2005,**25A**(5):643－651

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

NA 样本密度函数估计一致渐近正态性的收敛速度*

[1] 李永明 [2] 杨善朝

([1] 上饶师范学院数学系 上饶 334001；[2] 广西师范大学数学系 桂林 541004)

摘要：在平稳 NA 样本下，讨论了未知密度函数估计的一致渐近正态性. 在适当的条件下给出了该密度函数估计一致渐近正态性的收敛速度. 这个速度几乎达到 $n^{-1/6}$.

关键词：NA 样本；一致渐近正态性；核估计。

MR(2000)主题分类：62G07；62G30　　**中图分类号：**O211.4；O212.7　　**文献标识码：**A

文章编号：1003-3998(2005)05-643-09

1 引言

设$\{X_n;\ n\geqslant 1\}$是实值平稳随机变量序列，具有未知概率密度函数 f，考虑密度核估计

$$f_n(x)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right), \tag{1.1}$$

其中 $K(\cdot)$是一已知的密度函数，窗宽参数 h_n 满足 $h_n\to 0$ ($n\to+\infty$).

Joag Dev 和 Proschan[1] 给出正负相协(PA，NA)变量的定义，并指出在实际中常见的 NA 变量有：服从置换分布的样本，对有限总体不放回抽样的样本，独立随机样本的次序统计量，服从具有负相关系数的多元正态分布的样本等. Roussas[2] 对正负相协变量的研究做了一个比较全面的论述，指出了相协变量在可靠性理论、概率过程、随机过程、多元统计、空间统计等领域中有广泛的应用，而且在大气、地质、海洋生物、经济等领域也有着十分重要的应用。近几年来国内外的学者对相协样本有关渐近正态性进行了一定的研究，如：Roussas[3] 研究了 NA 样本下随机场的分布函数的光滑估计的渐近正态性；Cai Z W 和 Roussas[4] 研究了相协样本下的分布函数的光滑估计的 Berry-Essen 界；Roussas[5] 得到了 NA 样本下的密度函数核估计的渐近正态性。但到目前为止，尚未见到有关 NA 样本密度函数估计一致渐近正态性的收敛速度的研究. 从而本文着手对 NA 样本密度函数核估计的一致渐近正态性的收敛速度问题进行了研究，得到较满意的收敛速度。

定义 1.1　称实值随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ ($n\geqslant 2$)是 NA 的，如果对于$\{1,2,\cdots,n\}$的任何两个不相交的非空子集 A_1 与 A_2，都有：$\mathrm{Cov}(f_1(X_i,i\in A_1),f_2(X_j,j\in A_2))\leqslant 0$. 其中 f_1 与 f_2 是任何两个使得协方差存在且对每个变元均非降(或对每个变元均非升)的函数。称

收稿日期：2003-10-21；修订日期：2004-09-09

E-mail：lym19@eyou.com

* 基金项目：国家自然科学基金(10161004)、江西省教育厅科研计划项目([2005]234)和上饶师范学院科技基金资助

随机变量序列$\{X_j, j\in N\}$是 NA 序列，若对于每个 $n(n\geqslant 1)$，变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是 NA 的。

2 假设条件、记号和主要结果

首先我们给出一些假设条件.

条件(A1)

(i) 设 $X_1, X_2, \cdots$, 是平稳随机变量序列，具有未知概率密度函数 $f(x)$；

(ii) 设 $X_1, X_2, \cdots$, 是 NA 序列；

(iii) 设 $X_1, X_2, \cdots$, 具有有限二阶矩，即 $EX_i^2<+\infty$ 且 $u(1)<+\infty$，其中 $u(n)=:\sum\limits_{j=n}^{+\infty}|\mathrm{Cov}(X_1, X_{j+1})|$；

(iv) 设随机变量 X_1, X_{j+1} 的联合密度函数为 $f_{1,j}$，对任意的 $u,v,\in R$ 和 $j\geqslant 1$，有

$$|f_{1,j}(u,v)-f(u)f(v)|\leqslant c.$$

条件(A2) 设 $K(\cdot)$ 是已知的密度核函数满足

(i) $K(u)\leqslant C$，$u\in R$；$\lim\limits_{|u|\to+\infty}(|u|K(u))=0$；

(ii) $K(u)$ 是绝对连续的函数，$\sup\limits_{u\in R}|K'(u)|\leqslant B$.

