2005,**25A**(5):627－636

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

B_a 空间中的多元加权光滑模与 Bernstein-Durrmeyer 算子*

丁春梅　曹飞龙

(中国计量学院理学院信息与数学科学系　杭州 310018)

摘要:该文引进 B_a 空间多元加权光滑模,推广 L^p 空间的 Ditzian-Totik 模,证明该模与 K-泛函的等价性. 作为应用,讨论定义在单纯形上多元 Bernstein-Durrmeyer 算子与多元加权光滑模之间的关系. 即,以多元加权光滑模为尺度,建立 Bernstein-Durrmeyer 算子在 B_a 空间逼近阶的上界与下界估计.

关键词:B_a 空间;光滑模;单纯形;Bernstein-Durrmeyer 算子。

MR(2000)主题分类:46E30;41A25;41A36　　**中图分类号**:O174.41　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)05-627-10

1　引言

令 G 是 R^d 中的一个有界区域,而

$$B=\{L^{p_1}(G),L^{p_2}(G),\cdots,L^{p_m}(G),\cdots\},\quad 1<p<\infty,\ m\in N$$

是一列 Lebesgue 可积空间,$a=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots\}$ 是一实的非负数列. 对于 $f\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}L^{p_m}(G)$,如果存在一个实数 $\alpha>0$,使得

$$I(f,\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^m\|f\|_{p_m}^m<\infty,$$

则称 $f\in B_a(G)$,并定义 $B_a(G)$的范数为

$$\|f\|_{B_a}=\inf_{\alpha>0}\{I(f,1/\alpha)\leqslant 1\}.$$

显然,如果 $B=\{L^p(G),L^p(G),\cdots,L^p(G),\cdots\}$并且 $a=\{1,0,\cdots,0,\cdots\}$,则 $B_a(G)$为 Lebesgue 可积空间 $L^p(G)$. 同时,易见 $B_a(G)$按上述范数 $\|\cdot\|_{B_a}$ 构成一完备的赋范空间.

B_a 空间是由丁夏畦院士与罗佩珠教授[1]最先引进的,有关它的进一步性质可以在文献[2]—[5]中找到. 近几年,关于 $B_a[a,b]$空间中用代数多项式或线性算子的逼近问题也有较多研究,文献[6]与[7]研究了一元 Bernstein-Kantorovich 算子的逼近阶估计与饱和问题,文献[8]讨论了整指数型 Jackson 平均算子在某些 B_a-Besov 空间的正逆定理. 众多研

收稿日期:2003-05-08;修订日期:2004-08-09

E-mail:dingcm@cjlu.edu.cn

* 基金项目:国家自然科学基金(60473034)资助

究表明 B_a 空间是一类新的令人感兴趣的重要函数空间。然而，我们发现，至今有关该空间的逼近结果均是关于一元函数的，并且所用的主要研究工具都是经典的光滑模.

目前，在逼近论中用所谓的 Ditzian-Totik 模取代经典的光滑模十分流行，其主要原因是带权的 Ditzian-Totik 模能够更好地刻画区间$[a,b]$端点附近的性质[9]. 考虑到单纯形

$$S=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in R^d: x_i\geqslant 0,\ |x|=\sum_{i=0}^{d}x_i\leqslant 1\right\}$$

是 R^d 中一个标准、经典的区域,是单位区间$[0,1]$的自然推广，同时,一些熟知的多元多项式算子(例如 Bernstein 算子[10],Bernstein-Kantorovich 算子[11]，Bernstein-Durrmeyer 算子[12]等)定义在其上. 因此，为了研究 B_a 空间多元函数的逼近问题，定义并研究单纯形上多元加权光滑模是非常必要的. 本文先定义多元带权光滑模，推广 $L^p[0,1]$空间的 Ditzian-Totik 模，然后引进一个 K-泛函并且证明它与加权光滑模是等价的. 最后，作为等价性定理的应用，考虑多元 Bernstein-Durrmeyer 算子在 $B_a(S)$空间的逼近问题，以多元带权光滑模为度量，建立逼近阶的上界与下界估计.

2 多元加权光滑模

以 E_S 表示与单纯形 S 边的方向相同的单位向量的集合，这里 $-e$ 与 e 看成是同一向量. 对于 $\zeta\in E_S$，$x\in S$，定义权函数为

$$\varphi_\zeta^2(x)=\begin{cases}x_i(1-|x|), & \zeta=e_i,1\leqslant i\leqslant d;\\ 2x_ix_j, & \zeta=(e_i-e_j)/\sqrt{2},\ 1\leqslant i<j\leqslant d,\end{cases}$$

其中 $e_i=(0,0,\cdots,0,\overset{\text{ith}}{1},0,\cdots,0)$ 是 R^d 中的单位向量.

