2004,**24A**(1):16－25

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

Q 过程的 μ-不变测度——含吸收态情形*

吴群英

(桂林工学院数理系　桂林 541004)

摘要:设 $Q=\{q_{ij};i,j\in E\}$ 是可数集 E 上的全稳定 Q-矩阵,其中 $E=C\cup\{0\}$,C 为不可约集,$\{0\}$ 为吸收态,$m=\{m_j;j\in C\}$ 是 Q 的有限 μ-不变测度,当 Q 非保守和保守时,该文分别给出存在 Q 过程 $P(t)$,使 m 是 $P(t)$ 的 μ-不变测度的充分必要条件,并具体构造出 Q-过程 $P(t)$.

关键词:Q-过程;μ-次不变测度;μ-不变测度;吸收态.

MR(2000)主题分类:60J27;60J99　　**中图分类号:**O211.62　　**文献标识码:**A

文章编号:1003-3998(2004)01-016-10

1　引言

设 E 是可数集,如实数集 $Q=\{q_{ij};i,j\in E\}$ 满足

$$0\leqslant q_{ij}<\infty,\quad i\neq j,i,j\in E,$$

$$\sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant -q_{ii}\triangleq q_i<\infty,\quad i\in E,$$

则称 Q 是全稳定 Q-矩阵. 进一步,如

$$\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i,\quad i\in E,$$

则称 Q 是保守的.

称定义在 $[0,\infty)$ 上的实值函数 $P(t)=\{p_{ij}(t);i,j\in E\}$ 为标准转移函数(或过程),如果

$$\begin{aligned}&p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad i,j\in E,t\geqslant 0,\\&\sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1,\ i\in E,t\geqslant 0,\\&p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t),\ i,j\in E,s,t\geqslant 0,\\&\lim_{t\downarrow 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij},\quad i,j\in E.\end{aligned}\tag{1.1}$$

$P(t)$ 称为诚实的,如果对任意 $i\in E,t\geqslant 0$,(1.1)式等号成立;如 $p'_{ij}(0)=q_{ij},i,j\in E$,则称 $P(t)$ 是 Q-过程,任给一个全稳定 Q-矩阵,Q-过程一定存在,例如 Feller 最小 Q-过程,但不一定唯一,[1]给出了唯一性准则. 对每一个 Q-过程,向前、向后不等式成立,即

$$p'_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj},\ i,j\in E,t\geqslant 0,\tag{1.2}$$

$$p'_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t),\ i,j\in E,t\geqslant 0,\tag{1.3}$$

收稿日期:2001-09-12;修订日期:2002-08-29

* 基金项目:国家自然科学基金(19871006)及广西自然科学基金资助

如(1.2)或(1.3)以等号成立，则称 $P(t)$ 是 F 型或 B 型的. 由 Feller[2]和 Reuter[3]知，如 Q 是保守的，则任何 Q-过程都是 B 型的.

设 $P(t)$ 是任一给定的 Q-过程，定义

$$\psi_{ij}(\lambda)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}p_{ij}(t)\mathrm{d}t,\quad i,j\in E,\lambda>0,$$

则称 $\Psi(\lambda)=\{\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E,\lambda>0\}$ 为 $P(t)$ 的预解式，$\Psi(\lambda)$ 满足

$$\psi_{ij}(\lambda)\geqslant 0,\quad i,j\in E,\lambda>0,\tag{1.4}$$

$$\sum_{j\in E}\lambda\psi_{ij}(\lambda)\leqslant 1,\quad i\in E,\lambda>0,\tag{1.5}$$

$$\psi_{ij}(\lambda)-\psi_{ij}(\beta)+(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)\psi_{kj}(\beta)=0,\quad i,j\in E,\quad \lambda,\beta>0,\tag{1.6}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\psi_{ij}(\lambda)=\delta_{ij},\quad i,j\in E.\tag{1.7}$$

反过来，任一满足(1.4)－(1.7)的 $\Psi(\lambda)$ 必为某一标准转移函数的预解式(参见文[3－5])，这样，预解式和标准转移函数之间是一一对应的. 进一步，(1.5)等号成立当且仅当 $P(t)$ 是诚实的. 此时，也称预解式是诚实的. 相应于 $P(t)$ 的 Q-矩阵 $Q=\{q_{ij};i,j\in E\}$，有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda)-I)=Q,$$

称满足上式的预解式为 Q-预解式. 同样，Q-过程和 Q-预解式之间也是一一对应的. 如 $\Psi(\lambda)$ 满足

$$(\lambda I-Q)\Psi(\lambda)=I(\text{或 }\Psi(\lambda)(\lambda I-Q)=I),$$

则称 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型(或 F 型)预解式，B 型(或 F 型)预解式与 B 型(或 F 型)Q-过程一一对应. 最小 Q-预解式 $\Phi(\lambda)=\{\phi_{ij}(\lambda);i,j\in E,\lambda>0\}$ 一定是 B 型和 F 型预解式.

