2004,**24A**(2):216−222

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

# Banach 空间中渐近非扩张映射逼近序列的强收敛性*

胡长松

(湖北师范学院数学系　黄石 435002)

**摘要**:该文研究了序列$\{x_n\}$的收敛性. 其中

$$x_0 \in C,\ x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1-\alpha_n)x,\quad n = 0,1,2,\cdots,$$

这里 $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$,$T$ 是 Banach 空间中非空闭凸子集 $C$ 到自身的渐近非扩张映射. 同时证明了:当 $z_n = (1-\frac{t_n}{k_n})u + \frac{t_n}{k_n}T^n z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_n-1}{1-t_n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n - Tz_n\| = 0$ 时,$T$ 有不动点当且仅当$\{z_n\}$有界. 这时$\{z_n\}$强收敛于 $T$ 的不动点.

**关键词**:渐近非扩张映射;强收敛;Banach 极限.

**MR(2000)主题分类**:47H09;49M05　　**中图分类号**:O177.91　　**文献标识码**:A

**文章编号**:1003-3998(2004)02-216-07

## 1　引言

设 $C$ 是 Banach 空间 $X$ 中的非空闭凸子集 $T:C\to C$ 称为渐近非扩张映射[1],如果存在实数列$\{k_n\}$,$k_n \geqslant 1$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n = 1$ 使得

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant k_n \|x - y\| \quad \forall\, x,y \in C,\ n = 1,2,\cdots, \tag{1.1}$$

当 $k_n = 1$ 时,$T$ 称为非扩张映射. 迭代过程

$$x_0 \in C, x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n)x,\quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{1.2}$$

这里 $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$ 且 $\alpha_n \to 1$. 关于这一迭代过程,Reich[2]中提出下列问题

设 $X$ 是 Banach 空间. 是否存在数列$\{\alpha_n\}$使得对 $X$ 的关于非扩张映射具有不动点性的弱紧凸子集 $C$ 及 $C$ 上的任意非扩张映射 $T$ 和 $\forall\, x \in C$,由(1,2)定义的序列$\{x_n\}$收敛于 $T$ 的不动点?

Reich 在[2]中证明了,当 $X$ 是一致光滑的 Banach 空间,$1-\alpha_n = n^{-\alpha}$,$0<\alpha<1$ 时问题的回答是肯定的. Wittmann 在[3]中也肯定地回答了问题,如果 $X$ 是 Hilbert 空间且$\{\alpha_n\}$满足

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1, \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 1, \sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n) = \infty \text{ 且 } \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n| < \infty,$$

在[4]中 Shioji 和 Takahashi 把 Wittmann 的结果推广到 Banach 空间.

本文将把 Shioji 的结果推广到渐近非扩张映射上去. 我们将涉及下述迭代过程

$$x_0 \in C, x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1-\alpha_n)x,\quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{1.3}$$

收稿日期:2001-11-20;修订日期:2002-03-18

* 基金项目:湖北省教育厅重大科研项目(2001Z06003)资助

这里 $0\leqslant\alpha_n\leqslant 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$，$T$ 是从 $C$ 到自身的渐近非扩张映射.

## 2　预备知识

$X$ 和 $X^*$ 分别表示实的 Banach 空间和它的对偶空间. $x^*\in X^*$ 在 $x\in X$ 的值表示为 $\langle x,x^*\rangle$. $N$ 和 $N_+$ 分别表示非负整数集与正整数集. $\{x_n\}\subset X$，$x_n\rightharpoonup x$ 表示 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x$. 设 $C$ 是 $X$ 的非空闭凸子集，$T$ 是从 $C$ 到 $C$ 的映射，$F(T)=\{x\in C:Tx=x\}$ 表示 $T$ 的不动点集. $C$ 的非空有界闭凸子集 $E$ 称为有性质(P)：如果 $x\in E$，就有 $\omega_w(x)\subset E$，这里 $\omega_w=\{y\in X:y=w-\lim\limits_{j\to\infty}T^{n_j}x$ 对某正整数子列 $n_n\uparrow\infty\}$ 称为 $T$ 在 $x$ 的弱极限集.