对任何向量 $e\in R^d$，函数 $f\in B_a(S)$ 在方向 e 上的 $r(r\in N)$阶对称差分定义为

$$\Delta_{he}^{r}f(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^kf(x+(r/2-k)\,he), & x\pm rhe/2\in S;\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

则带权光滑模定义为

$$\omega_\varphi^r(f,t)_{B_a}=\sup_{0<h\leqslant t}\max_{\zeta\in E_S}\|\Delta_{h\zeta\varphi_\zeta}^{r}f\|_{B_a},$$

$B_a(S)$中的 Peetre K-泛函定义为

$$K_\varphi^r(f,t^r)_{B_a}=\inf_{g\in W_\varphi^r(S)}\{\|f-g\|_{B_a}+t^r\max_{\zeta\in E_S}\|\varphi_\zeta^r(\frac{\partial}{\partial\zeta})^rg\|_{B_a}\},\quad t>0,$$

其中

$$W_\varphi^r(S)=\{f\in B_a(S):\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{r-1}f\in \text{A. C. loc.}(\overset{0}{S})\text{且}\ \varphi_\zeta^r\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^rf\in B_a(S),\ \forall\zeta\in E_S\}$$

是 $B_a(S)$中的 Sobolev 空间,$\overset{0}{S}$是 S 的内部.

定理 1 对任何 $f\in B_a(S)$,存在一个与 f 无关的常数 M，使得

$$M^{-1}\omega_\varphi^r(f,t)_{B_a}\leqslant K_\varphi^r(f,t^r)_{B_a}\leqslant M\omega_\varphi^r(f,t)_{B_a}.$$

证 对于 $x\in S$，我们记 $x^*=(x_2,x_3,\cdots,x_d)$，$S^*=\{x^*:x=(x_1,x^*)\in S\}$,$x_1=(1-|x^*|)z$，$0\leqslant z\leqslant 1$，$\varphi(z)=\sqrt{z(1-z)}$，$F(z)=F(z,x^*)=f((1-|x^*|)z,x^*)$，则

$$\varphi_{e_1}(x)=(1-|x^*|)\varphi(z),\ (\frac{\partial}{\partial x_1})^r f(x)=(1-|x^*|)^{-r}F^{(r)}(z)$$

且

$$\Delta^r_{h\varphi_{e_1}e_1}f(x)=\Delta^r_{h\varphi}F(z).$$

先估计下界. 由差分定义与性质，不难得到 $\|\Delta^r_{h\zeta\varphi_\zeta}f\|_{B_a}\leqslant C\|f\|_{B_a}$ 对任何 $\zeta\in E_S$ 与 $f\in B_a(S)$ 成立，这里与以下 C 表示与 n、f 无关的正常数，其值在不同处一般不同. 如果 $f\in W^r_\varphi(S)$，注意到文献[9]已证明的事实

$$\int_0^1|\Delta^r_{h\varphi}F(z)|^p\mathrm{d}z\leqslant C^ph^{rp}\int_0^1|\varphi^r(z)F^{(r)}(z)|^p\mathrm{d}z,\quad 1<p<\infty,$$

其中

$$F\in D^r_\varphi[0,1]=\{g\in L^p[0,1]:g^{(r-1)}\in \mathrm{A.C.loc.}(0,1)\text{ 且 }\varphi^rg^{(r)}\in L^p[0,1]\}.$$

于是，对于 $f\in B_a(S)$，成立

$$\begin{aligned}\|\Delta^r_{he_1\varphi_{e_1}}f\|_{B_a}&=\inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^\infty a_m\alpha^{-m}(\int_{S^*}(1-|x^*|)\mathrm{d}x^*\int_0^1|\Delta^r_{h\varphi}F(z)|^{p_m}\mathrm{d}z)^{m/p_m}\leqslant 1\}\\&\leqslant\inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^\infty a_m\alpha^{-m}(\int_{S^*}(1-|x^*|)\mathrm{d}x^*C^{p_m}h^{rp_m}\\&\quad\times\int_0^1|\varphi^r(z)F^{(r)}(z)|^{p_m}\mathrm{d}z)^{m/p_m}\leqslant 1\}\\&=\inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^\infty a_m\alpha^{-m}(\int_S|Ch^r\varphi^r_{e_1}(x)(\frac{\partial}{\partial x_1})^rf(x)|^{p_m}\mathrm{d}x)^{m/p_m}\leqslant 1\}\\&=Ch^r\|\varphi^r_{e_1}(x)(\frac{\partial}{\partial x_1})^rf\|_{B_a}.\end{aligned}$$

类似地，当 $\zeta=e_2,e_2,\cdots,e_d$ 时，成立

$$\|\Delta^r_{he_i\varphi_{e_i}}f\|_{B_a}\leqslant Ch^r\|\varphi^r_{e_i}(\frac{\partial}{\partial x_i})^rf\|_{B_a}.$$