条件(A3) 设 $0<p=p_n<n$，$0<q=q_n<n$ 是均趋向 $+\infty(n\to\infty)$ 正整数列. 记 $k=[n/(p+q)]$，$0\leqslant k=k_n\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$，其中$[x]$为 x 的整数部分. 则 $k(p+q)\leqslant n$，$k(p+q)/n\xrightarrow{n\to+\infty}1$. 并且 p_n，q_n，k_n 还满足下列条件

(i) $p_nk_n/n\xrightarrow{n\to+\infty}1$，$p_nh_n\xrightarrow{n\to+\infty}0$，$u(q_n)/h_n^3\to 0$；

(ii) $\Psi_{1n}=:qp^{-1}+q^2p^{-1}h_n\to 0$，$\Psi_{2n}=:\dfrac{p}{n}\to 0$，$\Psi_{3n}=:np^{\varepsilon}h_n^{(\theta-1)/(\theta+1)}\left(\dfrac{1}{nh_n}\right)^{\frac{3\theta-1}{2(\theta+1)}}\to 0$，

其中 $\theta>1$，ε 为任意小的正数.

其次给出一些记号

$$K_{nj}(x)=K\left(\frac{x-X_j}{h_n}\right),\quad \sigma_n^2=\mathrm{Var}[f_n(x)],\quad Z_{nj}=\frac{1}{nh\sigma_n}(K_{nj}-EK_{nj}). \tag{2.1}$$

$$f_n(x)=\frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n}K_{nj}(x),\quad S_n=\frac{f_n(x)-Ef_n(x)}{\sigma_n}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(K_{nj}-EK_{nj})}{nh\sigma_n}=\sum_{j=1}^{n}Z_{nj}. \tag{2.2}$$

利用大(p-)、小(q-)块分割原理，S_n可分解为

$$S_n=S_n'+S_n''+S_n''', \tag{2.3}$$

其中

$$S_n'=\sum_{m=1}^{k}y_{nm},\quad S_n''=\sum_{m=1}^{k}y'_{nm},\quad S_n'''=y'_{nk+1},$$

$$y_{nm}=\sum_{j=k_m}^{k_m+p-1}Z_{nj},\quad y_{nm}'=\sum_{j=l_m}^{l_m+q-1}Z_{nj},\quad y'_{nk+1}=\sum_{j=k(p+q)+1}^{n}Z_{nj},$$

$$k_m=(m-1)(p+q)+1,\ l_m=(m-1)(p+q)+p+1,\quad m=1,\cdots,k. \tag{2.4}$$

最后给出本文的主要结果。

令 $F_n(u)=P(S_n<u)$, $\Phi(u)$是标准正态分布 $N(0,1)$分布函数，则有

定理 2.1 若条件(A_1)－(A_3)满足. 如果 $u(n)\leqslant Cn^{-\theta}(\theta>1)$，则

$$\sup_u|F_n(u)-\Phi(u)|\leqslant C\left\{\Psi_{1n}^{1/3}+\Psi_{2n}^{1/3}+\Psi_{3n}+\left(\frac{u(q)}{h_n^3}\right)^{1/3}\right\}.$$

注 2.1 在定理 2.1 中,为达到该收敛速度,条件 $u(n)\leqslant Cn^{-\theta}(\theta>1)$是必要的. 设

$$\tilde{u}(n)=:\sum_{j=n}^{+\infty}|\mathrm{Cov}(X_1,X_{j+1})|^{1/3},$$

易得 $u(n)\leqslant C\tilde{u}(n)$. 当 $\tilde{u}(n)=O(n^{-\alpha})$ $(\alpha>0)$, $\tilde{u}(n)=O(n^{-\alpha})$ $(\alpha>1)$, $\tilde{u}(n)=O(\mathrm{e}^{-\beta n})$ $(\beta>0)$，分别得到文献 Cai 和 Roussas[4] 中的推论 2.3，推论 2.4 和推论 2.5.

推论 2.1 若条件(A_1) 和 (A_2)成立，$u(n)\leqslant Cn^{-\theta}(\theta>1)$, $h_n=Cn^{-\tau}(0<\tau\leqslant1)$. 当 θ, τ 满足 $\max\{\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{2\theta},\ \frac{3\tau-1}{2}+\frac{6}{\theta+1},\ \frac{1+\theta+3\tau}{2\theta+1}\}<\tau$, ρ 满足 $\max\{\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{2\theta},\ \frac{3\tau-1}{2}+\frac{6}{\theta+1},\ \frac{1+\theta+3\tau}{2\theta+1}\}<\rho<\tau$，则

$$\sup_u|F_n(u)-\Phi(u)|=O(n^{-(1-\rho)/3}).$$

注 2.2 在推论 2.1 中，取 $\theta=36$, $\rho=\frac{2}{3}$, $\tau=\frac{2}{3}+\epsilon$，而 $0<\epsilon<\frac{1}{9\times37}$. 容易验证 $\max\{\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{2\theta},\ \frac{3\tau-1}{2}+\frac{6}{\theta+1},\ \frac{1+\theta+3\tau}{2\theta+1}\}<\rho<\tau$. 从而

