2009,**29A**(3):651–655

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

Beltrami 方程组弱解分量函数的弱单调性 *

[1,2] 高红亚 [1] 王红敏 [3] 顾广泽

([1] 河北大学数学与计算机学院 河北保定 071002; [2] 河北省数学研究中心 石家庄 050016;
[3] 湖南大学数学与计量经济学院 长沙 410082)

摘要：该文引入一类新的函数空间，并借助于此空间，研究了 $\mathcal{A}$ - 调和方程很弱解的弱单调性，并得到了空间 Beltrami 方程组弱解分量函数的弱单调性.

关键词：Beltrami 方程组；弱单调性； $\mathcal{A}$ - 调和方程；很弱解.

MR(2000) 主题分类：35J65; 30C62 **中图分类号**：O174.45; O175.23 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2009)03-651-05

设 $\Omega\subset \mathrm{R}^n (n\geq 2)$ 为有界区域. 考虑映射 $f=(f^1,f^2,\cdots,f^n):\Omega\to\mathrm{R}^n$. 用 $Df(x)$ 表示其微分矩阵，其范数由 $|Df(x)|=\sup\{|Df(x)h|:h\in S^{n-1}\}$ 给出. 记 $J(x,f)=\det Df(x)$ 为 f 的 Jacobi 行列式. 本文假定 $J(x,f)$ 几乎处处非负，即 f 为保向映射.

定义 1 称 $f\in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ $(1\leq p\leq\infty)$ 为弱 K - 拟正则映射， $1\leq K<\infty$, 若

$$|Df(x)|^n\leq KJ(x,f),\qquad \text{a.e. } \Omega. \tag{1}$$

若 $p\geq n$, 则称 f 为 K - 拟正则映射. 又若 f 是同胚的，则称 f 为 K - 拟共形映射.

上面定义中“弱”的含义是指 f 的 Sobolev 可积指数 p 小于空间维数 n. 在这种情况下， $J(x,f)$ 不是局部可积的. 引入矩阵

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{D^tf(x)Df(x)}{J(x,f)^{2/n}}, & J(x,f)\neq 0;\\ Id, & J(x,f)=0.\end{cases}$$

这里 $D^tf(x)$ 为 $Df(x)$ 的转置矩阵， Id 为恒等矩阵. 于是导致下面的与拟正则映射理论密切相关的 Beltrami 方程组

$$D^tf(x)Df(x)=J(x,f)^{2/n}G(x). \tag{2}$$

这里 $G(x)\in GL(n)$ 为正定，对称，行列式为 1 的 n 阶方阵，且满足一致椭圆型条件：存在 $0<\alpha\leq\beta<\infty$, a.e. Ω, 使得

$$\alpha|\xi|^2\leq\langle G(x)\xi,\xi\rangle\leq\beta|\xi|^2. \tag{3}$$

收稿日期：2007-09-21; 修订日期：2008-08-26

E-mail: hongya-gao@sohu.com

* 基金项目：河北省自然科学基金数学研究专项 (07M003) 、国家自然科学基金 (60572114) 资助

注 1 当 $n=2$ 时，设 $z=x_1+\mathrm{i}x_2$, $w(z)=f^1(x)+\mathrm{i}f^2(x)$, 由 (2) 、 (3) 式导致平面上的一致椭圆型 Beltrami 方程

$$w_{\overline{z}}=\mu(z)w_z,\quad |\mu(z)|\le k<1. \tag{4}$$

下面引入弱单调的定义

定义 2 实值函数 $u\in W^{1,1}(\Omega)$ 称为弱单调的，若任意球 $B\subset\Omega$ 及任意常数 $m\le M$, 当

$$\varphi=(u-M)^+-(m-u)^+\in W_0^{1,1}(B)$$

时，便有

$$m\le u(x)\le M,\qquad \text{a.e. } B.$$

注 2 一个连续函数 u 在区域 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 中单调，是指对任意球 $B\subset\Omega$, 有

$$\mathrm{osc}(u,B)\le\mathrm{osc}(u,\partial B),$$

亦即， u 在任意球 B 满足最大值最小值原理．弱单调性概念是单调性概念的推广，它首先由 Manfredi[1] 引入，并且是研究映射函数连续性的有力工具，见文献 [2].