当 $\zeta=(e_i-e_j)/\sqrt{2},1\leqslant i<j\leqslant d$ 时，注意到文献[13]引进的变换 T，即

$$T:\begin{cases}T^2=I, & I\text{ 是单位算子；}\\ T(x_1,x_2,\cdots,x_d)=(u_1,u_2,\cdots,u_d),\ u_j=x_j,u_i=1-|x|, & i\neq j,\end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}\|\Delta^r_{h\zeta\varphi_\zeta}f\|_{B_a}&=\|\sum_{k=0}^r\binom{r}{k}(-1)^kf(\cdot+(r/2-k)h\zeta\varphi_\zeta(\cdot))\|_{B_a}\\&=\|\sum_{k=0}^r\binom{r}{k}(-1)^kf(T\cdot+(r/2-k)h\zeta\varphi_\zeta(T\cdot))\|_{B_a}\\&\leqslant Ch^r\|\varphi^r_{e_j}(T\cdot)(\frac{\partial}{\partial x_j})^rf(T\cdot)\|_{B_a}=Ch^r\|\varphi^r_\zeta(\frac{\partial}{\partial\zeta})^rf\|_{B_a},\end{aligned}$$

由此得到：对任何 $\zeta\in E_S$，成立

$$\|\Delta^r_{h\zeta\varphi_\zeta}f\|_{B_a}\leqslant C\begin{cases}\|f\|_{B_a}, & f\in B_a(S);\\ h^r\|\varphi^r_\zeta(\frac{\partial}{\partial\zeta})^rf\|_{B_a}, & f\in W^r_\varphi(S).\end{cases}$$

令 $g_t\in W^r_\varphi(S)$，使得

$$\| f-g_t \|_{B_a} \leqslant 2K_{\varphi}^r(f,t^r)_{B_a}$$

以及

$$t^r \max_{\zeta\in E_S} \| \varphi_{\zeta}^r(\frac{\partial}{\partial \zeta})^r g_t \|_{B_a} \leqslant 2K_{\varphi}^r(f,t^r)_{B_a},$$

则根据事实

$$\omega_{\varphi}^r(f,t)_{B_a} \leqslant \omega_{\varphi}^r(f-g_t,t)_{B_a} + \omega_{\varphi}^r(g_t,t)_{B_a},$$

得到下界估计.

下面，证明上界估计. 利用文献[12]中的结果：对 $F\in L^p[0,1]$,$1<p<\infty$，存在一个函数 $G_t\in D_{\varphi}^r[0,1]$,$t>0$，使得

$$\int_0^1 |F(z)-G_t(z)|^p \mathrm{d}z \leqslant C^p t^{-1}\int_0^t\int_0^1 |\Delta_{\tau\varphi}^r F(z)|^p \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau,$$

$$t^{rp}\int_0^1 |\varphi^r(z)G_t^{(r)}(z)|^p \mathrm{d}z \leqslant C^p t^{-1}\int_0^t\int_0^1 |\Delta_{\tau\varphi}^r F(z)|^p \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau,$$

并且 G_t 的构造连续地依赖于 F. 因此，对于 $F(z)=F(z,x^*)$,我们有 $G_t(z)=G_t(z,x^*)$. 令

$$g_t(x) = G_t(\frac{x_1}{1-|x^*|}, x^*), \quad x\in S,$$

则

$$g_t(x) \in W_{\varphi}^r(S)$$

以及

$$\begin{aligned}
\| f-g_t \|_{B_a} &= \inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^{\infty} a_m\alpha^{-m}(\int_{S^*}(1-|x^*|)\int_0^1 |F(z)-G_t(z)|^{p_m}\mathrm{d}z\mathrm{d}x^*)^{m/p_m} \leqslant 1\} \\
&\leqslant \inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^{\infty} a_m\alpha^{-m}(t^{-1}\int_0^t\int_S |C\Delta_{\tau e_1\varphi_{e_1}}^r f(x)|^{p_m}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau)^{m/p_m} \leqslant 1\} \\
&= \inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^{\infty} a_m\alpha^{-m}\| C\Delta_{\tau_0 e_1\varphi_{e_1}}^r f \|_{p_m}^m \leqslant 1\} = \| \Delta_{\tau_0 e_1\varphi_{e_1}}^r f \|_{B_a}, \quad 0<\tau_0\leqslant t.
\end{aligned}$$

类似地

$$t^r \| \varphi_{e_1}^r(\frac{\partial}{\partial x_1})^r g_t \|_{B_a} \leqslant C\| \Delta_{\tau_0 e_1\varphi_{e_1}}^r f \|_{B_a}, \quad 0<\tau_0\leqslant t.$$