$$\sup_u|F_n(u)-\Phi(u)|=O(n^{-1/9}).$$

注 2.3 在推论 2.1 中，如果 θ 充分大，$\tau\leqslant\frac{2}{3}$，只要 τ,ρ 满足$\frac{1}{2}<\rho<\tau\leqslant\frac{2}{3}$. 则当 $\rho\approx\frac{1}{2}$有

$$\sup_u|F_n(u)-\Phi(u)|\approx O(n^{-1/6}).$$

注 2.4 文中得到的 NA 下的收敛速度 $n^{-1/6}$,比独立同分布下的收敛速度 $n^{-1/2}$慢，这主要是 NA 样本的协方差较难处理造成的.

3 主要引理

下面给出在证明过程中要用到的一些引理和结果,它们分别为

引理 3.1 设$\{X_j:1\leqslant j\leqslant n\}$是 NA 随机变量列,$M$ 和 J 是$\{1,2,\cdots,n\}$的两个互不相交的子集，$g: R^{\#M}\to R$ 和 $h: R^{\#J}\to R$ 是具有有界偏导的函数. 则

$$|\mathrm{Cov}(g(X_i:i\in M),h(X_j:j\in J))|\leqslant\sum_{i\in M}\sum_{i\in J}\left\|\frac{\partial f}{\partial t_i}\right\|_\infty\left\|\frac{\partial g}{\partial t_j}\right\|_\infty|\mathrm{Cov}(X_i,X_j)|.$$

引理 3.2 设 $2<p<r<+\infty$, f 是绝对连续的函数,满足 $\sup_{x\in R}|f'(x)|\leqslant B$. $\{X_n,n\geqslant1\}$是 NA 随机变量列,有 $Ef(x_n)=0$ 和 $\|f(X_n)\|_r:=(Ef|x_n|^r)^{1/r}<+\infty$. 令

$$u(n)=\sup_{i\geqslant1}\sum_{j:|j-i|\geqslant n}|\mathrm{Cov}(X_j,X_i)|<+\infty,\quad n\geqslant0.$$

若 $u(n)\leqslant Cn^{-\theta}$，其中 $C>0$ 和 $\theta>0$. 则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $K=K(\varepsilon,r,p,\theta)<+\infty$，有

$$E\left|\sum_{i=1}^{n}f(X_i)\right|^p\leqslant K\{n^{1+\varepsilon}\max_{i\leqslant n}E\left|f(X_i)\right|^p+(n\max_{i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\left|\operatorname{Cov}(f(X_i),f(X_j))\right|^{p/2})$$
$$+n^{1+\varepsilon}\max_{i\leqslant n}\|f(X_i)\|_r^{r(p-2)/(r-2)}(B^2C)^{(r-p)/(r-2)}\}.$$

这里 $\theta\geqslant(r-1)(p-2)/(r-p)$.

引理 3.3 设条件(A_1)$-$(A_3)成立，则有

$$nh_n\sigma_n{}^2\rightarrow f(x)\int_R K^2(u)\mathrm{d}u=:\sigma^2,\quad \frac{1}{h_n}\operatorname{Var}\left(K(\frac{x-X_j}{h_n})\right)\rightarrow\sigma^2.$$

注 3.1 由引理 3.3 得 $nh_n\sigma_n{}^2\leqslant C$.

下面的引理是[7]的 Esseen 定理.

引理 3.4 令 $F(u)$和 $G(u)$是分布函数，$f(t)$和$\widetilde{f}(t)$特征函数分别为 $F(u)$和 $G(u)$. 当 $b>1/2$ 和任意的 $T>0$ 有

$$\sup_u\left|F(u)-G(u)\right|\leqslant b\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-\widetilde{f}(t)}{t}\right|\mathrm{d}t+bT\sup_u\int_{|y|\leqslant c(b)/T}\left|G(u+y)-G(u)\right|,$$

其中 $c(b)$是仅仅与 b 有关的正常数.

