一种求解二次规划的简便方法*

刘　萍　　　凌晓东

(北京科技大学计算机系)　　(中信公司国际研究所)

A NEW METHOD FOR QUADRATIC PROGRAMMING

Liu Ping

(Department of Computer Science, University of Science and Technology of Beijing)

Ling Xiaodong

(CITIC Research International, China International Trust and Investment Corporation)

Abstract

This paper aims to present a new algorithm for quadratic programming. Compared with the ordinary wolfe's method, the algorithm is more convenient and simpler. It is successfully applied to a real decision support system for optimal allocation of financial assets.

二次规划是一类最简单的非线性规划，但在规划算法的研究中处于重要地位．一方面，它在现实中有广泛的应用；另一方面，许多非线性规划的求解要以二次规划的解法为工具．二次规划的一种常用算法由 Wolfe 提出．笔者在解决现实问题时发现，由于 Wolfe 算法引入过多的人工变量，给程序调试带来很大麻烦．为此，本文设计了一种更为简便的计算方法．当所求问题存在最优解时，证明了该算法可得到最优解，并将其应用于金融资产优化系统中，程序运行稳定可靠．

1. Wolfe 方法简述

Wolfe 方法[1]讨论的形式是

$$\begin{aligned}&\min f(X)=C^TX+1/2X^THX,\\&s.t.\ AX=b,\ X\geqslant 0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中假定 m 维向量 $b\geqslant 0$，H 为 $n\times n$ 半正定矩阵．

在此假定下 X^* 是问题(1)的最优解的充分必要条件是存在 m 维向量 U^*，n 维向量 V^*，使 X^*，U^*，V^* 满足 $K-T$ 条件:

* 1994年12月20日收到.

$$
\begin{aligned}
&AX=b,\\
&C+HX+A^TU-V=0,\\
&V^TX=0,\ V\geqslant 0,\ X\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

从(2)出发，为了求得问题(1)的解，Wolfe 分为以下两种情况讨论：

1.1　短形式

假定 H 为正定矩阵或 $C=0$，引进人工变量 $W=(w_1, \cdots, w_m)^T$，$Z^1=(z_1^1, \cdots, z_n^1)^T$，$Z^2=(z_1^2, \cdots, z_n^2)^T$，则(2)化为

$$
\begin{aligned}
&AX+W=b,\\
&HX+A^TU-V+Z^1-Z^2=-C,\\
&X\geqslant 0,\ V\geqslant 0,\ W\geqslant 0,\ Z^1\geqslant 0,\ Z^2\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

显然

$$
\begin{aligned}
&X=0,\ V=0,\ U=0,\ W=b,\\
&z_i^1=-c_i,\ z_i^2=0,\ \text{若 } c_i<0,\\
&z_i^1=0,\ z_i^2=c_i,\ \text{若 } c_i\geqslant 0
\end{aligned}
$$

为问题(3)的一个基本容许解，并且满足 $V^TX=0$. 为了消去人工变量，从而找到 X^*, U^*, V^*, Wolfe 设计了 2 相迭代. 在相 1 中，在约束(3)及 $U=0$，$V=0$ 之下极小化目标函数 $\sum_{i=1}^{m} w_i$. 当 $\min\sum_{i=1}^{m} w_i=0$ 时，找到了方程组

$$
\begin{aligned}
&AX=b,\\
&HX-V+A^TU+DZ=-C,\\
&X\geqslant 0,\ V\geqslant 0,\ Z\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

的一个基本容许解，其中 D 为一对角矩阵. 其对角线上的元素或为 1 或为 -1，依赖于 z_i^1 或 z_i^2 哪个是基变量而定. 在相 2，在约束(4)下求目标函数 $\sum_{i=1}^{n} z_i$ 满足 $V^TX=0$ 的极小解，当 $\min\sum_{i=1}^{n} z_i=0$ 时，便得到了(2)的容许解 X^*, U^*, V^*，从而得到问题(1)的最优解 X^*.