根据对称性与变换 T，我们可以证明对每一个 $\zeta\in E_S$,存在函数 $g_t(x)\in W_{\varphi}^r(S)$，使得

$$\| f-g_t \|_{B_a} \leqslant C\| \Delta_{\tau_0\zeta\varphi_\zeta}^r f \|_{B_a}, \quad 0<\tau_0\leqslant t$$

以及

$$t^r \| \varphi_{\zeta}^r(\frac{\partial}{\partial\zeta})^r g_t \|_{B_a} \leqslant C\| \Delta_{\tau_0\zeta\varphi_\zeta}^r f \|_{B_a}, \quad 0<\tau_0\leqslant t,$$

由此得到

$$K_{\varphi}^r(f,t^r)_{B_a} \leqslant \| f-g_t \|_{B_a} + t^r \max_{\zeta\in E_S} \| \varphi_{\zeta}^r(\frac{\partial}{\partial \zeta})^r g_t \|_{B_a} \leqslant \omega_{\varphi}^r(f,t)_{B_a}.$$ ▌

3 定理 1 的应用

作为定理 1 的应用，我们讨论多元 Bernstein-Durrmeyer 算子在 B_a 空间中的逼近问

题，给出逼近阶的上界与下界估计。单纯形上 Bernstein-Durrmeyer 算子定义为[12]

$$D_n(f,x)=\sum_{|k|\leqslant n}P_{n,k}(x)\frac{(n+d)!}{n!}\int_S P_{n,k}(u)f(u)\mathrm{d}u,\quad x\in S,\ n\in N,$$

其中

$$P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-|x|)^{n-|k|},\ \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-|k|)!},$$

$$k\in N_0^d,\quad k!=k_1!k_2!\cdots k_d!,\quad |k|=\sum_{k=1}^{d}k_i,\quad x^k=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_d^{k_d}.$$

定理 2　令 $\inf\limits_{m\geqslant 1}\{p_m\}>1$，$\{a_m^{\frac{1}{m}}\}\in l^\infty$，$q=\sup\limits_{m\geqslant 1}a_m^{\frac{1}{m}}<\infty$ 并且 $s=\inf\limits_{m\geqslant 1}a_m^{\frac{1}{m}}>0$，对于 $f\in B_a(S)$，我们有

$$\|D_nf-f\|_{B_a}\leqslant C(\omega_\varphi^2(f,1/\sqrt{n})_{B_a}+n^{-1}\|f\|_{B_a}).$$

定理 3　如果 $f\in B_a(S)$，则

$$\omega_\varphi^2(f,1/\sqrt{n})_{B_a}\leqslant Cn^{-1}\sum_{k=1}^{n}\|D_kf-f\|_{B_a}.$$

由定理 2 与定理 3 立即得到

推论 1　在定理 2 的条件下，如下等价关系成立

$$\|D_nf-f\|_{B_a}=O(n^{-\beta})$$

当且仅当

$$\omega_\varphi^2(f,t)_{B_a}=O(t^{2\beta}),$$

其中 $0<\beta<1$.

上述定理的证明基于以下若干引理.

引理 1　$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $B_a(S)$ 到其自身的正线性算子列，且 $\|D_n\|_{B_a}=1$.

证　D_n 的正性与线性是明显的. 由简单事实 $D_n(1,x)=1$，我们仅需证 $\|D_nf\|_{B_a}\leqslant\|f\|_{B_a}$. 利用 Jensen 不等式得到

$$\int_S|D_n(f,x)|^{p_m}\mathrm{d}x\leqslant\int_S\sum_{|k|\leqslant n}P_{n,k}(x)\frac{(n+d)!}{n!}\int_S P_{n,k}(u)|f(u)|^{p_m}\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$
$$=\int_S|f(u)|^{p_m}\mathrm{d}u,\quad 1<p_m<\infty,$$

由此导出

$$\|D_nf\|_{B_a}\leqslant\inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^{-m}(\int_S|f(u)|^{p_m}\mathrm{d}u)^{m/p_m}\leqslant 1\}=\|f\|_{B_a}.$$

引理 1 证毕.　∎

引理 2　如果 $f\in W_\varphi^2(S)$，并且 $\zeta\in E_S$，则

$$\|\varphi_\zeta^2(\frac{\partial}{\partial\zeta})^2D_nf\|_{B_a}\leqslant\|\varphi_\zeta^2(\frac{\partial}{\partial\zeta})^2f\|_{B_a}.$$

