献 [1] 中, 作者对上述方法做了进一步的发展, 引进了更为直观的网格疏密的控制. 此外还有用解双曲型方程的方法构造网格, 这种构造网格的方法适用于具有“单一边界”的外场区域, 是以初始

边界为第一层的初始条件, 一层一层向外构造网格. 由于无需进行迭代, 可以快速生成网格. 但是, 如果区域边界比较复杂, 由于双曲型方程的传播特性, 它会把边界的奇异性加以传播, 有时会使得后序生成的网格变坏甚至自交<sup>[14]</sup>. 与此相似, 在文献 [10-12] 中作者采用抛物型方程构造网格, 这种方法适用于求解外场区域. 也具有分层求解的特点, 但由于方程中具有二阶扩散项, 可以把初始边界上的奇异性随着向外的分层求解而光滑化. 上述二个方法在构造封闭区域网格时, 就会遇到一个与上边界吻合的问题.

另外, 在文献 [20] 中, 作者用了一种称为双调和方程

$$\Delta\Delta\xi = 0, \quad \Delta\Delta\eta = 0$$

来构造网格, 其中  $\Delta$  为 Laplace 算子. 用这种方法构造网格可以使边界网格具有强的正交性.

1970 年, Barfield W.D. 在文献 [21] 中采用变分法的思想来构造网格. 就是给出某种度量网格性质的泛函, 通过求泛函极小构造网格. 1982 年, Brackbill J.U. 和 Saltzman J.S. 在文献 [3] 中给出了多种描述网格性质 (正交性, 光滑性, 体积) 的泛函, 把它们根据需要加权平均, 通过求它的极小来构造所需要的网格. 相应的讨论还可参见文献 [15]. 在 1988 年, Antonios E.G. 等在文献 [16] 中, 还讨论了一种带有方向控制的泛函来控制网格线的走向.

以上的网格构造方法都是通过数值求解一个连续的微分方程 (这之中包括由求连续泛函的极小导出的欧拉方程), 在边界网格点给定情况下, 形成内部网格点. 但是, 也有另外一种想法, 就是把内部有限多个网格点的坐标看成要被直接求解的未知量, 通过它们的分布与网格性质的讨论, 列出代数方程来求解. 关于这方面前苏联学者做了许多的工作, 详细的可见文献 [5-8, 22].

## § 2. 网格生成方法的构造

### 2.1 网格曲线的各种性质

- A.  $\xi$  线,  $\eta$  线的参数方程为  $x = x(\xi_0, \eta)$ ,  $y = y(\xi_0, \eta)$  及  $x = x(\xi, \eta_0)$ ,  $y = y(\xi, \eta_0)$ .
- B. 相应的切向量为  $(x_\eta, y_\eta)$  及  $(x_\xi, y_\xi)$ .
- C. 相应的法向量为  $(\xi_x, \xi_y)$  及  $(\eta_x, \eta_y)$ .
- D.  $\xi$  线,  $\eta$  线的长度变化率为  $\sqrt{(x_\eta^2 + y_\eta^2)}$  及  $\sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)}$ .
- E.  $\xi$  线与  $\eta$  线夹角  $\omega$  的余弦为

$$\cos \omega = \frac{(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)}{\sqrt{(x_\eta^2 + y_\eta^2)(x_\xi^2 + y_\xi^2)}}$$

- F. 面积变化率为  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ .

### 2.2 数学定理

设  $\psi$  为一函数集合, 满足  $\psi = \left\{ f(x) \mid \int_a^b f(x)dx \geq C > 0 \right\}$ , 对于任意给定的  $w(x) > 0$ , 存在  $f_0(x) \in \psi$ , 满足

$$\begin{cases} 1. \int_a^b f_0(x)dx = C, \\ 2. f_0(x)w(x) = L = \frac{C}{\int_a^b 1/w(x)dx} = \text{const}, \end{cases}$$

使得

$$\int_a^b w(x)f_0(x)^2 dx < \int_a^b w(x)g(x)^2 dx \quad \forall g(x) \in \psi, g(x) \neq f_0(x)$$

证明. 设有一个  $g(x) \neq f_0(x) g(x) \in \psi$ .

我们可设  $g(x) = f_0(x) + h(x)$  则易得  $\int_a^b h(x)dx \geq 0$ . 这时

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)g(x)^2 dx &= \int_a^b w(x)(f_0(x) + h(x))^2 dx = \int_a^b w(x)(f_0(x)^2 + h(x)^2 + 2f_0(x)h(x))dx \\ &= \int_a^b (w(x)f_0(x)^2 + w(x)h(x)^2 + 2Lh(x))dx \end{aligned}$$

由于  $L = \text{const} > 0$ ,  $\int_a^b h(x)dx \geq 0$ , 所以上式  $\geq \int_a^b w(x)f_0(x)^2 dx + \int_a^b w(x)h(x)^2 dx$ .