4 辅助结果

引理 4.1 设条件(A_1)$-$(A_3)成立，则

$$E(S_n'')^2\leqslant C\Psi_{1n},\quad E(S_n''')^2\leqslant C\Psi_{2n}.\tag{4.1}$$

证 根据上面的记号得

$$E(S''_n)^2\leqslant\sum_{m=1}^{k}\sum_{j=l_m}^{l_m+q-1}\operatorname{Var}(Z_{nj})+2\sum_{m=1}^{k}\sum_{l_m\leqslant i<j\leqslant l_m+q-1}\left|\operatorname{Cov}(Z_{ni},Z_{nj})\right|$$
$$+2\sum_{1\leqslant m_1<m_2\leqslant k}\left|\operatorname{Cov}(y'_{nm_1},y'_{nm_2})\right|=:J_1+J_2+J_3.$$

首先由引理 3.3 得

$$\operatorname{Var}(Z_{nj})\leqslant\frac{1}{(nh_n\sigma_n)^2}\operatorname{Var}(K(\frac{x-X_j}{h_n}))\leqslant\frac{C}{(n\sigma_n)^2h_n}\leqslant Cn^{-1},$$

因此

$$J_1\leqslant C\frac{kq}{n}\leqslant Cqp^{-1}.$$

再由条件 A1(iv)得

$$\left|\operatorname{Cov}(K_{ni},K_{nj})\right|=h_n^2\left|\int_{R^2}K(u)K(v)[f_{1,j}(x-h_nu),x-h_n(v)\right.$$
$$\left.-f(x-h_nu)f(x-h_nv)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right|\leqslant Ch_n^2.$$

根据 3.1，条件 A2(ii)及平稳性得

$$J_2\leqslant\frac{2}{(nh_n\sigma_n)^2}\sum_{m=1}^{k}\sum_{l_m\leqslant i<j\leqslant l_m+q-1}\left|\operatorname{Cov}(K_{ni},K_{nj})\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{(nh_n\sigma_n)^2}\sum_{m=1}^{k}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant q}|\operatorname{Cov}(K_{ni},K_{nj})|\leqslant C\frac{q^2kh_n}{n}\leqslant Cq^2p^{-1}h_n.$$

最后利用 Roussas[5] 中引理 3.2 的证明方法知

$$|\operatorname{Cov}(y'_{n1},\ y'_{n,l+1})|\leqslant \frac{qB^2}{n^2h_n^4\sigma_n^2}\sum_{r=l(p+q)-(q-1)}^{l(p+q)+(q-1)}|\operatorname{Cov}(X_i,X_{r+1})|,$$

因此

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|\operatorname{Cov}(y'_{ni},y'_{n,l+1})| = \sum_{l=1}^{k-1}(k-l)|\operatorname{Cov}(y'_{n1},\ y'_{n,l+1})|\leqslant k\sum_{l=1}^{k-1}|\operatorname{Cov}(y'_{n1},\ y'_{n,l+1})|$$

$$\leqslant \frac{qB^2}{n^2h_n^4\sigma_n^2}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{r=l(p+q)-(q-1)}^{l(p+q)+(q-1)}|\operatorname{Cov}(X_i,X_{r+1})|\leqslant C\frac{qp^{-1}}{h_n^3}u(p).$$

由 $\Psi_{1n}\to 0$ 及 $q\leqslant p$. 根据 $u(q)/h_n^3\to 0$ 得 $u(p)/h_n^3\to 0$. 从而

$$E(S''_n)^2\leqslant C\{qp^{-1}+q^2p^{-1}h_n+\frac{qp^{-1}}{h_n^3}u(p)\}\leqslant C\{qp^{-1}+q^2p^{-1}h_n\}=C\Psi_{1n}. \quad (4.2)$$

再由平稳性得

$$E(S'''_n)^2\leqslant \frac{n-k(p+q)}{(nh_n\sigma_n)^2}\operatorname{Var}(K_{n1})+\frac{2}{(nh_n\sigma_n)^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}|\operatorname{Cov}(K_{ni},K_{nj})|$$

$$\leqslant C\{\frac{p}{n}+\frac{p^2h_n}{n}\}\leqslant C\frac{p}{n}=: C\Psi_{2n}. \quad (4.3)$$

从而引理得证. ▌

引理 4.2 令 $s_n{}^2\triangleq\sum_{m=1}^{k}\operatorname{Var}(y_{nm})$，若条件 (A1)，(A2)和(A3)成立，则

$$|s_n{}^2-1|\leqslant C\left\{\Psi_{1n}{}^{1/2}+\Psi_{2n}{}^{1/2}+\frac{1}{h_n^3}u(q)\right\}.$$

证 令 $\pi_n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}\operatorname{Cov}(y_{ni},y_{nj})$. 易得

$$s_n{}^2=E(S_n{}')^2-2\pi_n,\qquad E(S_n)^2=1. \quad (4.4)$$

首先，由于

$$E(S'_n)^2=E[S_n-(S''_n+S'''_n)]^2=1+E(S''_n+S'''_n)^2-2E[S_n(S''_n+S'''_n)]. \quad (4.5)$$