证　仅需证 $\zeta=e_1$ 的情形. 如果 $\zeta=e_i,1<i\leqslant d$，仅需更替坐标. 如果 $\zeta=(e_i-e_j)/\sqrt{2},1\leqslant i<j\leqslant d$，则利用变换 T 来证明. 事实上，我们可以直接验证

$$D_n(f,x)=D_n(f_T,Tx),\ D_n(f,Tx)=D_n(f_T,x),$$

其中 $f_T(u)=f(x)$，$u=Tx$，由此得到：对于 $\eta=e_i,u=Tx$，有

$$\|\varphi_\zeta^2(\frac{\partial}{\partial\zeta})^2D_nf\|_{B_a}=\|\varphi_\eta^2(T\cdot)(\frac{\partial}{\partial\eta})^2D_n(f_T,T\cdot)\|_{B_a}$$

$$\leqslant\|\varphi_\eta^2(T\cdot)(\frac{\partial}{\partial\eta})^2f_T(T\cdot)\|_{B_a}=\|\varphi_\zeta^2(\cdot)(\frac{\partial}{\partial\zeta})^2f(\cdot)\|_{B_a}.$$

根据简单计算，我们有

$$(\frac{\partial}{\partial x_1})^2D_n(f,x)=n(n-1)\sum_{|k|\leqslant n-2}P_{n-2,k}(x)\vec{\Delta}^2_{\frac{1}{n}e_1}\Phi(k),$$

其中 $\Phi(k)=\frac{(n+d)!}{n!}\int_S P_{n,k}(u)f(u)\mathrm{d}u$，并且

$$\vec{\Delta}^r_{he}f(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{r-i}f(x+\mathrm{i}eh), & x,\ x+rhe\in S;\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

利用分步积分法，得到

$$n(n-1)\vec{\Delta}^2_{\frac{1}{n}e_1}\Phi(k)=\frac{(n+d)!n!}{(n+2)!(n-2)!}\int_S P_{n+2,k+2e_1}(u)(\frac{\partial}{\partial u_1})^2f(u)\mathrm{d}u.$$

因此

$$\varphi_{e_1}^2(x)(\frac{\partial}{\partial x_1})^2D_n(f,x)=\frac{(n+d)!}{n!}\sum_{|k|\leqslant n-2}\alpha(n,k,r)P_{n,k+2e_1}(x)$$

$$\times\int_S P_{n,k+2e_1}(u)\varphi_{e_1}^2(u)(\frac{\partial}{\partial u_1})^2f(u)\mathrm{d}u,$$

其中

$$\alpha(n,k,r)=\frac{(n!)^2}{(n+2)!(n-2)!}\binom{n-2}{k}\binom{n+2}{k+2e_1}\binom{n}{k+2e_1}^{-2}<1.$$

因为 $|k|\leqslant n-2$ 导出 $|k+2e_1|\leqslant n$，所以

$$\|\varphi_{e_1}^2(\frac{\partial}{\partial x_1})^2D_nf\|_{B_a}$$

$$\leqslant\|\frac{(n+d)!}{n!}\sum_{|k+2e_1|\leqslant n}P_{n,k+2e_1}(\cdot)\int_S P_{n,k+2e_1}(u)\varphi_{e_1}^2(u)(\frac{\partial}{\partial u_1})^2f(u)\mathrm{d}u\|_{B_a}$$

$$=\|D_n(\varphi_{e_1}^2(\frac{\partial}{\partial x_1})^2f,\cdot)\|_{B_a}\leqslant\|\varphi_{e_1}^2(\frac{\partial}{\partial x_1})^2f\|_{B_a},$$

这里我们用到了引理 1. 引理 2 证毕. ▌

引理 3 如果 $f\in B_a(S)$，$\zeta\in E_S$，则

$$\|\varphi_\zeta^2(\frac{\partial}{\partial\zeta})^2D_nf\|_{B_a}\leqslant 4n\|f\|_{B_a}.$$

证 根据引理 2 的讨论，只要证明 $\zeta=e_1$ 的情形. 当 $d=1$ 时，文献[14]证得

$$\int_0^1|\varphi(z)D''_n(F,z)|^p\mathrm{d}z\leqslant 4^pn^p\int_0^1|F(z)|^p\mathrm{d}z,\quad F\in L^p[0,1].$$

当 $d>1$ 时，利用上一节使用过的记号，可以将 $D_n(f,x)$ 分解为

$$D_n(f,x)=\sum_{|k^*|\leqslant n}P_{n,k^*}(x^*)\sum_{k_1=0}^{n-|k^*|}P_{n-|k^*|,k_1}(\frac{x_1}{1-|x^*|})$$

$$\times\frac{(n+d)!}{n!}\int_{S^*}P_{n,k^*}(u^*)\int_0^1P_{n-|k^*|,k_1}(\frac{u_1}{1-|u^*|})f(u)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u^*$$

$$= \sum_{|k^*|\leqslant n} P_{n,k^*}(x^*) \frac{(n+1+d-1)!}{(n+1)!} \int_{S^*} P_{n+1,k^*}(u^*) D_{n-|k^*|}(F,z) \mathrm{d}u^*,$$