因为  $f_0(x) \neq g(x)$ , 即  $h(x) \neq 0$ , 而  $w(x) > 0$ , 所以上式的第二项大于 0. 于是有

$$\int_a^b w(x)f_0(x)^2 dx < \int_a^b w(x)g(x)^2 dx, \quad \forall g(x) \in \psi, g(x) \neq f_0(x)$$

定理得证.

### 讨论

1. 当取  $w \equiv 1$  时, 可得  $f_0(x) = \frac{C}{b-a}$ . 这说明: 在  $[a, b]$  上积分大于等于常数  $C$  的所有函数中, 只有积分等于  $C$  且处处都取得常数的函数使得  $\int_a^b f(x)^2 dx$  最小.

2. 对于一般的  $w(x)$  知, 只有当  $f(x)w(x) = L = \frac{C}{\int_a^b 1/w(x)dx}$  时, 才使得  $\int_a^b w(x)f(x)^2 dx$  最小, 这说明可以用  $w(x)$  的取值来控制  $f(x)$  的取值来使积分达到极小.

### 2.3 方法的构造

1. 对于各处网格体积变化的控制  
可以构造泛函

$$I_v = \int \int_{D'} w(\xi, \eta) J^2 d\xi d\eta,$$

这里  $J = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$  为变换的 Jacobi 矩阵. 也是各处的体积变化率.

因为

$$\iint_{D'} J d\xi d\eta = S(D) = \text{const},$$

其中  $S(D)$  为物理区域的面积, 则由上节定理知, 可以通过  $w(\xi, \eta)$  来控制网格的疏密.

一般地, 为了使得内部网格分布与边界相一致, 即当在边界上网格点分布疏密不同时, 沿与边界同一方向的内部网格线上也呈现相一致分布, 我们在程序中取离散的  $w_{i,j}$  为与边界网格点分布相关的量如下:

$$w_{i,j} = \frac{1}{wid_{i,j} * hei_{i,j}},$$

其中  $wid_{i,j}$  和  $hei_{i,j}$  分别为在  $(i, j)$  点网格所应占有体积的宽度和高度,  $wid_{i,j}$  由上边界点  $(i, n)$  处的宽度 (定义为  $(i-1, n)$  到  $(i+1, n)$  距离的一半) 和下边界点  $(i, 1)$  处的宽度按  $j$  做插值得出 ( $n$  为网格分点数);  $hei_{i,j}$  由左边界点  $(1, j)$  处的高度 (定义为  $(1, j-1)$  到  $(1, j+1)$  距离的一半) 和右边界点  $(m, j)$  处的高度按  $i$  做插值得出 ( $m$  为网格分点数). 可把这种定义扩充到边界点.

值得说明的是, 当两个相对的边界都退化到一点时, 不能用上述方法确定  $w_{i,j}$  要考虑另外的方法.

## 2. 对网格正交性的控制

因为  $\xi$  线,  $\eta$  线的切向量分别是  $(x_\eta, y_\eta), (x_\xi, y_\xi)$ , 所以, 可以用

$$I_0 = \iint_{D'} w_0(\xi, \eta) [(x_\eta, y_\eta) \cdot (x_\xi, y_\xi)]^2 d\xi d\eta = \iint_{D'} w_0(\xi, \eta) (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\xi d\eta$$

来描述网格曲线的整体正交性. 其中  $w_0(\xi, \eta)$  为一权函数, 它可以在网格正交性要求强的地方 (如边界附近) 取得大些.

## 3. 对网格光滑性的控制

对于  $\xi$  线, 可知其伸长比为  $\sqrt{(x_\eta^2 + y_\eta^2)}$ . 如图, 设某条  $\xi$  线的端点为  $A_1, A_2$ , 对伸长比积分有  $\int \sqrt{(x_\eta^2 + y_\eta^2)} d\eta \geq A_1 A_2$ .  $A_1 A_2$  为连接  $A_1, A_2$  线段的长度. 则  $\int w_2(\xi, \eta) (x_\eta^2 + y_\eta^2) d\eta$  的极小值要求:

① 在连接  $A_1, A_2$  的所有曲线中, 最小的那条曲线, 即线段  $A_1 A_2$  为对应的  $\xi$  线.

②  $w_2(\xi, \eta) \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} = \text{const}$ . 这样可以用  $w_2(\xi, \eta)$  控制  $\xi$  线的伸长比 (为  $\eta$  的函数).

对  $\xi$  从  $0 \rightarrow 1$  积分  $\iint_{D'} w_2(\xi, \eta) (x_\eta^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta$ . 由其极小化可得到  $\xi$  线族的图像如图 A.