而由引理 4.1 得

$$E(S''_n+S'''_n)^2\leqslant 2[E(S''_n)^2+E(S'''_n)^2]\leqslant C(\Psi_{1n}+\Psi_{2n}), \quad (4.6)$$

$$E[S_n(S''_n+S'''_n)]\leqslant E^{1/2}(S_n^2)E^{1/2}(S''_n+S'''_n)^2\leqslant C(\Psi_{1n}^{1/2}+\Psi_{2n}^{1/2}). \quad (4.7)$$

从而由(4.5)－(4.7)式及条件(A3)得

$$|E(S'_n)^2-1|\leqslant C(\Psi_{1n}^{1/2}+\Psi_{2n}^{1/2}). \quad (4.8)$$

其次，类似于 Roussas[5] 中的引理 3.3 的计算得

$$|\pi_n|\leqslant B^2\frac{kp}{n^2h_n^4\sigma^2}\sum_{r=q}^{+\infty}|\operatorname{Cov}(X_1,X_{r+1})|\leqslant C\frac{1}{h_n^3}u(q). \quad (4.9)$$

最后，联合(4.4)，(4.8)和(4.9)式证得所要的结果. ▌

假设$\{\eta_{nm},m=1,\cdots,k\}$是独立随机变量且与 y_{nm} 同分布的 $m=1,\cdots,k$. 记 $M_n=\sum_{m=1}^{k}\eta_{nm}$，$B_n=\sum_{m=1}^{k}\operatorname{Var}(\eta_{nm})$. $H_n(u)$，$G_n(u)$ 和 $\tilde{G}_n(u)$ 分别是 $S_n{}'$，$M_n/\sqrt{B_n}$和 M_n 的分布函数. 显然

$$B_n = s_n^2, \quad \widetilde{G}_n(u) = G_n(u/s_n). \tag{4.10}$$

引理 4.3 在定理 2.1 的条件下有

$$\sup_u |G_n(u) - \Phi(u)| \leqslant C\Psi_{3n}. \tag{4.11}$$

证 由条件(A2)(i)和引理 3.3 知,对任意的 $r>2$ 有 $E|K_{n1}|^r \leqslant Ch_n$. 由引理 3.2, 对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $C_1=C_1(\varepsilon,r,\delta,\theta)<+\infty$, 使得

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{k} E|\eta_{nm}|^{2+\delta} &= \sum_{m=1}^{k} E|y_{nm}|^{2+\delta} = \sum_{m=1}^{k} |E| \sum_{i=k_m}^{k_m+p-1} |Z_{ni}|^{2+\delta} \\ &\leqslant C_1 \sum_{m=1}^{k} \{p^{1+\varepsilon} E|Z_{n1}|^{2+\delta} + (p \max_{k_m \leqslant i \leqslant k_m+p-1} \sum_{j=k_m}^{k_m+p-1} |\operatorname{Cov}(Z_{ni}, Z_{nj})|)^{(2+\delta)/2} \\ &\quad + p^{1+\varepsilon} \|Z_{n1}\|_r^{(r\delta)/(r-2)} (B^2 C)^{(r-(2+\delta))/(r-2)}\} \\ &\leqslant C \times k \left\{ p^{1+\varepsilon} h_n \left(\frac{1}{nh_n}\right)^{1+\delta/2} + \left(\frac{p^2 h_n}{n}\right)^{1+\delta/2} + p^{1+\varepsilon} \left(\frac{h_n}{(nh_n)^{r/2}}\right)^{\delta/(r-2)} \right\},\end{aligned}$$

这里 $\theta \geqslant \delta(r-1)/(r-(2+\delta))$. 取 $\delta=1$, $\theta=(r-1)/(r-3)$, 得 $r=\dfrac{3\theta-1}{\theta-1}$. 从而有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{k} E|\eta_{nm}|^3 &\leqslant Ck \left\{ p^{1+\varepsilon} h_n \left(\frac{1}{nh_n}\right)^{3/2} + \left(\frac{p^2 h_n^{\,2}}{nh_n}\right)^{3/2} + p^{1+\varepsilon} h_n^{(\theta-1)/(\theta+1)} \left(\frac{1}{nh_n}\right)^{\frac{3\theta-1}{2(\theta+1)}} \right\} \\ &\leqslant Cnp^{\varepsilon} h_n^{(\theta-1)/(\theta+1)} \left(\frac{1}{nh_n}\right)^{\frac{3\theta-1}{2(\theta+1)}} \\ &= C\Psi_{3n},\end{aligned}$$