1.2　长形式

对一般情形，则需要进行 3 相. 首先令(2)中的 $C=0$，将其化为 1.1 的情形，从而得到(5)在 $\mu=0$ 时的解

$$
\begin{aligned}
&AX=b,\\
&HX-V+A^TU+\mu C=0,\\
&X\geqslant 0,\ V\geqslant 0,\ \mu\geqslant 0,\ V^TX=0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

在约束(5)之下求 $-\mu$ 的极小，则得到问题(1)的最优解向量 X^*.

由此看到，Wolfe 方法需引入 $2n+m$ 个人工变量，迭代步骤分 2 相或 3 相. 其原因在于没有充分利用方程(2)中原有变量 V, U. 否则，可不必引入人工变量 Z^1, Z^2，以减少迭代步骤. 本文正是从这一基本思路出发，将引入的人工变量个数减为 m 个($C\geqslant 0$)，迭代步骤减为 1 相。

2. 本方法基本原理

如前所述，当 H 为半正定矩阵时，二次规划(1)求解等价于非线性方程(2)求解. 为了得到(2)的解，本方法构造了一个等价的非线性规划问题(6). 去掉(6)中的非线性条件，可得到线性规划的标准形式(6'). 由于(6)的最优解(目标函数为0时)也是(6')的最优解，采用单纯形方法求得(6')的这个最优解，也就得到了(6)的最优解. 再利用(1) $\Leftrightarrow$(2) $\Leftrightarrow$(6)，即可得到(1)的最优解.

考虑到 C 的取值关系到初始可行解的确定，故以下分两种情况讨论:

2.1 $C\geqslant 0$ 的情形

引进 m 维人工变量 W，令 $U=U_1-U_2$，将(2)化为

$$\begin{aligned}&\min\sum_{i=1}^{m} w_i,\\&s.t. AX+W=b,\\&\quad -HX-A^T(U_1-U_2)+V=C,\\&\quad V^TX=0,\ V\geqslant 0,\ U_1\geqslant 0,\ U_2\geqslant 0,\ X\geqslant 0,\ W\geqslant 0.\end{aligned}\tag{6}$$

从(6)中去掉非线性约束 $V^TX=0$，得到线性规划的标准形式:

$$\begin{aligned}&\min\sum_{i=1}^{m} w_i,\\&s.t. AX+W=b,\\&\quad -HX-A^T(U_1-U_2)+V=C,\\&\quad V\geqslant 0,\ U_1\geqslant 0,\ U_2\geqslant 0,\ X\geqslant 0,\ W\geqslant 0.\end{aligned}\tag{6'}$$

当二次规划问题(1)存在最优解 X^* 时，根据 $K-T$ 条件的必要性，问题(2)存在解 X^*, U^*, V^* 且满足 $(V^*)^TX^*=0$. 从而，问题(6)存在满足 $\sum_{i=1}^{m}w_i=0$ 的最优解 X^*, U_1^*, U_2^* $(U^*=U_1^*-U_2^*)$, V^*, $W^*=0$. 易见，该解亦是问题(6')的最优解. 由于(6')是线性规划的标准形式，最优解必在基本可行解处达到[1]，从而是(6')的基本可行解.

因此，从(6')的初始基本可行解 $W=b$, $V=C$, $X=U_1=U_2=0$ 出发，运用单纯形方法，在(6')的基本可行解集合的子集(即满足 $V^TX=0$ 的基本可行解)中进行基变换，可求得(6')同时也是(6)的最优解 X^*, U_1^*, U_2^*, V^*, $W^*=0$. 进而得到(2)的解 X^*, U^*, V^*. 再根据 $K-T$ 条件的充分性，便得到问题(1)的最优解 X^*.

以上证明了当二次规划问题(1)存在最优解时，问题(6')存在满足 $V^TX=0$, $\sum_{i=1}^{m}w_i=0$ 的基本可行解，因此运用单纯形方法(保持 x_i, v_i 不同时为基变量)求解问题(6')，可使人工变量 W 消失为0，从而得到(1)的最优解.