$J$ 表示从 $X$ 到 $2^{X^*}$ 的对偶映射，即

$$Jx=\{y\in X^*:\langle x,y\rangle=\|x\|^2=\|y\|^2\},\ x\in X.$$

设 $S(X)=\{x\in X:\|x\|=1\}$. $X$ 的范数称为一致 Gâteaux 可微如果对 $y\in S(X)$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}\tag{2.1}$$

关于 $x\in S(X)$ 一致存在. $X$ 称为一致光滑的，如果对 $x,y\in S(X)$ 极限 (2.1) 一致存在. 我们知道当 $X$ 的范数一致 Gâteaux 可微时，对偶映射 $J$ 是单值的且在 $X$ 的有界子集上范-弱 $^*$ 一致连续.

设 $\mu$ 是 Banach 极限，$(a_0,a_1,a_2,\cdots)\in l^\infty$. 用 $\mu_n(a_n)$ 表示 $\mu(a_0,a_1,a_2,\cdots)$. 为了证明我们的结果需要下述命题.

**命题 1**[5]　设 $a$ 是一个实数，$(a_0,a_1,a_2,\cdots)\in l^\infty$ 使得对所有 Banach 极限 $\mu$ 有 $\mu_n(a_n)\leqslant a$ 和 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_{n+1}-a_n)\leqslant 0$. 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\leqslant a$.

**命题 2**[6]　设 Banach 空间 $X$ 具有一致 Gâteaux 可微范数，$C$ 是 $X$ 的非空闭凸子集，$\{x_n\}$ 是 $X$ 的有界序列，$\mu$ 是 Banach 极限，$z\in C$. 则 $\mu_n\|x_n-z\|^2=\min\limits_{y\in C}\mu_n\|x_n-y\|^2$ 当且仅当 $\mu_n\langle y-z,J(x_n-z)\rangle\leqslant 0$，$\forall y\in C$.

设 $C$ 是 Banach 空间 $X$ 的非空闭凸子集，$d(C)=\sup\{\|x-y\|:x,y\in C\}$ 是 $C$ 的直径. 对 $x\in C$，令 $r(x,C)=\sup\{\|x-y\|:y\in C\}$，$r(C)=\inf\{r(x,C):x\in C\}$. $X$ 的正规结构常数定义为[7]

$$N(X)=\inf\{d(C)/r(C):C\text{ 是 }X\text{ 的有界闭凸子集且 }d(C)>0\},$$

当 $N(X)>1$ 时则称 $X$ 有一致正规结构. 具一致正规结构的 Banach 空间是自反的.

## 3　强收敛定理

在这一节中设 $X$ 是一致 Gâteaux 可微的具一致正规结构的 Banach 空间，$C$ 是 $X$ 的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是渐近非扩张映射. 取定 $u\in C$，定义 $S_n:C\to C$

$$S_n(x)=(1-\frac{t_n}{k_n})u+\frac{t_n}{k_n}T^nx,$$

这里 $\{t_n\}\subset[0,1)$，$t_n\to 1$. 则由 Banach 压缩映射原理 $S_n$ 在 $C$ 中有唯一的不动点 $z_n$.

我们先把 Takahashi[8,th1]结果推广到渐近非扩张映射，得到下述定理.

**定理 1**　设 $\{k_n\}$ 与 $\{t_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n-1}{1-t_n}=0$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n - Tz_n\| = 0, \tag{3.1}$$

则 $T$ 有不动点当且仅当$\{z_n\}$有界,这时$\{z_n\}$强收敛到 $T$ 的不动点.

**证** 对 $w\in F(T)$, 我们有

$$\begin{aligned}\|w-z_n\| &\leqslant \frac{t_n}{k_n}\|w-T^n z_n\| + (1-\frac{t_n}{k_n})\|w-u\| \\ &\leqslant t_n\|w-z_n\| + (1-\frac{t_n}{k_n})\|w-u\|,\end{aligned}$$

从而 $\|w-z_n\|\leqslant\frac{k_n-t_n}{k_n(1-t_n)}\|w-u\|$. 因此由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_n-1}{1-t_n}=0$ 得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|w-z_n\|\leqslant\|w-u\|$. 于是$\{z_n\}$有界.