由 $\dfrac{3\theta-1}{2(\theta+1)}<3/2$, $\dfrac{\theta-1}{\theta+1}<1$ 和 $ph_n \to 0$ 得知, 引理 4.2 意味着 $B_n = s_n \to 1$, 因此

$$\frac{1}{\sqrt{B_n^3}} \sum_{m=1}^{k} E|\eta_{nm}|^3 \leqslant C\Psi_{3n}.$$

再由 Berry-Esseen 定理,引理得证. ▌

引理 4.4 在定理 2.1 的条件下有

$$\sup_u |H_n(u) - \widetilde{G}_n(u)| \leqslant C\left\{\Psi_{3n} + \frac{u^{\frac{1}{3}}(q)}{h_n}\right\}. \tag{4.12}$$

证 记 $\psi(t)$ 和 $\varphi(t)$ 分别是 S_n' 和 H_n 的特征函数. 显然

$$\psi(t) = E(\exp\{itH_n\}) = \prod_{m=1}^{k} E\exp\{it\eta_{nm}\} = \prod_{m=1}^{k} E\exp\{ity_{nm}\}.$$

采用 Roussas[5] 中(4.5)式的证明方法得

$$\begin{aligned}|\psi(t) - \varphi(t)| &\leqslant 8B^2 \frac{t^2}{n^2 h_n^{\,4} \sigma_n^{\,2}} pk \sum_{j=(p+q)+1}^{(k-1)(p+q)+p} |\operatorname{Cov}(X_1, X_j)| \\ &\leqslant Ct^2 \frac{pk}{nh_n^3} u(q) \leqslant Ct^2 \frac{u(q)}{h_n^3}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

由引理 3.4(令 $b=1$), 对任意的 $T>0$ 有

$$\begin{aligned}\sup_u |H_n(u) - \widetilde{G}_n(u)| &\leqslant \int_{-T}^{T} \left|\frac{\psi(t)-\varphi(t)}{t}\right| + T\sup_u \int_{|y|\leqslant c/T} |\widetilde{G}_n(u+y) - \widetilde{G}_n(u)|\,\mathrm{d}y \\ &=: I_{1n} + I_{2n}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

由(4.13)式得

$$I_{1n} \leqslant C\frac{u(q)}{h_n^3}\int_{-T}^{T} |t| \, \mathrm{d}t \leqslant C\frac{u(q)}{h_n^3}T^2, \tag{4.15}$$

注意到 $\widetilde{G}_n(u)=G_n(u/s_n)$，由引理 4.3 得

$$\begin{aligned}
&\sup_u |\widetilde{G}_n(u+y)-\widetilde{G}_n(u)| \\
\leqslant &\sup_u |G_n((u+y)/s_n)-\Phi((u+y)/s_n)| \\
&+|\Phi((u+y)/s_n)-\Phi(u/s_n)|+|G_n(u/s_n)-\Phi(u/s_n)| \\
\leqslant &2\sup_u |G_n(u)-\Phi(u)|+|\Phi((u+y)/s_n)-\Phi(u/s_n)| \\
\leqslant &C\{\Psi_{3n}+|y|/s_n\} \leqslant C\{\Psi_{3n}+|y|\}.
\end{aligned}$$

故

$$I_{2n} \leqslant CT\int_{|y|\leqslant c/T}\{\Psi_{3n}+|y|\}\mathrm{d}y \leqslant C\{\Psi_{3n}+1/T\}. \tag{4.16}$$

结合(4.14)—(4.16)式，选取 $T=u^{-1/3}(q)h_n$ 得

$$\sup_u |H_n(u)-\widetilde{G}_n(u)| \leqslant C\{u(q)T^2/h_n^3+\Psi_{3n}+1/T\} \leqslant C\{\Psi_{3n}+\frac{u^{\frac{1}{3}}(q)}{h_n}\},$$

引理证毕. ▌

引理 4.5 设 $\{\xi_n: n\geqslant 1\}$ 和 $\{\eta_n: n\geqslant 1\}$ 是两列随机变量，$\gamma_n: n\geqslant 1$ 正常数序列，$\gamma_n\to 0 (n\to\infty)$. 若

$$\sup_u |F_{\xi_n}-\Phi(u)| \leqslant C\gamma_n, \tag{4.17}$$

则对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\sup_u |F_{\xi_n+\eta_n}(u)-\Phi(u)| \leqslant C\{\gamma_n+\varepsilon+P(|\eta_n|\geqslant\varepsilon)\}. \tag{4.18}$$

证 注意到

$$\{\xi_n+\eta_n<u\} = \{\xi_n+\eta_n<u, |\eta_n|<\varepsilon\} \cup \{\xi_n+\eta_n<u, |\eta_n|\geqslant\varepsilon\} =: A_1 \cup A_2.$$

由于

$$P(A_1) \leqslant P(\xi_n<u+\varepsilon, |\eta_n|<\varepsilon) \leqslant P(\xi_n<u+\varepsilon)$$