其中 $k^* = (k_2, k_3, \cdots, k_d)$，$|k^*| = \sum_{i=2}^{d} k_i$，$u^* = (u_2, u_3, \cdots, u_d)$，$|u^*| = \sum_{i=2}^{d} u_i$. 于是

$$\varphi_{e_1}^2(x)\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2 D_n(f,x)$$

$$= \sum_{|k^*|\leqslant n} P_{n,k^*}(x^*) \frac{(n+1+d-1)!}{(n+1)!} \int_{S^*} P_{n+1,k^*}(u^*) \varphi^2(z) D''_{n-|k^*|}(F,z) \mathrm{d}u^*,$$

并且

$$\Big\| \varphi_{e_1}^2 \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^2 D_n f \Big\|_{B_a}$$

$$= \inf_{\alpha>0}\Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \alpha^{-m} \Big(\int_S \Big| \sum_{|k^*|\leqslant n} P_{n,k^*}(x^*) \frac{(n+1+d-1)!}{(n+1)!}$$

$$\times \int_{S^*} P_{n+1,k^*}(u^*) \varphi^2(z) D''_{n-|k^*|}(F,z) \mathrm{d}u^* \Big|^{p_m} \mathrm{d}x\Big)^{\frac{m}{p_m}} \leqslant 1 \Big\}$$

$$\leqslant \inf_{\alpha>0}\Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \alpha^{-m} \Big(\int_{S^*} (1-|x^*|) \sum_{|k^*|\leqslant n} P_{n,k^*}(x^*) \frac{(n+1+d-1)!}{(n+1)!}$$

$$\times \int_{S^*} P_{n+1,k^*}(u^*) 4^{p_m} n^{p_m} \int_0^1 |F(z)|^{p_m} \mathrm{d}z \mathrm{d}u^* \mathrm{d}x^* \Big)^{\frac{m}{p_m}} \leqslant 1 \Big\}$$

$$\leqslant \inf_{\alpha>0}\Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \alpha^{-m} \Big(\sum_{|k^*|\leqslant n} \int_{S^*} (1-|u^*|) P_{n,k^*}(u^*) \int_0^1 |4nF(z)|^{p_m} \mathrm{d}z \mathrm{d}u^* \Big)^{\frac{m}{p_m}} \leqslant 1 \Big\}$$

$$= \inf_{\alpha>0}\Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \alpha^{-m} \Big(\int_S |4nf(u)|^{p_m} \mathrm{d}u\Big)^{\frac{m}{p_m}} \leqslant 1 \Big\} = 4n \| f \|_{B_a}.$$

引理 3 证毕. ∎

现在证明定理 2. 定义偏微分算子

$$P(D) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i (1-|x|) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant d} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) x_i x_j \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$$

及 K-泛函

$$K_r^*(f,t^r)_{B_a} = \inf_{g\in W_\varphi^r(S)} \inf\{ \| f-g \|_{B_a} + t^r \| P^r(D) g \|_{B_a} \}, \quad f \in B_a,$$

则可以选择一个函数 $g\in W_\varphi^2(S)$ 与 f、n、a 无关，使得

$$\| f-g \|_{B_a} \leqslant 2K_1^*\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_{B_a}, \qquad \frac{1}{n} \| P(D) g \|_{B_a} \leqslant 2K_1^*\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_{B_a}.$$

由 D_n 的压缩性，我们有

$$\| D_n(f-g) - (f-g) \|_{B_a} \leqslant 2 \| f-g \|_{B_a} \leqslant 4K_1^*\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_{B_a}.$$

应用文献[15]中关于 D_n 的两个重要性质

$$D_n g - g = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i(i+d)} P(D) D_i g$$

及

$$P(D) D_n g = D_n(P(D) g),$$

得到

$$\|D_n g-g\|_{B_a}=\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i(i+d)}D_i(P(D)g)\|_{B_a}$$

$$\leqslant\frac{1}{d}\sum_{i=n+1}^{\infty}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+d})\|P(D)g\|_{B_a}$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\|P(D)g\|_{B_a}\leqslant 2K_1^*(f,\frac{1}{n})_{B_a}.$$

于是

$$\|D_n f-f\|_{B_a}\leqslant\|D_n(f-g)-(f-g)\|_{B_a}+\|D_n g-g\|_{B_a}\leqslant 6K_1^*(f,\frac{1}{n})_{B_a}.$$

由此知：为了完成定理 2 的证明，仅需证明如下关于偏导数的插补不等式

$$\|P(D)g\|_{B_a}\leqslant C(\|g\|_{B_a}+\max_{\zeta\in E_S}\|\varphi_{\zeta}^2(\frac{\partial}{\partial\zeta})^2 g\|_{B_a}).$$

为此，将算子 $P(D)$写为

$$P(D)=\sum_{i=1}^{d}P_i(D)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant d}P_{ij}(D),$$

则

$$\|P(D)g\|_{B_a}\leqslant\|\sum_{i=1}^{d}P_i(D)g\|_{B_a}+\|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant d}P_{ij}(D)g\|_{B_a}.$$