设 $Q=\{q_{ij};i,j\in E\}$ 是可数集 E 上的全稳定 Q-矩阵，$P(t)=\{p_{ij}(t);i,j\in E,t\geqslant 0\}$ 是 Q-过程，$\Psi(\lambda)=\{\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E,\lambda>0\}$ 是对应的 Q-预解式. 如存在 $\mu\geqslant 0$，正数集 $m=\{m_i;i\in E\}$ 使

$$\sum_{i\in E}m_iq_{ij}\leqslant -\mu m_j,\quad \forall j\in E,\tag{1.8}$$

则称 m 是 Q 的 μ-次不变测度，如上式对 $\forall j\in E$ 等号恒成立，则称 m 是 Q 的 μ-不变测度. 如

$$\sum_{i\in E}m_ip_{ij}(t)\leqslant \mathrm{e}^{-\mu t}m_j,\quad \forall j\in E\text{ 等价于}\sum_{i\in E}m_i(\lambda+\mu)\psi_{ij}(\lambda)\leqslant m_j,\quad \forall j\in E.\tag{1.9}$$

则称 m 是 $P(t)$(或 $\Psi(\lambda)$)的 μ-次不变测度，如上式对任何 $j\in E$ 等号恒成立，则称 m 是 $P(t)$(或 $\Psi(\lambda)$)的 μ-不变测度.

设 $F(t)=\{f_{ij}(t);i,j\in E,t\geqslant 0\}$ 及 $\Phi(\lambda)=\{\phi_{ij}(\lambda);i,j\in E,\lambda>0\}$ 分别是最小 Q-过程和最小 Q-预解式，有关以上概念，有如下结果(参见文[6－8]).

命题 设 $\mu\geqslant 0$，$\{m_i;i\in E\}$ 是正数集，则

(1) $\{m_i;i\in E\}$ 是 Q 的 μ-次不变测度的充分必要条件是 $\{m_i;i\in E\}$ 是 $F(t)$(等价于 $\Phi(\lambda)$)的 μ-次不变测度.

(2) $\{m_i;i\in E\}$ 是 $F(t)$(等价于 $\Phi(\lambda)$)的 μ-不变测度，等价于 $\{m_i;i\in E\}$ 是 Q 的 μ-不变测度，且方程

$$\sum_{i\in E}y_iq_{ij}\leqslant -\nu y_j,\quad 0\leqslant y_j\leqslant m_j,\quad j\in E,\tag{1.10}$$

对 $\nu<\mu$ 只有零解.

如 $\{m_i;i\in E\}$ 是 Q 的 μ-(次)不变测度，但(1.10)不成立，则 $\{m_i;i\in E\}$ 不是 $F(t)$ 的 μ-不

变测度,此时,人们自然会问是否存在别的 Q-过程 $P(t)$,使$\{m_i;i\in E\}$是 $P(t)$的 μ-不变测度. 当 $\mu=0$,Q 保守,且单流出时,文[9]解决了上问题,文[10]取消了 Q 单流出的限制,解决了上问题.

本文讨论 E 含吸收态的情形,下恒设 $E=C\cup\{0\}$,C 为不可约集,$\{0\}$为吸收态,即 $q_0=0$,且存在 $i\in C$,使 $q_{i0}>0$,由于当 $j=0$ 时,(1.8)成为 $0<\sum\limits_{i\in E}m_iq_{i0}\leqslant-\mu m_0\leqslant 0$,这是不可能的,因此,对有吸收态的 Q-矩阵,对吸收态不能象(1.8)那样定义 Q 的 μ-次不变测度,而只能在 C 上定义,为此,引入如下定义

定义 设 $E=C\cup\{0\}$,C 为不可约集,$\{0\}$为吸收态,如存在 $\mu\geqslant0$,正数集 $m=\{m_i;i\in C\}$使 $\sum\limits_{i\in C}m_iq_{ij}\leqslant-\mu m_j,\quad\forall j\in C$,则称 m 是Q(在 C 上)的 μ-次不变测度,如上式对$\forall j\in C$ 等号恒成立,则称 m 是Q(在 C 上)的 μ-不变测度. 如

$$\sum_{i\in C}m_ip_{ij}(t)\leqslant \mathrm{e}^{-\mu t}m_j,\quad \forall j\in C \text{ 等价于} \sum_{i\in C}m_i(\lambda+\mu)\psi_{ij}(\lambda)\leqslant m_j,\quad \forall j\in C,$$

则称 m 是 $P(t)$(在 C 上)的 μ-次不变测度,如上式对任何 $j\in C$ 等号恒成立,则称 m 是 $P(t)$(或 $\Psi(\lambda)$)(在 C 上)的 μ-不变测度. 如 $\sum\limits_{i\in C}m_i<\infty$,则称 m 是有限的.