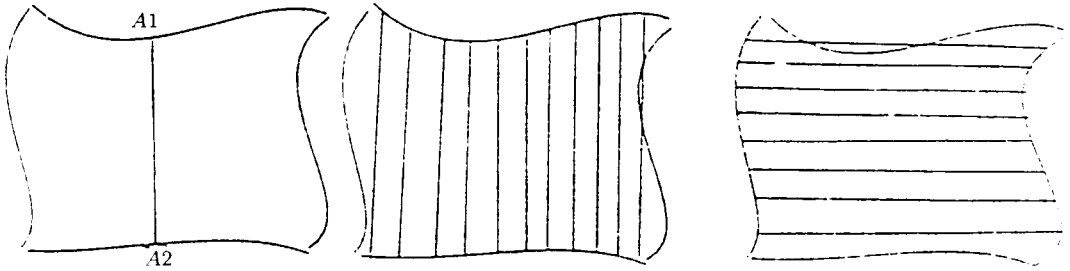


图 A

图 B

同样地, 只对于  $\int \int_{D'} w_1(\xi, \eta)(x_\xi^2 + y_\xi^2) d\xi d\eta$  取极小, 可得到另外一组图像如图 B.

现在考虑两者加在一起的综合效应:

$$I_s = \int \int_{D'} (w_2(\xi, \eta)(x_\eta^2 + y_\eta^2) + w_1(\xi, \eta)(x_\xi^2 + y_\xi^2)) d\xi d\eta,$$

则两者都试图把对方的图像拉向自己的形式. 因为这时前面的两组图像都只能保证  $I_s$  中的某一部分达到极小, 而另一项则可能取得很大. 对于一般的区域, 当边界弯曲不是太厉害时, 这种效应能把两族网格线拉回物理区域中, 但当边界弯曲得太厉害时, 有可能使网格线溢出边界, 这时就需要考虑到对边界的适应性调整.

#### 2.4 区域的适应性

所谓区域的适应性, 就是说要在算法中根据边界曲线的形状, 来给出相应的控制函数  $w_1(i, j), w_2(i, j)$ .

注意到前面所述当边界过于弯曲时, 内部网格线会溢出边界. 这使得我们考虑根据边界曲线的曲率的大小来调整控制函数. 在一般情况下, 我们取  $w_1 = 1, w_2 = 1$ . 即在积分中对各条  $\xi$ -线和  $\eta$ -线是同样对待的. 从前面的讨论可见,  $w_1$  是用来控制  $\eta$ -线的形状和其上网格点的分布的,  $w_2$  是用来控制  $\xi$ -线的形状和其上网格点的分布的. 那么, 我们可以在  $\xi = 0$  或  $\xi = 1$  边界出现较大弯曲时, 增大此处的  $w_1$  的值 (但对于  $\xi$  其值仍为常数), 使在此处的  $\eta = \text{const}$  线的形状和分布在整个积分求和中的影响突出出来, 尽可能按照前面①, ②两点的要求在此形成该  $\eta$ -线的分布, 就避免了在此处网格点的溢出. 同样对  $\eta = 0$  或  $\eta = 1$  边界出现较大弯曲的地方, 增大该处的权函数  $w_2$  的值. 一般由边界控制的区域自适应函数  $w_1, w_2$  取为

$$w_1(i, j) = (1 + km\rho_j)^2,$$

$$w_2(i, j) = (1 + kn\rho_i)^2,$$

其中  $m, n$  为  $\xi, \eta$  方向分点的个数,  $\rho$  为区域边界上的曲率,  $\rho_j$  表示在边界  $\xi = 0$  和  $\xi = 1$  上第  $j$  个网格点上的两个曲率的最大值, 同样  $\rho_i$  表示在边界  $\eta = 0$  和  $\eta = 1$  上第  $i$  个网格点上的两个曲率的最大值.  $k$  为一个与  $1/m, 1/n$  同量纲的可调的参数

$k = xs * \max(1/m, 1/n)$ ,  $xs$  一般取 0 到 1 之间的值, 用它来调解对边界有较大凸凹处的控制程度,  $xs$  大时, 程度加强.

在实际网格构造中这种做法还是收到了一定的效果, 这可以在实际例子中看到.

### 讨论

1. 当物理问题本身具有自适应要求时, 如在加入区域自适应前  $w_1(\xi, \eta)|_{\eta=j} \neq 1$ , 而是根据物理问题的需要取得大小不同的值, 例如在沿这条  $\eta = j$  上随着  $i$  物理量变化大的地方取得大, 物理量变化小的地方取得小. 这时我们可以把这种区域的自适应性叠加在其上, 即取:

$$w_1(i, j) = w_1(i, j)(1 + km\rho_j)^2$$

这样除了加入区域自适应控制, 仍会有原来网格线上网格点分布疏密的物理控制效应.