满足 (3) 式的 Beltrami 方程组 (2) 弱解分量函数的弱单调性已由文献 [3] 给出．本文研究其推广形式，即 (3) 式换成

$$\alpha(x)|\xi|^2\le\langle G(x)\xi,\xi\rangle\le\beta(x)|\xi|^2,\quad 0<\alpha(x)\le\beta(x)<\infty. \tag{5}$$

注 3 将 (3) 式改成 (5) 式的部分动机来自于非线性弹性理论． Müller 和 Spector 在文献 [4] 中有详细介绍，也见文献 [5].

仿照文献 [5] 的推导过程，可得满足 (5) 式的方程组 (2) 弱解的每一分量函数 $u(x)=f^i(x), i=1,2,\cdots,n$ 都满足 Leray-Lions 方程

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x,\triangledown u(x))=0. \tag{6}$$

其中

$$\mathcal{A}(x,\xi)=\langle G^{-1}(x)\xi,\xi\rangle^{\frac{n-1}{2}}G^{-1}(x)\xi,$$

并且

$$\frac{1}{\beta(x)}|\xi|^2\le\langle G^{-1}(x)\xi,\xi\rangle\le\frac{1}{\alpha(x)}|\xi|^2.$$

这样，算子 $\mathcal{A}:\Omega\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 满足

(i) 单调性条件： $\langle\mathcal{A}(x,\xi),\xi\rangle\ge\frac{1}{\beta(x)^{n/2}}|\xi|^n$;

(ii) 控制增长条件： $|\mathcal{A}(x,\xi)|\le\frac{1}{\alpha(x)^{n/2}}|\xi|^{n-1}$;

(iii) 齐次性条件： $\mathcal{A}(x,\lambda\xi)=|\lambda|^{n-2}\lambda\mathcal{A}(x,\xi),\quad\forall\lambda\in\mathrm{R}$.

为了研究满足条件 (5) 的 Beltrami 方程组 (2) 弱解分量函数的弱单调性，需要引入一类函数空间，我们称之为大 $L^\infty(\Omega)$ 空间 (Grand L^∞ space).

$$L^{\infty)}(\Omega)=\left\{\tau(x):\sup_{0<\varepsilon\le1}\left(\varepsilon\int_\Omega|\tau(x)|^{1/\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^\varepsilon<\infty\right\}.$$

显然， $L^{\infty)}(\Omega)$ 为线性空间，且 $L^{\infty}(\Omega)\subset L^{\infty)}(\Omega)$. 这是因为，设 $\tau(x)\in L^{\infty}(\Omega)$, 则存在常数 $M>0$, 使得 $|\tau(x)|\leq M$, a.e. Ω. 于是

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\left(\varepsilon\int_{\Omega}|\tau(x)|^{1/\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\varepsilon}\leq M\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\varepsilon^{\varepsilon}|\Omega|^{\varepsilon}\leq M\max\{1,|\Omega|\}<\infty.$$

其次，对 $\tau(x)\in L^{\infty)}(\Omega)$, 定义

$$\|\tau(x)\|_{L^{\infty)}}=\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\left(\varepsilon\int_{\Omega}|\tau(x)|^{1/\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\varepsilon},$$

下证 $\|\tau(x)\|_{L^{\infty)}}$ 为范数.

(I) $\|\tau\|_{L^{\infty)}}\geq 0$, $\|\tau\|_{L^{\infty)}}=0\Leftrightarrow\tau=0$ 显然.

(II) $\|\gamma+\tau\|_{L^{\infty)}}\leq\|\gamma\|_{L^{\infty)}}+\|\tau\|_{L^{\infty)}}$.

证 由 Minkowski 不等式，得到

$$\begin{aligned}\|\gamma+\tau\|_{L^{\infty)}}&=\sup_{0<\varepsilon<1}\left(\varepsilon\int_{\Omega}|\gamma+\tau|^{1/\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\varepsilon}\\&\leq\sup_{0<\gamma<1}\varepsilon^{\varepsilon}\left[\left(\int_{\Omega}|\gamma|^{1/\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\varepsilon}+\left(\int_{\Omega}|\tau|^{1/\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\varepsilon}\right]\\&\leq\|\gamma\|_{L^{\infty)}}+\|\tau\|_{L^{\infty)}}.\end{aligned}$$

∎

(III) $\|\lambda\tau(x)\|_{L^{\infty)}}=|\lambda|\|\tau(x)\|_{L^{\infty)}},\forall\lambda\in\mathrm{R}$ 显然.