文[11]获得当 F 诚实(因此,Q 保守、零流出、Q-过程唯一),$\mu>0$,则 Q 的有限 μ-次不变测度 m 是 F 的 μ-不变测度当且仅当 $\sum\limits_{i\in C}m_iq_{i0}=\mu\sum\limits_{i\in C}m_i$.

对几乎感兴趣的问题,特别是在应用中,我们所知道的不是转移函数 $P(t)$,而是 Q-矩阵,且在许多实际问题中,Q 都是非保守的,所以,无论是在理论上还是应用中,取消 Q 保守的限制,对一般情况下的 Q-矩阵,回答上问题都是非常有意义的. 本文对一般情况下的全稳定 Q 矩阵(含吸收态,Q 保守或非保守),$\mu>0$,m 是Q 的有限 μ-不变测度,本文分别给出存在 Q 过程 $P(t)$,使 m 是 $P(t)$的 μ-不变测度的充分必要条件,并具体构造出 Q-过程 $P(t)$.

2 定理及其证明

设 $E=C\cup\{0\}$,C 为不可约集,$\{0\}$为吸收态,即 $q_0=0$,且存在 $i\in C$,使 $q_{i0}>0$,我们有

定理 1 设 Q 全稳定,非保守,$\mu>0$,$m=\{m_i;i\in C\}$是 Q 的有限 μ-不变测度,则存在 Q-过程 $P(t)$,使 m 是 $P(t)$的 μ-不变测度的充分必要条件是

$$\sum_{i\in C}m_iq_{i0}\leqslant\mu\sum_{i\in C}m_i. \tag{2.1}$$

进一步,如 Q 保守,则可把条件减弱为 m 是关于 Q 的有限 μ-次不变测度,有下面定理

定理 2 设 Q 全稳定、保守,$\mu>0$,$m=\{m_i;i\in C\}$是关于 Q 的有限 μ-次不变测度,则

(1) 当 Q 零流出,则存在唯一的 Q-过程 $F(t)$,使 m 是 $F(t)$的 μ-不变测度的充分必要条件是(2.1)式以等号成立.

(2) 当 Q 非零流出,则存在 Q-过程 $P(t)$,使 m 是 $P(t)$的 μ-不变测度的充分必要条件是(2.1)式成立.

(3) 当 Q 非零流出,则存在诚实 Q-过程 $P(t)$,使 m 是 $P(t)$的 μ-不变测度的充分必要条件是(2.1)式成立.

(4) 当 Q 非零流出，如(2.1)式以不等号成立，则存在无穷多个 Q-过程 $P(t)$，使 m 是 $P(t)$ 的 μ-不变测度.

定理 1 的证明　充分性，设 $F(t)$ 是最小 Q-过程，因为 Q 非保守，所以 $F(t)$ 不诚实，记 $\Phi(\lambda)=\{\phi_{ij}(\lambda),i,j\in E,\lambda>0\}$ 为相应的最小 Q-预解式，记

$$Z_i(\lambda)=1-\sum_{j\in E}\lambda\phi_{ij}(\lambda),\quad i\in E,$$

$$\eta_j(\lambda)=m_j-\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{kj}(\lambda),\quad j\in C,$$

$$\eta_0(\lambda)=\frac{e}{\lambda}-\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{k0}(\lambda)$$

其中
$$e\triangleq\sum_{i\in C}m_iq_{i0},$$

作
$$\psi_{ij}(\lambda)=\phi_{ij}(\lambda)+Z_i(\lambda)\frac{\eta_j(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)},\quad i,j\in E.\tag{2.2}$$

因 0 是吸收态，所以 $\phi_{0j}(\lambda)=\delta_{0j}/\lambda$，由此得，$Z_0(\lambda)=0$，由(1.5)式，有 $Z_i(\lambda)\geqslant0$，且由于 $\Phi(\lambda)$ 不诚实，所以存在 $j\in C$，使 $Z_j(\lambda)>0$，所以 $\psi_{ij}(\lambda)$ 有意义，下证 $\Psi(\lambda)$ 即为所要求的 Q-过程 $P(t)$ 的预解式，为此，只需证明

(1) $\Psi(\lambda)$ 是某标准转移函数的预解式；

(2) $\Psi(\lambda)$ 是 Q-过程的预解式；

(3) m 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的 μ-不变测度.