2. 当对应参数平面四边形的某边的物理区域边界上有尖点时, 按上面的做法可能在尖点处的权重函数值很大 (这时该处的曲率很大), 而它的邻点的函数值却很小. 这样会造成网格过渡的不光滑, 为此, 我们可以在按前面所述方法形成权函数  $w_1, w_2$  后, 对其在每个边界点上的值进行光滑化处理. 如可按如下三次 B- 样条光滑化做法:

$$w_1(i, j) = \sum_{l=1}^m w_1(i, l)M_3(j-l),$$

$$w_2(i, j) = \sum_{l=1}^m w_2(l, j)M_3(i-l),$$

其中  $M_3(x)$  为如下三次 B- 样条基函数:

$$M_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 3/2, \\ \frac{3}{4} - x^2, & |x| < 1/2, \\ \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}|x| + \frac{9}{8}, & \text{其它.} \end{cases}$$

考虑到三个方面的综合效应, 可以把三者加权组合起来, 形成一个新的泛函

$$I = I_s + r_0 I_o + r_1 I_v.$$

考虑到量纲的统一,  $r_0, r_1$  应取  $O(1/h^2)$ , 其中  $h = \max(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta)$ .

### 2.5 具体算法

取  $I = I_s + r_1 I_v + r_0 I_o$  做为求极小化的泛函.

通过对泛函求极小, 可得如下的欧拉方程

$$\begin{cases} R_x(\xi, \eta) = b_1 x_{\xi\xi} + b_2 x_{\xi\eta} + b_3 x_{\eta\eta} + a_1 y_{\xi\xi} + a_2 y_{\xi\eta} \\ \quad + a_3 y_{\eta\eta} + d_1 x_{\xi} + d_2 x_{\eta} + e_1 y_{\eta} - e_2 y_{\xi} = 0, \\ R_y(\xi, \eta) = a_1 x_{\xi\xi} + a_2 x_{\xi\eta} + a_3 x_{\eta\eta} + c_1 y_{\xi\xi} + c_2 y_{\xi\eta} \\ \quad + c_3 y_{\eta\eta} + d_1 y_{\xi} + d_2 y_{\eta} + e_1 x_{\xi} - e_2 x_{\eta} = 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= r_0 a_{01} + r_1 a_{v1}, & a_2 &= r_0 a_{02} + r_1 a_{v2}, & a_3 &= r_0 a_{03} + r_1 a_{v3}, \\ b_1 &= w_1 + r_0 b_{01} + r_1 b_{v1}, & b_2 &= r_0 b_{02} + r_1 b_{v2}, & b_3 &= w_2 + r_0 b_{03} + r_1 b_{v3}, \\ c_1 &= w_1 + r_0 c_{01} + r_1 c_{v1}, & c_2 &= r_0 c_{02} + r_1 c_{v2}, & c_3 &= w_2 + r_0 c_{03} + r_1 c_{v3}, \\ d_1 &= w_1 \xi + r_0(x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}) w_{0\eta} / 2, & d_2 &= w_2 \eta + r_0(x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}) w_{0\xi} / 2, \\ e_1 &= r_1(x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}) w_{\xi}, & e_2 &= r_1(x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}) w_{\eta}. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} a_{01} &= w_0 x_{\eta} y_{\eta}, & a_{02} &= w_0(x_{\xi} y_{\eta} + x_{\eta} y_{\xi}), & a_{03} &= w_0 x_{\xi} y_{\xi}, \\ b_{01} &= w_0 x_{\eta}^2, & b_{02} &= 2w_0(2x_{\xi} x_{\eta} + y_{\eta} y_{\xi}), & b_{03} &= w_0 x_{\xi}^2, \\ c_{01} &= w_0 y_{\eta}^2, & c_{02} &= 2w_0(x_{\xi} x_{\eta} + 2y_{\eta} y_{\xi}), & c_{03} &= w_0 y_{\xi}^2, \\ a_{v1} &= -w x_{\eta} y_{\eta}, & a_{v2} &= w(x_{\xi} y_{\eta} + x_{\eta} y_{\xi}), & a_{v3} &= -w x_{\xi} y_{\xi}, \\ b_{v1} &= w y_{\eta}^2, & b_{v2} &= -2w y_{\eta} y_{\xi}, & b_{v3} &= w y_{\xi}^2, \\ c_{v1} &= w x_{\eta}^2, & c_{v2} &= -2w x_{\xi} x_{\eta}, & c_{v3} &= w x_{\xi}^2. \end{aligned}$$

这是一个非线性的偏微分方程组, 先用差分代替微分, 近似成一个非线性代数方程组. 然后, 用一般的解非线性代数方程组的迭代解法即可求解.