对一元情形，用 $P^*(D)$表示微分算子 $P(D)$，即

$$P^*(D)g=(\varphi^2 g)''.$$

我们先估计 $P_1(D)g$. 利用上一节使用过的记号，得到

$$\|P_1(D)g\|_{p_m}^{p_m}=\int_{S^*}\mathrm{d}x^*\int_0^{1-|x^*|}|(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{e_1})^2(x)\frac{\partial}{\partial x_1}g(x)|^{p_m}\mathrm{d}x_1$$

$$=\int_{S^*}(1-|x^*|)\mathrm{d}x^*\int_0^1|P^*(D)G(z)|^{p_m}\mathrm{d}z,$$

其中 $G(z)=G(z,x^*)=g((1-|x^*|)z,x^*)$. 因为[9,p135]

$$\|G^{(i)}\|_{L^{p_m}[0,1]}\leqslant C(\|G\|_{L^{p_m}[0,1]}+\|\varphi^{2r}G^{(2r)}\|_{L^{p_m}[0,1]}),\quad 1\leqslant i\leqslant r,\ 1<p_m<\infty,$$

所以

$$\|P_1(D)g\|_{p_m}^{p_m}\leqslant C^{p_m}\int_{S^*}(1-|x^*|)\mathrm{d}x^*(\int_0^1|G(z)|^{p_m}\mathrm{d}z+\int_0^1|\varphi^2(z)G''(z)|^{p_m}\mathrm{d}z)$$

$$=C^{p_m}(\|g\|_{p_m}^{p_m}+\|\varphi_{e_1}^2(\frac{\partial}{\partial x_1})^2 g\|_{p_m}^{p_m}).$$

因此，根据假设 $\inf\limits_{m\geqslant 1}\{p_m\}>1$，$\{a_m^{\frac{1}{m}}\}\in l^\infty$，$q=\sup\limits_{m\geqslant 1}a_m^{\frac{1}{m}}<\infty$，$s=\inf\limits_{m\geqslant 1}a_m^{\frac{1}{m}}>0$ 与 B_a 空间的插补不等式[2,p147-152]，导出

$$\|P_1(D)g\|_{B_a}\leqslant\inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^{-m}(\|Cg\|_{p_m}+\|C\varphi_{e_1}^2(\frac{\partial}{\partial x_1})^2 g\|_{p_m})^m\leqslant 1\}$$

$$\leqslant\inf_{\alpha>0}\{\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{\|Cg\|_{B_a}+\|C\varphi_{e_1}^2(\frac{\partial}{\partial x_1})^2 g\|_{B_a}}{\alpha s})^m\leqslant 1\}$$

$$\leqslant \frac{Cq}{2s}\left(\| g \|_{B_a} + \| \varphi_{e_1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 g \|_{B_a} \right).$$

由对称性，对所有的 $P_i(D)g(1\leqslant i\leqslant d)$ 可建立相同的不等式，而利用变换 T 对所有 $P_{ij}(D)g$ $(1\leqslant i<j\leqslant d)$，类似不等式也可建立. 于是

$$\begin{aligned}
\| D_n f - f \|_{B_a} &\leqslant 6K_1^*\left(f, \frac{1}{n}\right)_{B_a} \\
&\leqslant C \inf_{g\in W_\varphi^2(S)} \left\{ \| f-g \|_{B_a} + \frac{1}{n} \| g \|_{B_a} + \frac{1}{n} \max_{\zeta\in E_S} \| \varphi_\zeta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2 g \|_{B_a} \right\} \\
&\leqslant C\left\{ \frac{1}{n} \| g \|_{B_a} + K_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_{B_a} \right\} \\
&\leqslant C\left\{ \omega_\varphi^2(f, 1/\sqrt{n})_{B_a} + \frac{1}{n} \| f \|_{B_a} \right\}.
\end{aligned}$$

下面证明定理 3. 令

$$\sigma_n = n^{-1} \| \varphi_\zeta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2 D_n f \|_{B_a}, \zeta\in E_S; \qquad \tau_n = 4 \| D_n f - f \|_{B_a},$$

则 $\sigma_1 = 0$. 根据引理 2，引理 3 和引理 4，不难有

$$\begin{aligned}
\sigma_n &\leqslant n^{-1} \| \varphi_\zeta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2 D_n D_k f \|_{B_a} + n^{-1} \| \varphi_\zeta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2 D_n (D_k f - f) \|_{B_a} \\
&\leqslant n^{-1} \| \varphi_\zeta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2 D_k f \|_{B_a} + 4 \| D_k f - f \|_{B_a} \\
&= \frac{k}{n}\sigma_k + \tau_k, \quad 1\leqslant k\leqslant n, \forall \zeta\in E_S.
\end{aligned}$$