先证(1)，由命题(1)及(1.9)式得，$\eta_j(\lambda)\geqslant0,j\in C$，又由 $\Phi(\lambda)$ 的向前方程，有

$$\begin{aligned}\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\lambda\phi_{k0}(\lambda)&=\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\sum_{j\in C}\phi_{kj}(\lambda)q_{j0}\\&=\sum_{j\in C}q_{j0}\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{kj}(\lambda)\leqslant\sum_{j\in C}m_jq_{j0}=e,\end{aligned}$$

由此得
$$\eta_0(\lambda)\geqslant0,$$

所以
$$\psi_{ij}(\lambda)\geqslant0,\quad i,j\in E.$$

又
$$\sum_{j\in C}\lambda\psi_{ij}(\lambda)=\sum_{j\in E}\lambda\phi_{ij}(\lambda)+Z_i(\lambda)\frac{\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)},\tag{2.3}$$

因为 $\sum_{i\in C}m_i<\infty$，且注意到(2.1)，即 $e\leqslant\mu\sum_{i\in C}m_i$，有

$$\begin{aligned}\lambda\sum_{j\in E}\eta_j(\lambda)&=\lambda\sum_{j\in C}\eta_j(\lambda)+\lambda\eta_0(\lambda)\\&=\lambda\sum_{j\in C}\Big(m_j-\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{kj}(\lambda)\Big)+e-\lambda\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{k0}(\lambda)\\&=\lambda\sum_{j\in C}m_j-\sum_{k\in C}m_k(\lambda+\mu)\sum_{j\in C}\lambda\phi_{kj}(\lambda)+e-\lambda\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{k0}(\lambda)\\&\leqslant(\lambda+\mu)\sum_{j\in C}m_j-\sum_{k\in C}m_k(\lambda+\mu)\sum_{j\in E}\lambda\phi_{kj}(\lambda)\\&=(\lambda+\mu)\sum_{j\in C}m_j-\sum_{k\in C}m_k(\lambda+\mu)(1-Z_k(\lambda))\\&=(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda),\end{aligned}\tag{2.4}$$

结合(2.3)式，得
$$\sum_{j\in E}\lambda\psi_{ij}(\lambda)\leqslant\sum_{j\in E}\lambda\phi_{ij}(\lambda)+Z_i(\lambda)=1,$$

又由(2.4)式得

$$\frac{\lambda Z_i(\lambda)\eta_j(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum\limits_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)}\leqslant\frac{Z_i(\lambda)\lambda\sum\limits_{j\in E}\eta_j(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum\limits_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)}\leqslant Z_i(\lambda)\to 0,\ \lambda\to\infty,$$

所以 $$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\psi_{ij}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\phi_{ij}(\lambda)+\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda Z_i(\lambda)\eta_j(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum\limits_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)}=\delta_{ij},\quad i,j\in E.$$

由 $\Phi(\lambda)$的预解方程得

$$\begin{aligned}(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda)Z_k(\beta)&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda)(1-\sum_{j\in E}\beta\phi_{kj}(\beta))\\&=(\lambda-\beta)(\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda)-\beta\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda)\phi_{kj}(\beta))\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda)-\beta\sum_{j\in E}(\phi_{ij}(\beta)-\phi_{ij}(\lambda))\\&=\lambda\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda)-\beta\sum_{j\in E}\phi_{ij}(\beta)=Z_i(\beta)-Z_i(\beta),\quad i\in E,\end{aligned}\tag{2.5}$$

当 $j\in C$，由于 $\phi_{0j}(\lambda)=0$，所以

$$\begin{aligned}(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}\eta_k(\lambda)\phi_{kj}(\beta)&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}\eta_k(\lambda)\phi_{kj}(\beta)\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}(m_k-\sum_{l\in C}(\lambda+\mu)m_l\phi_{lk}(\lambda))\phi_{kj}(\beta)\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}m_k\phi_{kj}(\beta)-(\lambda+\mu)\sum_{l\in C}m_l\sum_{k\in C}(\lambda-\beta)\phi_{lk}(\lambda)\phi_{kj}(\beta)\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}m_k\phi_{kj}(\beta)-(\lambda+\mu)\sum_{l\in C}m_l(\phi_{lj}(\beta)-\phi_{lj}(\lambda))\\&=-(\beta+\mu)\sum_{k\in C}m_k\phi_{kj}(\beta)+(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_k\phi_{kj}(\lambda)\\&=\eta_j(\beta)-\eta_j(\lambda),\quad j\in C,\end{aligned}\tag{2.6}$$