例如, 若以知第  $l$  次的  $x(i, j)$ ,  $y(i, j)$  的值, 则  $(l+1)$  次的值可由下面方法求出:

$$\begin{cases} R_x^{(l)}(i, j) + \left(\frac{\partial R_x^{(l)}}{\partial x}\right)(i, j)(x^{(l+1)}(i, j) - x^{(l)}(i, j)) + \left(\frac{\partial R_x^{(l)}}{\partial y}\right)(i, j)(y^{(l+1)}(i, j) - y^{(l)}(i, j)) = 0, \\ R_y^{(l)}(i, j) + \left(\frac{\partial R_y^{(l)}}{\partial x}\right)(i, j)(x^{(l+1)}(i, j) - x^{(l)}(i, j)) + \left(\frac{\partial R_y^{(l)}}{\partial y}\right)(i, j)(y^{(l+1)}(i, j) - y^{(l)}(i, j)) = 0. \end{cases}$$

其中

$$\partial R_x^{(l)} / \partial x(i, j) = -2(b_1 + b_3)^{(l)},$$



$$\partial R_x^{(l)} / \partial y(i, j) = -2(a_1 + a_3)^{(l)} = \partial R_y^{(l)} / \partial x(i, j),$$

$$\partial R_y^{(l)} / \partial y(i, j) = -2(c_1 + c_3)^{(l)}.$$

### § 3. 实际算例

#### 3.1 一些静态区域的网格

下面各图给出了用本方法构造网格的一些实例.

图 1—图 4 是对于同一个区域采用不同控制函数  $w_1, w_2$  得到的网格构造图, 其中  
的控制函数分别为 (公共:  $w_o(i, j) = 20 * ((i-1)/(m-1) - 0.5)^2 * ((j-1)/(n-1) - 0.5)^2 + 1$ ,  
 $x(i, j) = 1, r_0 = r_1 = 1, xs = 0.6$ ):

图 1.  $w_1(i, j) = w_2(i, j) = 1$ ,

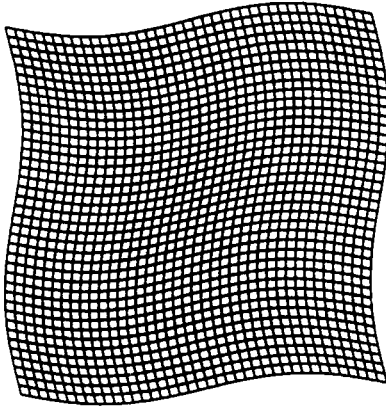


图 1.

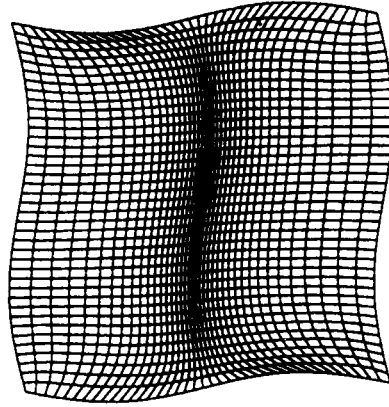


图 2.

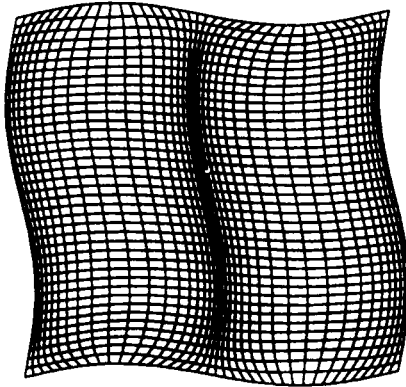


图 3.

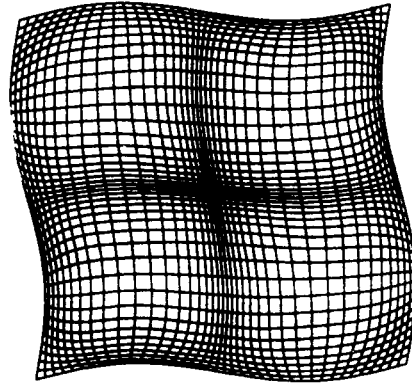


图 4.

图 2.  $w_2(i, j) = 1, w_1(i, j) = 20 * (1 - |\sin(\pi/2 + (i-1)\pi/(m-1))|) + 1$ .

图 3.  $w_1(i, j) = 20 * (1 - |\sin(2(i-1)\pi/(m-1))|) + 1, w_2 = 1,$

图 4.

$$w_1(i, j) = 20 * (1 - |\sin(2(i-1)\pi/(m-1))|) + 1,$$

$$w_2(i, j) = 20 * (1 - |\sin(2(j-1)\pi/(n-1))|) + 1.$$

图 5. 是考察体积控制量  $w$  对生成网格的影响, 其中各控制量取为

$$w(i, j) = 100(1 - |\sin(\pi/2 + (i-1)\pi/(m-1))|)(1 - |\sin(\pi/2 + (j-1)\pi/(n-1))|) - 1.$$

$$w_o(i, j) = 20 * ((i-1)/(m-1) - 0.5)^2((j-1)/(n-1) - 0.5)^2 + 1,$$

$$r_1 = r_0 = 1. \quad w_1(i, j) = w_2(i, j) = 1, \quad xs = 0.5.$$

图 6. 是考察正交控制在生成网格中的作用, 其中各控制量取为

$$w_o(i, j) = 20 * ((i-1)/(m-1) - 0.5)^2((j-1)/(n-1) - 0.5)^2 + 1,$$

$$r_1 = 0, r_0 = 40, \quad w_1(i, j) = w_2(i, j) = 1, \quad xs = 0.5.$$

从这些图形来看, 网格的控制与我们前面的理论分析是相一致的.