利用文献[16]中的引理 2.1，得到 $\sigma_n \leqslant Cn^{-1}\sum_{k=1}^n \tau_k$，即

$$\| \varphi_\zeta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2 D_n f \|_{B_a} \leqslant C\sum_{k=1}^n \| D_k f - f \|_{B_a}.$$

对于 $n\geqslant 2$，存在 $m\in N$，使得 $n/2\leqslant m\leqslant n$，并且

$$\| D_m f - f \|_{B_a} \leqslant \| D_k f - f \|_{B_a}, \qquad n/2\leqslant k\leqslant n.$$

因此

$$\| D_m f - f \|_{B_a} \leqslant \frac{2}{n} \sum_{\frac{2}{n}\leqslant k\leqslant n} \| D_k f - f \|_{B_a} \leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n \| D_k f - f \|_{B_a}.$$

于是，由 K-泛函定义得到

$$\begin{aligned}
K_\varphi^2(f, 1/n)_{B_a} &\leqslant \| D_m f - f \|_{B_a} + n^{-1} \max_{\zeta\in E_S} \| \varphi_\zeta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2 D_m f \|_{B_a} \\
&\leqslant Cn^{-1}\sum_{k=1}^n \| D_k f - f \|_{B_a}.
\end{aligned}$$

最后，由定理 1 推出定理 3 的结论.

注记　由于 B_a 空间是经典的 L^p 空间的自然推广，它包括一些重要的函数空间，如 Orlicz 空间，Sobolev 空间，Orlicz-Sobolev 空间等[2],[17]. 因此，从某种意义上，本文所获得的结果具有广泛性.

参 考 文 献

[1] Ding Xiaqi, Luo Peizhu. B_a space and some estimates of Laplace operator. J Sys Sci and Math Sci, 1981, **1**(1): 9－33

[2] Ding Xiaqi. Theory of B_a Space and its Application. Beijing/New York: Science Press, 1992

[3] 丁夏畦。多维奇异积分与调和函数。数学杂志，1984，**4**(3)：240－245

[4] Cheng Guangrong, Meng Boqin. Interpolation of B_a spaces. Acta Mathematica Scientia, 1988, **8**(1): 65－70

[5] 庄亚栋,俞鑫泰。B_a 空间的某些性质。数学物理学报，1989，**9**(4)：407－413

[6] 盛宝怀。B_a 空间中的算子逼近。数学物理学报，1991，**11**(4)：387－395

[7] 盛宝怀。B_a 空间中 Kantorovich 算子的浸润性。数学杂志，1992，**12**(2)：146－154

[8] Sheng Baohuai, Liu Sanyang. Direct and inverse theorems for Jackson means of entire exponential type in B_a spaces. Acta Mathematica Scientia, 1999, **19**(5): 497－504

[9] Ditzan Z, Totik V. Moduli of Smoothness. New York: Springer-Verlag, 1987

[10] Lorentz G G. Bernstein Polynomials. Toronto: University of Toronto Press, 1953

[11] Zhou D X. Converse theorems for multidimensional Kantorovich operators. Anal Math, 1993, **19**: 85－100

[12] Derriennic M M. On multivariate approximation by Bernstein-type polynomials. J Approx Theory, 1985, **45**: 155－166

[13] Ditzian Z. Inverse theorems for multidimensional Bernstein operators. Pacific J of Math, 1986, **121**: 293－319

[14] Ditzian Z, Ivanov K. Bernstein type operators and their derivatives. J Approx Theory, 1989, **56**: 72－90

[15] Chen W, Ditzian Z. Multivariate Durrmeye-Bernstein operators. Israel Math Conf Proc, 1991, **4**: 109－119

[16] Wickeren E Van. Steckin-Marchaud type inequalities in connection with Bernstein polynomials. Constr Approx, 1986, **2**: 331－337

[17] Deng Yaohua, Gu Yonggeng. A new class of function spaces and the Hilbert transform. J Math Anal Appl, 1985, **108**(1): 99－106

Multivariate Weighted Modulus of Smoothness and Bernstein-Durrmeyer Operators in B_a Space

Ding Chunmei Cao Feilong

(*Department of Information and Mathematics Sciences*, *College of Science*, *China Jiliang University*, *Hangzhou* 310018)

Abstract: In this paper, the authors introduce a new multivariate weighted modulus of smoothness in B_a space, which generalizes the Ditzian-Totik's modulus in L^p space. The equivalence relationship between the modulus and certain K-functional is shown. As an application, the relationship between the multivariate Bernstein-Durrmeyer operators defined on the simplex and the modulus is discussed as well. Namely, with the modulus as a metric, the upper and lower bounds of degree of approximation by the operators are estimated in B_a space.

Key words: B_a space; Modulus of smoothness; Simplex; Bernstein-Durrmeyer operators.

MR(2000)Subject Classification: 46E30; 41A25; 41A36