且

$$P(A_1) \geqslant P(\xi_n<u-\varepsilon, |\eta_n|<\varepsilon) \geqslant P(\xi_n<u-\varepsilon)-P(|\eta_n|\geqslant\varepsilon).$$

因此

$$P(\xi_n<u-\varepsilon)-P(|\eta_n|\geqslant\varepsilon)+P(A_2) \leqslant F_{\xi_n+\eta_n}(u) \leqslant P(\xi_n<u+\varepsilon)+P(A_2).$$

从而

$$\begin{aligned}
|F_{\xi_n+\eta_n}(u)-\Phi(u)| &\leqslant |F_{\xi_n}(u+\varepsilon)-\Phi(u)|+|F_{\xi_n}(u-\varepsilon)-\Phi(u)|+P(|\eta_n|\geqslant\varepsilon) \\
&=: J_{1n}(u)+J_{2n}(u)+P(|\eta_n|\geqslant\varepsilon)P(|\eta_n|\geqslant\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

由(4.17)式得

$$\begin{aligned}
\sup_u J_{1n}(u) &\leqslant \sup_u |F_{\xi_n}(u+\varepsilon)-\Phi(u+\varepsilon)|+\sup_u |F_{\xi_n}(u+\varepsilon)-\Phi(u)| \\
&\leqslant \sup_u |F_{\xi_n}(u)-\Phi(u)|+\sup_u |F_{\xi_n}(u+\varepsilon)-\Phi(u)| \\
&\leqslant C\{\gamma_n+\varepsilon\}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

同理可得

$$\sup_u J_{2n}(u) \leqslant C\{\gamma_n + \varepsilon\}. \tag{4.21}$$

由(4.19)—(4.21)式引理得证. ▌

5 主要结果的证明

定理 2.1 的证明 由于

$$\begin{aligned}&\sup_u |H_n(u)-\Phi(u)|\\ &\leqslant \sup_u |H_n(u)-\tilde{G}_n(u)|+\sup_u|\tilde{G}_n(u)-\Phi(u/\sqrt{B_n})|+\sup_u|\Phi(u/\sqrt{B_n})-\Phi(u)|\\ &=: J_{1n}+J_{2n}+J_{3n}.\end{aligned} \tag{5.1}$$

利用引理 4.2,引理 4.3,引理 4.4 得

$$J_{1n} \leqslant C\{\Psi_{3n}+\frac{u^{\frac{1}{3}}(q)}{h_n}\}, \tag{5.2}$$

$$J_{2n} = \sup_u |G_n(u/\sqrt{B_n})-\Phi(u/\sqrt{B_n})| = \sup_u |G_n(u)-\Phi(u)| \leqslant C\Psi_{3n}$$

和

$$J_{3n} \leqslant C|s_n{}^2-1| \leqslant C(\Psi_{1n}^{1/2}+\Psi_{2n}^{1/2}+\frac{1}{h_n^3}u(q)). \tag{5.3}$$

联合(5.1)—(5.3)式和引理 4.2 得

$$\sup_u |H_n(u)-\Phi(u)| \leqslant C\{\Psi_{3n}+\frac{u^{\frac{1}{3}}(q)}{h_n}+\Psi_{1n}^{1/2}+\Psi_{2n}^{1/2}+\frac{1}{h_n^3}u(q)\}. \tag{5.4}$$

由引理 4.5 得

$$\begin{aligned}&\sup_u |F_n(u)-\Phi(u)|\\ &=\sup_u |F_{S_n'+(S_n''+S_n''')}(u)-\Phi(u)|\\ &\leqslant C\{\sup_u |H_n(u)-\Phi(u)|+\mu+P(|(S_n''+S_n''')|\geqslant\mu)\}\\ &\leqslant C\{\Psi_{3n}+\frac{u^{\frac{1}{3}}(q)}{h_n}+\Psi_{1n}^{1/2}+\Psi_{2n}^{1/2}+\frac{1}{h_n^3}u(q)+\mu+P(|(S_n''+S_n''')|\geqslant\mu)\}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

令 $\mu=(\Psi_{1n}+\Psi_{2n})^{1/3}$，由马尔可夫不等式和引理 4.1 得

$$\begin{aligned}P(|S_n''+S_n'''|\geqslant\mu) &\leqslant P(|S_n''|\geqslant\frac{1}{2}\mu)+P(|S_n'''|\geqslant\frac{1}{2}\mu)\leqslant\frac{E(S_n'')^2}{(\frac{1}{2}\mu)^2}+\frac{E(S_n''')^2}{(\frac{1}{2}\mu)^2}\\ &\leqslant C(\Psi_{1n}+\Psi_{2n})^{1/3}\leqslant C\Psi_{1n}^{1/3}+\Psi_{2n}^{1/3}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