2.2 一般情形

此时向量 C 中含有 <0 的分量，因此 C 不能作为 V 的初始可行解，需再引入 n 维人工变量 Z，将问题(6')改为

$$
\begin{aligned}
&\min\left(\sum_{i=1}^{n} z_i+\sum_{j=1}^{m} w_j\right),\\
&s.t. AX+W=b,\\
&\quad -HX-A^T(U_1-U_2)+V-Z=C,\\
&\quad V\geqslant 0,\ U_1\geqslant 0,\ U_2\geqslant 0,\\
&\quad X\geqslant 0,\ W\geqslant 0,\ Z\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

问题(7)为线性规划的标准形式，初始基本可行解为

$$
\begin{aligned}
&U_1=U_2=X=0,\ W=b,\\
&v_i=c_i,\ z_i=0,\ 若\ c_i>0,\\
&v_i=0,\ z_i=-c_i,\ 若\ c_i\leqslant 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

与 2.1 的证明相同，如果(1)存在最优解 X^*，则由 $K-T$ 条件的必要性，(7)存在最优解 $W^*=Z^*=0$，X^*，U_1^*，U_2^*，V^* 且满足$(V^*)^TX^*=0$. 根据线性规划标准形式的最优解必在基本可行解处达到，从初始基本可行解(8)出发，运用单纯形方法，保持 $V^TX=0$ 非线性约束，必可找到(7)的最优解 $W^*=Z^*=0$，U_1^*，U_2^*，V^*，X^*. 进而得到(2)的解 X^*，U^*，V^*，再根据 $K-T$ 条件的充分性，得到问题(1)的最优解 X^*.

3. 两种方法的比较

3.1 与短形式的比较

为了将本文提出的方法与 Wolfe 的短形式进行比较，我们用 C 语言编程计算了 Wolfe 论文[2] 中的例题:

$$
\begin{aligned}
&\min 1/2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\lambda(x_1-2x_3),\\
&s.t. x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0,\ x_1-x_2+x_3=1,
\end{aligned}
$$

其中 λ 的变化从 0.1 到 100，步长取为 0.1，共进行了 1000 个二次规划问题的求解. 由于此题 H 为正定矩阵，故用 Wolfe 方法时，采用的是短形式. 因为变量 U 无符号限

表 1　用 Wolfe 方法第 k 步迭代基变量取值结果

相 1	k	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u_1	u_2	w_1	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	$\sum_{i=1}^{1} w_i$
	0									1		0	2	1			1
	1	1										0	2	2			0
相 2	k	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u_1	u_2	z_1	z_2	z_3					$\sum_{i=1}^{3} z_i$
	0	1								0	2	2					4
	1	1							0		2	2					4
	2			1					0		1	1					2
	3		0	1							1	1					2
	4		1 /2	3 /2				1 /2				3 /2					3 /2
	5		1 /2	3 /2	3 /2			1 /2									0

制，将 U 表示为 $U=U_1-U_2$，$U_1\geqslant 0$，$U_2\geqslant 0$. 计算结果是，3 次($\lambda=0.1-0.3$)迭代 4 步得到最优解，997 次($\lambda=0.4-100$)迭代 6 步得到最优解，且相 1 均为 1 步完成. 由于此题 $C=[1,\ 0,\ -2]^T$，属于本方法“2.2 一般情形”，故化为(7)的形式求解. 结果是，3 次($\lambda=0.1-0.3$)迭代 4 步得到最优解，997 次($\lambda=0.4-100$)迭代 3 步得到最优解. 限于篇幅，我们仅给出 $\lambda=1$ 时 Wolfe 方法每步迭代结果(表 1)和用本方法每步迭代结果(表 2). 由此看到，本文引入的变量个数，迭代次数明显少于 Wolfe 方法，且仅需 1 相完成.

表 2　用本方法第 k 步迭代基变量取值结果

k	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u_1	u_2	z_1	z_2	z_3	w_1	$\sum_{i=1}^{1} w_i+\sum_{j=1}^{3} z_j$
0				1						0	2	1	3
1			1	1						0	1		1
2		0	1	1							1		1
3		1/2	3/2	3/2			1/2						0

3.2　与长形式的比较

为了将本文提出的方法与 Wolfe 的长形式进行比较，计算了文献[1]中的例 4.3.1:

$$\min -x_1-2x_2+1/2x_1^2+1/2x_2^2,$$
$$s.t.\ 2x_1+3x_2+x_3=6,\ x_1+4x_2+x_4=5,$$
$$x_i\geqslant 0,\ i=1,\ \cdots,\ 4.$$

由于此题 $C=[-1,\ -2,\ 0,\ 0]^T$，属于“2.2 一般情形”，故化为(7)的形式求解. 表 3 仅列出了曾入基的变量，在迭代过程中始终未入基的变量 v_1，v_2，v_3，u_2^1，u_2^2 未列入表内.