当 $j=0$ 时，由 $\phi_{00}(\beta)=1/\beta$ 得

$$\begin{aligned}&(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}\eta_k(\lambda)\phi_{k0}(\beta)=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}(m_k-\sum_{l\in C}(\lambda+\mu)m_l\phi_{lk}(\lambda))\phi_{k0}(\beta)\\&\quad+(\lambda-\beta)(\frac{e}{\lambda}-\sum_{l\in C}(\lambda+\mu)m_l\phi_{l0}(\lambda))\phi_{00}(\beta)\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}m_k\phi_{k0}(\beta)-(\lambda+\mu)\sum_{l\in C}m_l\sum_{k\in C}(\lambda-\beta)\phi_{lk}(\lambda)\phi_{k0}(\beta)\\&\quad+(\lambda-\beta)\frac{e}{\lambda\beta}-(\lambda-\beta)\sum_{l\in C}(\lambda+\mu)m_l\phi_{l0}(\lambda)\frac{1}{\beta}\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}m_k\phi_{k0}(\beta)-(\lambda+\mu)\sum_{l\in C}m_l[\phi_{l0}(\beta)-\phi_{l0}(\lambda)-(\lambda-\beta)\phi_{l0}(\lambda)\frac{1}{\beta}]\\&\quad+(\lambda-\beta)\frac{e}{\lambda\beta}-\frac{\lambda-\beta}{\beta}\sum_{l\in C}(\lambda+\mu)m_l\phi_{l0}(\lambda)\\&=-(\beta+\mu)\sum_{k\in C}m_k\phi_{k0}(\beta)+(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_k\phi_{k0}(\lambda)+e/\beta-e/\lambda\\&=\eta_0(\beta)-\eta_0(\lambda),\end{aligned}$$

故(2.6)式对 $j\in E$ 成立.

由(2.5)及 $Z_0(\lambda)=0$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{i\in C}m_iZ_i(\beta)-\sum_{i\in C}m_iZ_i(\lambda)&=(\lambda-\beta)\sum_{i\in C}m_i\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda)Z_k(\beta)\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}\sum_{i\in C}m_i\phi_{ik}(\lambda)Z_k(\beta)\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}\frac{m_k-\eta_k(\lambda)}{\lambda+\mu}Z_k(\beta),\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}&(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\beta)-(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}\eta_k(\lambda)Z_k(\beta)\\&=(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\beta)-(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda),\end{aligned}$$

记 $C_\lambda^{-1}=(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)$，由上式及 $Z_0(\lambda)=0$ 得

$$\begin{aligned}&(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}\eta_k(\lambda)Z_k(\beta)=(\lambda-\beta)\sum_{k\in C}\eta_k(\lambda)Z_k(\beta)\\&=-(\beta+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\beta)+(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)=c_\lambda^{-1}-c_\beta^{-1},\end{aligned}\tag{2.7}$$

由(2.5)－(2.7)式得

$$\begin{aligned}&(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)\psi_{kj}(\beta)\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}(\phi_{ik}(\lambda)+c_\lambda Z_i(\lambda)\eta_k(\lambda))(\phi_{kj}(\beta)+c_\beta Z_k(\beta)\eta_j(\beta))\\&=(\lambda-\beta)\sum_{k\in E}[\phi_{ik}(\lambda)\phi_{kj}(\beta)+c_\beta\phi_{ik}(\lambda)Z_k(\beta)\eta_j(\beta)\\&\quad+c_\lambda Z_i(\lambda)\eta_k(\lambda)\phi_{kj}(\beta)+c_\lambda c_\beta Z_i(\lambda)\eta_k(\lambda)Z_k(\beta)\eta_j(\beta)]\\&=\phi_{ij}(\beta)-\phi_{ij}(\lambda)+c_\beta(Z_i(\beta)-Z_i(\lambda))\eta_j(\beta)+c_\lambda Z_i(\lambda)(\eta_j(\beta)-\eta_j(\lambda))\\&\quad+c_\lambda c_\beta(c_\lambda^{-1}-c_\beta^{-1})Z_i(\lambda)\eta_j(\beta)\\&=\phi_{ij}(\beta)-\phi_{ij}(\lambda)+c_\beta Z_i(\beta)\eta_j(\beta)-c_\lambda Z_i(\lambda)\eta_j(\lambda)=\psi_{ij}(\beta)-\psi_{ij}(\lambda),\quad i,j\in E.\end{aligned}$$

故 $\psi_{ij}(\lambda)$是某标准转移函数的预解式，即(1)成立.

下证(2)，即

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=q_{ij},\quad i,j\in E.\tag{2.8}$$

先证

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_j(\lambda)=0,\quad j\in E,\tag{2.9}$$

由 $\Phi(\lambda)$是 F 型的且 $q_0=0$，所以有

$$\lambda\phi_{kj}(\lambda)=\sum_{l\in E}\phi_{kl}(\lambda)q_{lj}+\delta_{kj}=\sum_{l\in C}\phi_{kl}(\lambda)q_{lj}+\delta_{kj},\quad i,j\in E,$$