把(5.6)式代入(5.5)式得

$$\begin{aligned}\sup_u |F_n(u)-\Phi(u)| &\leqslant C\{\Psi_{3n}+\frac{u^{\frac{1}{3}}(q)}{h_n}+\Psi_{1n}^{1/2}+\Psi_{2n}^{1/2}+\frac{1}{h_n^3}u(q)+\Psi_{1n}^{1/3}+\Psi_{2n}^{1/3}\}\\ &\leqslant C\left\{\Psi_{1n}^{1/3}+\Psi_{2n}^{1/3}+\Psi_{3n}+\left(\frac{u(q)}{h_n^3}\right)^{1/3}\right\}.\end{aligned}$$

从而定理 2.1 证毕. ▌

推论 2.1 的证明 取 $p=[n^\rho]$, $q=[n^{2\rho-1}]$,则

$$p_nk_n/n \sim n^{\rho+1-\rho-1}=1,\quad p_nh_n \leqslant Cn^{\rho-\tau} \to 0;$$

$$u(q_n)/h_n^3 \leqslant Cq^{-\theta} n^{3\tau} \leqslant Cn^{-(2\rho-1)\theta+3\tau} \to 0;$$

$$\Psi_{1n}^{1/3} \leqslant C(n^{\rho-1} + n^{3\rho-2-\tau})^{1/3}; \quad \Psi_{2n}^{1/3} \leqslant Cn^{-(1-\rho)/3};$$

$$\Psi_{3n} \leqslant Cn^{1+\varepsilon\rho-\tau(\theta-1)/(\theta+1)} \cdot n^{-(1-\tau)(3\theta-1)/2(\theta+1)} = Cn^{-(1/2-\varepsilon\rho-\tau/2-2/(\theta+1))}.$$

由 $\dfrac{3\tau-1}{2}+\dfrac{6}{\theta+1}<\rho$，得知对充分小的 ε 有 $(1-\rho)/3<1/2-\varepsilon\rho-\tau/2-2/(\theta+1)$. 注意到 $0<\tau\leqslant 1$，则 $\tau\leqslant(\tau+1)/2$. 由 $\rho<\tau\leqslant(\tau+1)/2$，得 $1-\rho\leqslant 2+\tau-3\rho$. 又由 $\rho>\dfrac{1+\theta+3\tau}{2\theta+1}$ 得，$1-\rho<(2\rho-1)\theta-3\tau$. 从而

$$\Psi_{1n}^{1/3} \leqslant Cn^{-(1-\rho)/3}, \quad \Psi_{3n} \leqslant Cn^{-(1-\rho)/3}, \quad (u(q_n)/h_n^3)^{1/3} \leqslant Cn^{-(1-\rho)/3}.$$

故条件(A3)满足. 从而由定理 2.1 证得推论. ▌

参 考 文 献

[1] Joag Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with application. Ann Statist, 1983, **11**: 286－295

[2] Roussas G G. Positive and negative dependence with some statistical application. In: Ghosh S, ed. New York: Asymptotics, Nonparametrics and time Series, 1999. 757－788

[3] George G. Roussas, asymptotic normality of a smooth estimate of a random field distribution function under association. Statistics and Prob Lett, 1995, **24**: 77－90

[4] Cai Z, Roussas G G. Berry-Esseen bounds for smooth estimator of a function under association. J Nonparametric Statist, 1999, **10**: 79－106

[5] George G. Roussas, asymptotic normality of the kernel estimate of a probability density function under association. Statistics and Prob Lett, 2000, **50**: 1－12

[6] Yuan Ming, Su Chun. Weak convergence for empirical processes of negatively associated sequences. Chinese J of Applied Prob and Stat, 2000, **16**(1): 45－56

[7] 林正炎。概率极限理论基础。北京：高等教育出版社，1999. 63

The Rate of Uniformly Asymptotic Normality for Probability Density Estimator under Negatively Associated Samples

[1]Li Yongming [2]Yang Shanchao

([1]*Department of Mathematics*, *Shangrao Normal College*, *Shangrao* 334001;

[2]*Department of Mathematics*, *Guangxi Normal University*, *Guilin* 541004)

Abstract: In this paper, the authors discuss the uniformly asymptotic normality for an unknown probability density function estimator under stationary and negatively associated samples. Under suitable conditions, the authors give the rate of the uniformly asymptotic normality that can get near $n^{-1/6}$.

Key words: Negatively associated samples; Uniformly asymptotic normality; Kernel estimator.

MR(2000) Subject Classification: 62G07; 62G30