于是， $L^{\infty)}(\Omega)$ 成为 B^{*} 空间 (赋范线性空间). $L^{\infty)}(\Omega)$ 空间还有其他性质，本文涉及不到，从略.

注 4 引入 $L^{\infty)}(\Omega)$ 空间的思想来自于大 $L^{p}(\Omega)$ 空间 $L^{p)}(\Omega,\theta)$, 它由所有满足

$$u\in\bigcap_{1\leq s<p}L^{s}(\Omega)$$

且

$$\mathcal{L}^{p}(u;\varepsilon,\theta)=\left[\varepsilon^{\theta}\fint_{\Omega}|u|^{p-\varepsilon}\mathrm{d}x\right]^{1/(p-\varepsilon)}<\infty,\quad 0\leq\theta\leq 1,\quad 0<\varepsilon\leq p-1$$

的函数组成，其范数由

$$\|u\|_{p,\theta)}=\sup_{0<\varepsilon\leq p-1}\mathcal{L}^{p}(u;\varepsilon,\theta)$$

给出. Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 在范数

$$\|\cdot\|_{p}+\|\bigtriangledown\cdot\|_{p,\theta)}$$

之下的完备化空间称为大 Sobolev 空间, 记为 $W^{1,p)}(\Omega;\theta)$. 于是, 若 $u\in W^{1,p)}(\Omega,\theta)$, $0\leq\theta<1$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{\Omega}|\bigtriangledown u|^{p-\varepsilon}\mathrm{d}x=0.$$

下面研究 Leray-Lions 方程 ($\mathcal{A}$ - 调和方程)

$$\operatorname{div}\mathcal{A}(x,\bigtriangledown u(x))=0.\tag{7}$$

考虑比 (6) 式的条件更广的情形，即设 $\mathcal{A}(x,\xi):\Omega\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 满足：存在 $1<p<\infty$, $0<\gamma(x)\le\tau(x)<\infty$, a.e.$\Omega$, 使得

1) $\langle\mathcal{A}(x,\xi),\xi\rangle\ge\gamma(x)|\xi|^p$;

2) $|\mathcal{A}(x,\xi)|\le\tau(x)|\xi|^{p-1}$;

定义 3[5] 称 $u\in W^{1,r}(\Omega)$, $\max\{1,p-1\}<r<p$ 为 (7) 式的很弱解，若对所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,\triangledown u(x)),\triangledown\varphi(x)\rangle\mathrm{d}x=0.$$

定理 1 设 $\gamma(x)>0$, a.e. Ω, $\tau(x)\in L^{\infty)}(\Omega)$. 若 $u\in W^{1,p)}(\Omega,\theta)$, $0\le\theta<1$, 为 (7) 式的很弱解，则 u 在 Ω 中弱单调.

证 对任意球 $B\subset\Omega$ 及 $\forall 0<\varepsilon<1$, 设

$$\psi=(u-M)^+-(m-u)^+\in W_0^{1,p-\varepsilon}(B),$$

则

$$\triangledown\psi=\begin{cases}0, & 当\ m\le u(x)\le M,\\ \triangledown u(x), & 否则，例如在集合\ E\subset B\ 上\ .\end{cases}$$

取 Hodge 分解 (见文献 [5])

$$|\triangledown\psi|^{-(p-\varepsilon)\varepsilon}\triangledown\psi=\triangledown\varphi+h,$$

则有

$$\|h\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-(p-\varepsilon)\varepsilon}}\le C(p-\varepsilon)\varepsilon\|\triangledown\psi\|_{p-\varepsilon}^{1-(p-\varepsilon)\varepsilon}.$$

于是，由很弱解的定义得到

$$\int_E\langle\mathcal{A}(x,\triangledown u),|\triangledown u|^{-(p-\varepsilon)\varepsilon}\triangledown u\rangle\mathrm{d}x=\int_E\langle\mathcal{A}(x,\triangledown u),h\rangle\mathrm{d}x.$$