因此，当 $j\in C$ 时

$$\begin{aligned}\lambda\eta_j(\lambda)&=\lambda(m_j-\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{kj}(\lambda))\\&=\lambda\sum_{k\in C}m_k(\delta_{kj}-\lambda\phi_{kj}(\lambda))-\lambda\sum_{k\in C}m_k\mu\phi_{kj}(\lambda)\\&=-\lambda\sum_{k\in C}m_k\sum_{l\in C}\phi_{kl}(\lambda)q_{lj}-\mu\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kj}(\lambda)\\&=-\lambda\sum_{k\in C}m_k(\sum_{l\in C,l\neq j}\phi_{kl}(\lambda)q_{lj}+\phi_{kj}(\lambda)q_{jj})-\mu\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kj}(\lambda)\end{aligned}$$

$$=-\sum_{l\in C,l\neq j}q_{lj}\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kl}(\lambda)+\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kj}(\lambda)q_j-\mu\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kj}(\lambda),\tag{2.10}$$

记 $d_l(\lambda)=m_l-\sum_{k\in C}\lambda m_k\phi_{kl}(\lambda)$ 类似于(2.6)式的证明,可证 $d(\lambda)$ 是行协调族,所以 $d_l(\lambda)$ 关于 λ 单调不增,由此得 $\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kl}(\lambda)$ 关于 λ 单调不减,由单调收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{l\in C,l\neq j}q_{lj}\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kl}(\lambda)=\sum_{l\in C,l\neq j}q_{lj}\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kl}(\lambda),\tag{2.11}$$

又由于 $\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kl}(\lambda)\leqslant\sum_{k\in C}m_k<\infty$,所以由控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\in C}m_k\lambda\phi_{kl}(\lambda)=\sum_{k\in C}m_k\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\phi_{kl}(\lambda)=\sum_{k\in C}m_k\delta_{kl}=m_l,\quad l\in C,\tag{2.12}$$

由(2.10)—(2.12)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_j(\lambda)=-\sum_{l\in C,l\neq j}q_{lj}m_l+m_jq_j-\mu m_j,\quad j\in C,\tag{2.13}$$

又由 m 是 Q 的 μ-不变测度,即 $\sum_{l\in C,l\neq j}q_{lj}m_l=(q_j-\mu)m_j$,得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_j(\lambda)=0,\quad j\in C,$$

当 $j=0$ 时,由向前方程,对 $k\in C$,有 $\lambda\phi_{k0}(\lambda)=\sum_{l\in E}\phi_{kl}(\lambda)q_{l0}=\sum_{l\in C}\phi_{kl}(\lambda)q_{l0}$,因此

$$\begin{aligned}\lambda\eta_0(\lambda)&=e-\lambda\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{k0}(\lambda)\\&=e-\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\sum_{l\in C}\phi_{kl}(\lambda)q_{l0}\\&=e-\sum_{l\in C}q_{l0}\sum_{k\in C}m_k(\lambda+\mu)\phi_{kl}(\lambda),\end{aligned}$$

由(2.6)式知 $\sum_{k\in C}(\lambda+\mu)m_k\phi_{kl}(\lambda)$ 关于 λ 单调不减,由单调收敛定理及控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_0(\lambda)&=e-\sum_{l\in C}q_{l0}\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\in C}m_k(\lambda+\mu)\phi_{kl}(\lambda)\\&=e-\sum_{l\in C}q_{l0}\sum_{k\in C}m_k\delta_{kl}=e-\sum_{l\in C}q_{l0}m_l\\&=0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

故(2.9)式对 $j\in E$ 成立. 结合 $Z_0(\lambda)=0$,$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda Z_i(\lambda)=d_i$,$i\geqslant1$ 及由 Fatou 引理 $\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)\geqslant\sum_{k\in C}m_kd_k>0$,得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda Z_i(\lambda)\lambda\eta_j(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)}=0,\quad i,j\in E.\tag{2.15}$$

由 $\Phi(\lambda)$ 的 Q-条件及上式得(2.8)式,即(2)成立.

最后证明(3),因为对 $j\in C$,有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in C}m_i(\lambda+\mu)\psi_{ij}(\lambda)&=\sum_{i\in C}m_i(\lambda+\mu)(\phi_{ij}(\lambda)+c_\lambda Z_i(\lambda)\eta_j(\lambda))\\&=\sum_{i\in C}m_i(\lambda+\mu)\phi_{ij}(\lambda)+c_\lambda\sum_{i\in C}m_i(\lambda+\mu)Z_i(\lambda)\eta_j(\lambda)\\&=\sum_{i\in C}m_i(\lambda+\mu)\phi_{ij}(\lambda)+\eta_j(\lambda)=m_j.\end{aligned}$$

故 m 是 $\Psi(\lambda)$ 的 μ-不变测度.