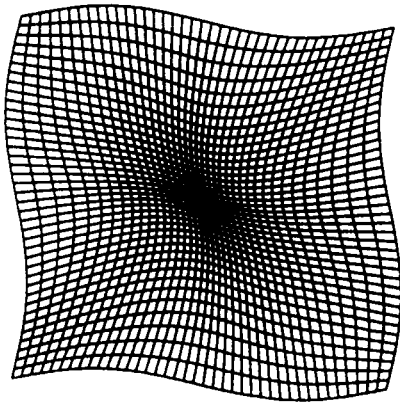


图 5.

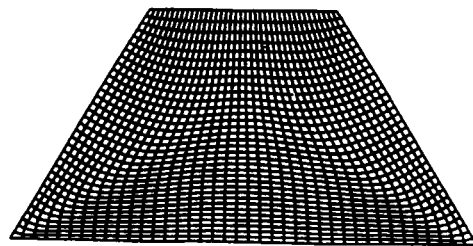


图 6.

图 7-图 20 是对于一些不同的二维区域的网格构造实例. 从这些例子中可见方法的强壮性和灵活性.

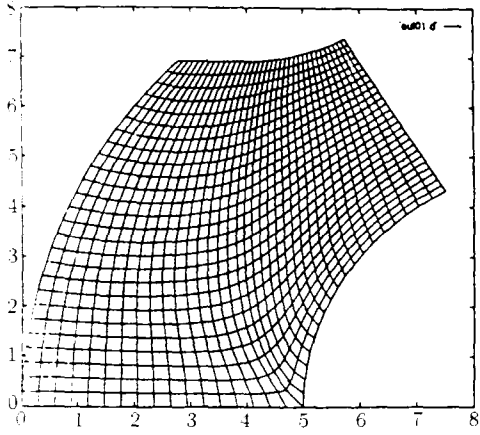


图 7.

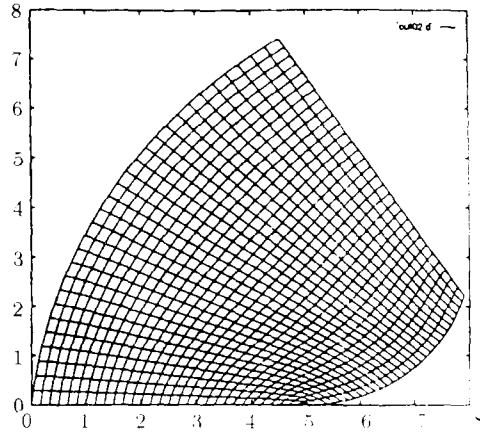


图 8.

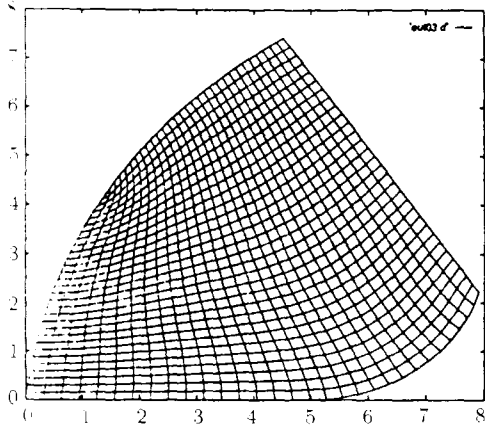


图 9.

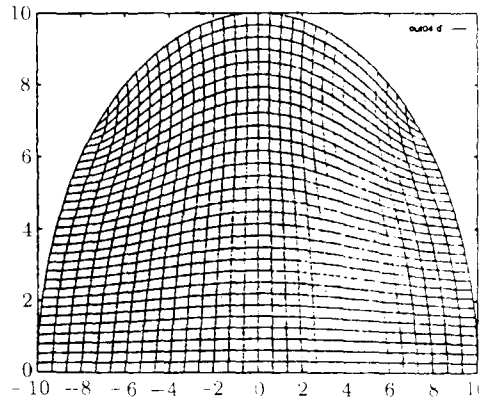


图 10.

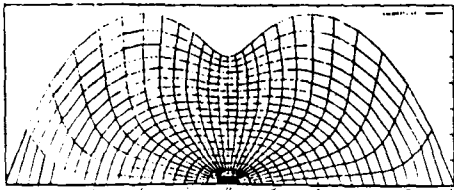


图 11.