由 Hölder 不等式，并利用条件 1) 、 2) 得到

$$\begin{aligned}&\int_E\gamma(x)|\triangledown u|^{p-(p-\varepsilon)\varepsilon}\mathrm{d}x\\ \le&\int_E\tau(x)|\triangledown u|^{p-1}|h|\mathrm{d}x\le\|\tau(x)\|_{\frac{p-\varepsilon}{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}}\|\triangledown u\|_{p-\varepsilon}^{p-1}\|h\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-(p-\varepsilon)\varepsilon}}\\ \le&\, C(p-\varepsilon)\varepsilon\|\tau\|_{\frac{p-\varepsilon}{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}}\|\triangledown u\|_{p-\varepsilon}^{p-(p-\varepsilon)\varepsilon}\\ \le&\, C(p-\varepsilon)\left(\varepsilon\int_E|\tau(x)|^{\frac{p-\varepsilon}{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon}}\left(\varepsilon\int_E|\triangledown u|^{p-\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-(p-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

由于 $\tau(x)\in L^{\infty)}(\Omega)$, 知上式右端第一项积分当 ε 充分小时

$$=\left(\frac{p-\varepsilon}{p-1-\varepsilon}\right)^{\frac{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon}}\left(\frac{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon}\int_E|\tau(x)|^{\frac{p-\varepsilon}{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon}}<\infty.$$

而右端第二项积分当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\to 0$. 这样，上式右端当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\to 0$, 从而 $\triangledown u(x)=0$, a.e. E, 这蕴涵在 B 中 $\triangledown\psi=0$, 即 $m\le u(x)\le M$, a.e. B. 于是 (7) 式的很弱解 $u\in W^{1,p)}(\Omega)$ 在 Ω 中弱单调. ▍

由前面的推导知，对于 Beltrami 方程组的每一分量函数 $u(x)=f^i(x)$, 满足 $\mathcal{A}$ - 调和方程 (6), 其中 $\gamma(x)=\beta(x)^{-n/2}$, $\tau(x)=\alpha(x)^{-n/2}$. 这样便有

定理 2 设 $\alpha(x)<\infty$, a.e. Ω, $\beta(x)^{-n/2}\in L^{\infty)}(\Omega)$, 则满足 (5) 式的 Beltrami 方程组 (2) 的每一分量函数 $f^i\in W^{1,n)}(\Omega,\theta)$, $0\le\theta<1$, $i=1,2,\cdots,n$, 在 Ω 中弱单调.

参 考 文 献

[1] Manfredi JJ. Weakly monotone functions. J Geom Anal, 1994, **3**: 393–402

[2] Iwaniec T, Koskela P, Onninen J. Mappings of finite distortion: monotonicity and continuity. Invent Math, 2001, **144**: 507–531

[3] 高红亚． $\mathcal{A}$ - 调和方程很弱解的正则性．数学学报， 2001, **44**(4): 605–610

[4] Müller S, Spector S. An existence theory for nonlinear elasticity that allows for cavitation. Arch Rational Mech Anal, 1995, **131**(1): 1–66

[5] Iwaniec T, Martin G. Geometric Function Theory and Nonlinear Analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001

[6] 高红亚，吴泽民．关于双特征 Beltrami 方程组．数学物理学报， 2002, **22A**(4): 433–440

Weak Monotonicity for the Component Functions of Weak Solutions of Beltrami System

[1,2]Gao Hongya [1]Wang Hongmin [3]Gu Guangze

([1]*College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Hebei Baoding 071002;*
[2]*Hebei Provincial Center of Mathematics, Shijiazhuang 050016;*
[3]*College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082*)

Abstract: A new class of function space is introduced. The weak monotonicity of very weak solutions of $\mathcal{A}$-harmonic equation is studied by using this function class. The weak monotonicity for component functions of weak solutions of Beltrami system in space is derived.

Key words: Beltrami system; Weak monotonicity; $\mathcal{A}$-harmonic equation; Very weak solution.

MR(2000) Subject Classification: 35J65; 30C62