必要性　设存在 Q-预解式 $\Psi(\lambda)$,使 m 是 $\Psi(\lambda)$ 的 μ-不变测度,即

$$\sum_{i\in C} m_i(\lambda+\mu)\psi_{ij}(\lambda)=m_j,\quad j\in C. \tag{2.16}$$

则由 $q_0=0$ 及向前不等式，有

$$\sum_{j\in C}\psi_{ij}(\lambda)q_{j0}=\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)q_{j0}\leqslant\lambda\psi_{i0}(\lambda),\quad i\in C, \tag{2.17}$$

又由范条件

$$\lambda\psi_{i0}(\lambda)\leqslant 1-\sum_{j\in C}\lambda\psi_{ij}(\lambda), \tag{2.18}$$

由(2.16)—(2.18)得

$$\begin{aligned}\sum_{j\in C} m_j q_{j0} &= \sum_{j\in C}\sum_{i\in C} m_i(\lambda+\mu)\psi_{ij}(\lambda)q_{j0}=\sum_{i\in C} m_i(\lambda+\mu)\sum_{j\in C}\psi_{ij}(\lambda)q_{j0}\\ &\leqslant(\lambda+\mu)\sum_{i\in C} m_i\lambda\psi_{i0}(\lambda)\leqslant(\lambda+\mu)\sum_{i\in C} m_i\Big(1-\sum_{j\in C}\lambda\psi_{ij}(\lambda)\Big)\\ &=(\lambda+\mu)\sum_{i\in C} m_i-\lambda\sum_{j\in C}\sum_{i\in C} m_i(\lambda+\mu)\psi_{ij}(\lambda)\\ &=(\lambda+\mu)\sum_{i\in C} m_i-\lambda\sum_{j\in C} m_j=\mu\sum_{j\in C} m_j.\end{aligned}$$

故(2.1)成立. 定理 1 证毕. ▌

定理 2 的证明

(1) 当 Q 零流出，由于 Q 保守，所以 F 是唯一的 Q-过程，且 F 诚实，由[10]即得(1).

(2) 必要性完全类同于定理 1 的必要性，下证充分性，因 Q 非零流出，所以 F 不诚实，如(2.2)式构造 $\Psi(\lambda)$，但 e 可放宽为

$$\sum_{i\in C} m_i q_{i0}\leqslant e\leqslant\mu\sum_{i\in C} m_i.$$

这时只需注意，由于 $Z_0(\lambda)=0$，$d_i=0$，$i\geqslant 1$，所以 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda Z_i(\lambda)=0$，$i\in E$，又因 m 是 Q 的 μ-次不变测度，即 $\sum\limits_{l\in C,l\neq j} q_{lj}m_l\leqslant(q_j-\mu)m_j\leqslant(q_j+\mu)m_j$，所以 $-\sum\limits_{l\in C,l\neq j} q_{lj}m_j+(q_j-\mu)m_j\leqslant 2(q_j+\mu)m_j<\infty$，故结合(2.13)及(2.14)得 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_j(\lambda)$，$j\in E$ 存在且有限，再结合(2.4)式得(2.15)式成立，其余完全类似于定理 1 的充分性的证明，即得 m 是 Q-预解式 $\Psi(\lambda)$ 的 μ-不变测度.

(3) 只需注意，在(2)的证明中，取 $e=\mu\sum\limits_{i\in C} m_i$，则(2.4)以等号成立，由此得 $\Psi(\lambda)$ 是诚实的，故由(2)即得(3).

(4) 当 Q 非零流出，如(2.1)式以不等号成立，由(2)的证明过程知，e 有无穷多种取法，因而 $\eta_0(\lambda)$ 有无穷多种取法，因而存在无穷多个 Q-过程 $P(t)$，使 m 是 $P(t)$ 的 μ-不变测度. 定理 2 证毕. ▌

3 例子

下面给出本文定理的两个例子.

例 1 设 $C=\{1,2,3,\cdots\}$，$E=C\cup\{0\}$，

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu+\mu_3) & \lambda_3 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

其中 $\mu>0,\mu_i>0,\lambda_i>0,i\geqslant 1$. 记 $m_1=1,m_i\triangleq\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_2\mu_3\cdots\mu_i}$, $i=1,2,3,\cdots$,如 $\sum_{i=1}^{\infty}m_i<\infty$,则 m 是 Q 的有限 μ-不变测度，且 m 是

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+Z(\lambda)\frac{\eta(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum_{k\in C}m_kZ_k(\lambda)} \tag{3.1}$$

的 μ-不变测度的充分必要条件是 $\mu_1\leqslant\mu\sum_{i\in C}m_i$，其中 $\Phi(\lambda)$是 Q 的最小 Q-过程，$Z(\lambda),\eta(\lambda)$ 如定理 1 定义.