表 3　用本方法第 k 步迭代基变量取值结果

k	x_1	x_2	x_3	v_4	u_1^1	u_1^2	w_1	w_2	z_1	z_2	z_3	z_4	$\sum_{i=1}^{4} z_i+\sum_{j=1}^{2} w_j$
0							6	5	1	2	0	0	14
1					0		6	5	1	2		0	14
2					0	0	6	5	1	2			14
3		5/4			0	0	9/4		1	3/4			4
4		5/4		3/16	0	3/16	9/4		13/16				49/16
5	13/17	18/17		4/17	0	4/17	22/17						22/17
6	13/17	18/17	22/17	4/17	0	4/17							0

从表 3 看到，迭代 6 次后目标值消失为 0，得到最优解 $X^*=[13/17,\ 18/17,\ 22/17,\ 0]^T$. 此与文献[1]用 Wolfe 方法计算的结果完全相同(为了比较，表 3 中基变量取值均写成分数形式). 但本方法已将 3 相算法减为 1 相；迭代 9 次减为 6 次；引入的 11 个人工变量 W，Z^1，Z^2，μ 减为 6 个 Z，W. 为程序实现带来极大方便.

4. 应 用 实 例

资产组合优化选择涉及到不同收益水平和不同风险水平的资产之间的权衡，是一个典型的二次规划问题．设一个金融机构可以选择的资产有 n 种，每一种资产的收益率为一随机变量 ξ_i，$i=1, 2, \cdots, n$．资产 i 的预期收益率由其均值 E_i 表示；风险水平由标准差 σ_i 来度量，它表示实际收益率对预期收益率的平均偏离．记第 i 种资产的持有比重为 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，则其组合资产总的预期收益率与总的标准差为

$$E_P=\sum_{i=1}^{n} x_i E_i, \quad \sigma_P=\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \rho_{ij} \sigma_j x_j\right]^{1/2}, \tag{9}$$

其中 ρ_{ij} 为相关系数矩阵．

金融机构是以盈利为目的的机构投资者，当然希望持有一个资产组合，它具有尽可能大的 E_P 和尽可能小的 σ_P．于是，金融资产优化选择问题可以归结为给定 $\overline{E}_P$，求满足条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$ 的变量 x_i，使得 σ_P 趋于最小：

$$\min \sigma_P^2=\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \rho_{ij} \sigma_j x_j, \tag{10}$$

$$s.t. \overline{E}_P=\sum_{i=1}^{n} x_i E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i=1, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1.$$

从而，金融资产投资比例的最优选择归结为求解带有约束条件的二次规划(10)．

应用本文设计的计算方法，我们用 C 语言编程，顺利地完成了上述问题的求解．从 $\min\{E_i\}$ 出发，到 $\max\{E_i\}$ 为止，给定步长，反复求解上述问题，可以获得一个最优解序列 $\{X^{(K)}\}$．再利用式(9)，便得到(σ_P, E_P)空间的一条双曲线，称之为资产组合的效率边界．效率边界的经济含义是，它是所有可行资产组合中最好的组合．在效率边界上方的资产组合虽然更好，但不可行；在效率边界下方的资产组合可行，但存在改善的余地．于是，金融机构可以根据自己的偏好和投资约束，将实际的资产组合调整到效率边界上，获得最优的投资组合[3]．

参 考 文 献

[1] 席少霖，赵凤治，最优化计算方法，上海：上海科技出版社，1983.

[2] Wolfe, P., The Simplex Method for Quadratic Programming, Econometrica, Vol. 27 (1959) pp. 382—398.

[3] 刘萍，凌晓东，金融资产组合优化管理系统，系统工程理论与实践，1994-6.