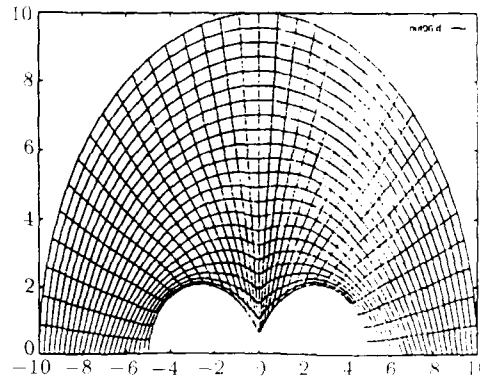


图 12.

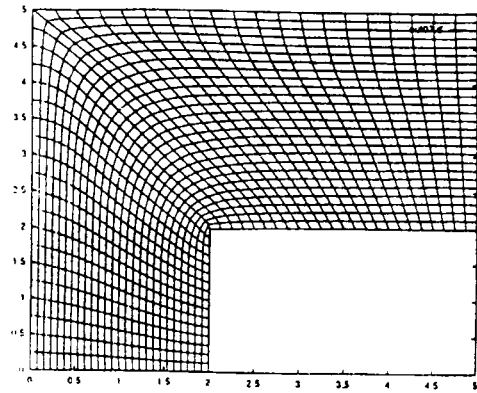


图 13.

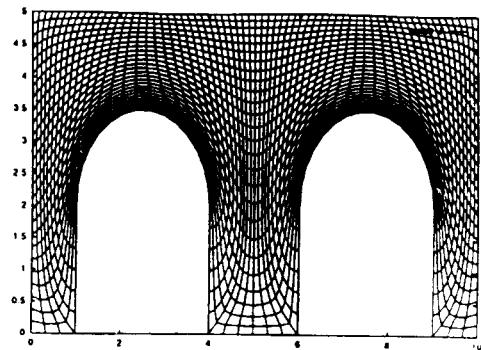


图 14.

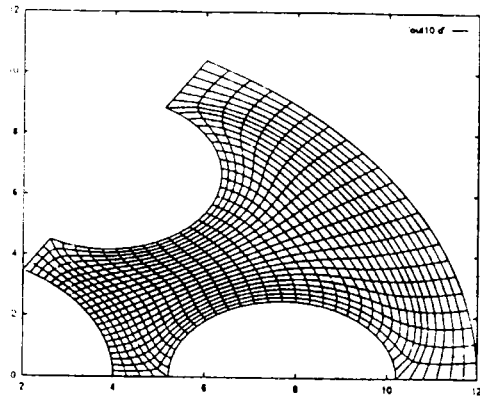


图 15.

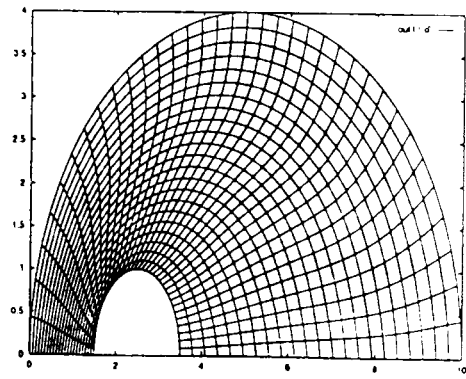


图 16.

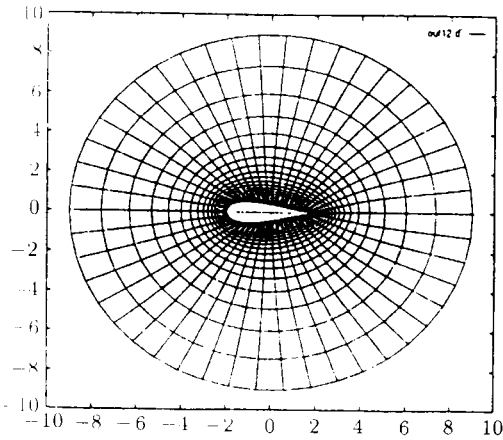


图 17.

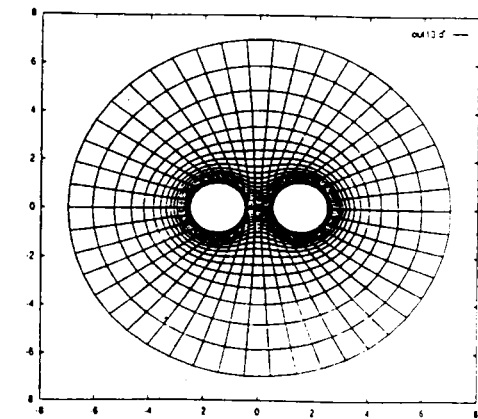


图 18.

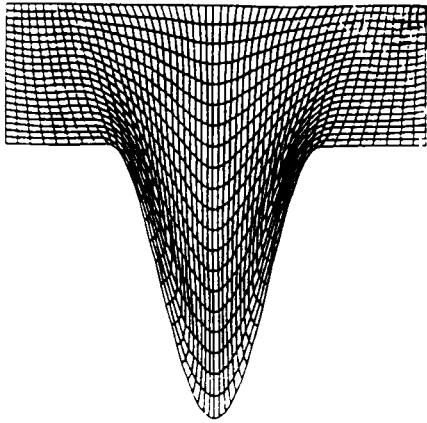


图 19.