证

记 $$\bar{Q}=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}.$$

容易验证 m 是 $\bar{Q}$ 的不变测度，即 $\sum_{i\in C}m_i\bar{q}_{ij}=0,\quad j\in C$,

等价于 $$\begin{cases}-\lambda_1+\mu_2m_2=0\\ \lambda_{i-1}m_{i-1}-m_i(\lambda_i+\mu_i)+\mu_{i+1}m_{i+1}=0, & i\geqslant 2,\end{cases}$$

由 $Q,\bar{Q}$ 的关系,结合上式，有

$$\sum_{i\in C}m_iq_{ij}=\sum_{i\in C}m_i\bar{q}_{ij}-\mu m_j=-\mu m_j,\quad j\in C.$$

所以 m 是Q 在C 上的μ-不变测度，根据定理 1 及 $\sum_{i\in C}m_iq_{i0}=\mu_1$ 知，m 是$\Psi(\lambda)$的 μ-不变测度的充分必要条件是

$$\mu_1\leqslant\mu\sum_{i\in C}m_i,$$

且当上式成立时，m 是形如(3.1)式定义的 $\Psi(\lambda)$的 μ-不变测度. ▎

例 2 设 $C=\{1,2,3,\cdots\},E=C\cup\{0\}$,

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ a & -(a+b) & b & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 2a & -2(a+b) & 2b & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 3a & -3(a+b) & 3b & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

其中 $0<b<a$，记 $\mu\triangleq a-b>0,m_j=(b/a)^{j-1},j\in C$，则 m 是Q 的有限μ-不变测度，且 m 是最小 Q-过程 $F(t)$($F(t)$是唯一的 Q-过程)的 μ-不变测度.

证 因 $a>b$，所以 m 有限，下证

$$\sum_{i\in C}m_iq_{ij}=-(a-b)m_j,\quad j\in C. \tag{3.2}$$

当 $j=1$ 时，

$$\sum_{i\in C} m_i q_{i1} = -(a+b)m_1 + 2am_2 = -(a+b) + 2b = -a+b = -(a-b)m_1,$$

(3.2)式成立；

当 $j\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i\in C} m_i q_{ij} &= (j-1)b(b/a)^{j-2} - j(a+b)(b/a)^{j-1} + (j+1)a(b/a)^j \\ &= (b/a)^{j-1}(-a+b) = -(a-b)m_j.\end{aligned}$$

故(3.2)式成立，即 m 是 Q 的 μ-不变测度.

由 $$R = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{nb} + \frac{na}{n(n-1)b^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2a^{n-1}}{n(n-1)\cdots 1b^n}\right) \geqslant \frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

得 Q 零流出，此时，最小 Q-过程 $F(t)$是唯一的 Q-过程，又

$$\mu\sum_{i\in C} m_i = (a-b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{i-1} = \frac{a-b}{1-b/a} = a = \sum_{i\in C} m_i q_{i0}.$$

故由定理 2(1)得，m 是 $F(t)$的 μ-不变测度. ∎

参 考 文 献

[1] 侯振挺. Q-过程的唯一性准则. 中国科学，1974，**17**：141－159

[2] Feller W. On boundaries and lateral conditions for Kolmogorov differential equations. Ann Math，1957，**65**(3)：527－570

[3] Reuter G. Denumerable Morkov processes Ⅱ. J London Math Soc，1959，**3**：81－91

[4] Reuter G. Denumerable Morkov processes Ⅲ. J London Math Soc，1962，**7**：63－73

[5] 杨向群. 可列马尔可夫过程构造论(第二版). 长沙：湖南科学出版社，1988

[6] Kelly F P. Invariant Measures and the q-matrix. In：Kingman J F C，Reuter G E H，ed. Probability，Statistics and Analysis. London：Cambridge University Press，1983. 143－160

[7] Pollett P K. On the equivalence of mu-invariant measures for the minimal process and its q-matrix. Stoch Proc Appl，1986，**22**：203－221

[8] Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains. New York：Springer-Verlag. 1991

[9] Pollett P K. Invariant measure for Q-processes when Q is not regular. Adv Appl Prob，1991，**23**：277－292

[10] 张汉君，林祥，侯振挺. Q 过程的不变分布(Ⅰ). 数学年刊，2001，**22**A(3)：323－330

[11] Pollett P，Vere-Jones D. A note on evanescent processes. Austral J Statist，1992，**34**：531－536

μ-Invariant Measures for Q-Processes ——Containing an Absorbing State Case

Wu Qunying

(*Department of Mathematics and Physics*, *Guilin Institute of Technology*, *Guilin* 541004)

Abstract：Let $Q=\{q_{ij};i,j\in E\}$ be a stable Q-matrix over a state space E consisting of an irreducible class C and a single absorbing state 0，which is accessible from C. Suppose that Q admits a finite μ-subinvariant measure $m=\{m_j;j\in C\}$ on C. The author considers the problem of identifying all Q-processes for which m is a μ-invariant measure on C.

Key words：Q-processes；μ-subinvariant measure；μ-invariant measure；Absorbing state.

MR(2000) Subject Classification：60J27；60J99