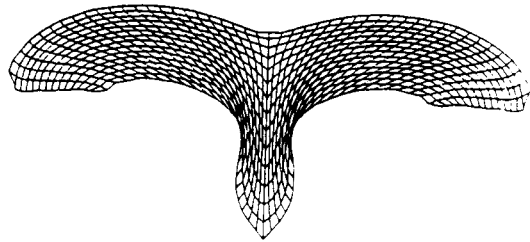


图 20.

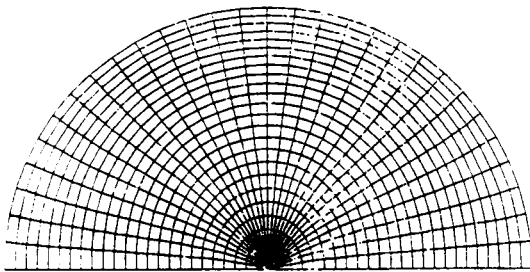
### 3.2 对一个二维非定常流动的计算

问题的物理背景是, 一个半圆形物体, 其下为一固壁, 上面的半圆受某种压力作用, 这种压力是如下中间大两边小的定态分布:

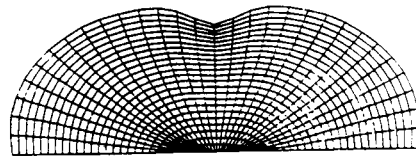
$$P(\theta, r_0) = 40 * (1 - |\sin(0.45 * \pi + 1.1 * \theta)|) + 8$$

其中  $r_0$  为半圆的半径,  $\theta$  为半圆上的点与圆心连线与  $x$  轴正向的夹角. 求解它的运动过程.

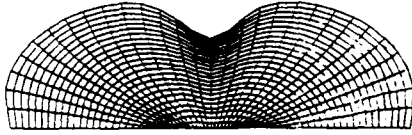
设运动满足二维无粘流体力学方程组, 我们采用文献 [17] 中的体平均格式来进行数值计算. 取状态方程  $P = (\gamma - 1)\rho e$  的简单的形式, 其中  $\gamma$  为一常数,  $P$  为压力,  $\rho$  为密度,  $e$  为内能. 在每个时间步做网格重分, 在计算过程中做了一些诸如上边界点的重分, 圆心点的移动, 时间步长的控制等处理. 得到了如下的结果.



初始时刻



60 个时间步



80 个时间步



90 个时间步



100 个时间步



105 个时间步



110 个时间步



115 个时间步

## 参 考 文 献

- [1] 阳述林, 硕士论文. 中国工程物理研究院研究生部. 1987 年.
- [2] 水鸿寿, 数值网格构造方法, 理论和应用, 1989. 第四届全国流体力学数值方法讨论会论文集.
- [3] Brackbill J.U., Saltzman J.S., *J. Comput. Phys.*, **46** (1982), 342-368.
- [4] Thompson J.F., Thames F.C., Mastin C.W., *J. Comput. Phys.*, **15** (1974), 299-319.
- [5] Иваненко С.А., построени невырожденных сеток, *Ж. вычисл. матем. иматем. физ.*, **28**:10 (1988), 1498-1507.
- [6] Иваненко С.А., Чарахццыщ ьян, А.А., Криволинейные сетки из выпуклых четырех угольников, *Ж. вычисл. матем. иматем. физ.*, **28**:4 (1988), 503-514.
- [7] Белинков В.В. Об одном методе построения расчетных сеток, *Ж. вычисл. матем. иматем. физ.*, **26**:8 (1986), 1262-1266.
- [8] Дарьян Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А., *Ж. вычисл. матем. иматем. физ.*, **28**:8 (1988), 1211-1225.
- [9] Бабишевич П.Н., Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики. *Ж. вычисл. матем. иматем. физ.*, **29**:6 (1989), 902-915.
- [10] Ralph W.N., Dale A.A., *AIAA J.*, **28**:6 (1990), 1016-1023.
- [11] Noack R.W., *AIAA*, (1985), 85-1682.
- [12] Nakamura S., Numerical Grid Generation, edited by Thompson J, F., Elsevier, New York. 1982. 775-786.
- [13] Thompson J.F., Warsi U.A., Mastin C.W., Numerical Grid Generation. Foundations and Applications. North-Holland, 1985.
- [14] Stephen R.K., George S.D., *AIAA J.*, **24**:7 (1986), 1069-1073.
- [15] Kreis R.L., Thames F.C., Hassan H.A., *AIAA J.*, **23**:3 (1986), 404-410.
- [16] Antonios E.G., Antonie J.E., *J. Comput. Phys.*, **7** (1988), 422-439.