设$\{z_n\}$是有界的,定义 $C$ 上实函数 $g$

$$g(x) = \mu_n\|z_n - x\|^2 \quad \forall x\in C,$$

这里 $\mu$ 是 Banach 极限. 记

$$E = \{z\in C: g(z) = \inf_{x\in C} g(x)\},$$

则 $E$ 是非空有界闭凸集[6]. 虽然 $E$ 不一定是 $T$ 不变但具有性质(P). 事实上,当 $x\in E$, $y=w-\lim\limits_{j\to\infty}T^{m_j}x$ 时, 则由 $g$ 的弱下半连续性和(3.1)得

$$\begin{aligned}g(y) &\leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} g(T^{m_j}x) \leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} g(T^m x) \\ &= \overline{\lim_{m\to\infty}}\mu_n\|z_n - T^m x\|^2 = \overline{\lim_{m\to\infty}}\mu_n\|T^m z_n - T^m x\|^2 \\ &\leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} k_m^2\mu_n\|z_n - x\|^2 = g(x) = \inf_{z\in C} g(z).\end{aligned}$$

这就证明了 $y\in E$,因此 $E$ 具有性质(P). 于是由 Zorn 引理可获得一个具有性质(P)的 $E$ 的极小子集 $E_0$.

任取 $x_0\in E_0$,$\{T^n x_0\}$ 是有界的. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$ 及 $N(X)>1$,则存在 $n_0\in N$ 使得 $\sup\limits_{n\geqslant n_0}k_n< N(X)^{\frac{1}{2}}$. 令 $k=\sup\limits_{n\geqslant n_0}k_n$, $F=T^{n_0}$. 由 $N(X)$的定义,存在 $y_n\in\overline{\mathrm{co}}\{F^j x_0: j\geqslant n\}$($\overline{\mathrm{co}}$表示闭凸包)使得

$$\overline{\lim_j}\|F^j x_0 - y_n\| \leqslant \tilde{N}(X)A(\{F^j x_0: j\geqslant n\}), \tag{3.2}$$

这里 $\tilde{N}(X)=N(X)^{-1}$, $A(u_n)=\lim\limits_n\sup\{\|u_j-u_i\|: i,j\geqslant n\}$称为$\{u_n\}$的渐近直径. 由 $X$ 的自反性$\{y_n\}$有子列$\{y_{n'}\}$弱收敛于 $x_1\in X$. 根据(3.2)和$\overline{\lim\limits_n}\|F^n x_0 - y\|$ 的弱下半连续性, 得到

$$\overline{\lim_n}\|F^n x_0 - x_1\| \leqslant \tilde{N}(X)A(\{F^n x_0\})$$

且 $x_1\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{co}}\{F^j x_0: j\geqslant n\}$及

$$\|z - x_1\| \leqslant \overline{\lim_n}\|z - F^n x_0\| \quad \forall z\in X$$

再由 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{co}}\{T^j x_0: j\geqslant n\}=\overline{\mathrm{co}}\omega_w(x_0)$[9], 可知 $x_1\in E_0$. 重复上述过程可获得$\{x_n\}\subset E_0$ 具有性质: $\forall m\in N_+$

$$\overline{\lim_n}\|F^n x_{m-1} - x_m\| \leqslant \tilde{N}(X)A(\{F^n x_{m-1}\}),$$

$$\|z - x_m\| \leqslant \overline{\lim_n}\|z - F^n x_{m-1}\| \quad \forall z\in X.$$

令 $r(x_m)=\sup\limits_N \| x_m-F^N x_m \|$,则 $A(\{F^N x_m\})\leqslant kr(x_m)$与

$$\begin{aligned} r(x_m) &\leqslant \sup_N \overline{\lim_n} \| F^N x_m - F^n x_{m-1} \| \leqslant k \overline{\lim_n} \| x_m - F^n x_{m-1} \| \\ &\leqslant k\widetilde{N}(X)A(\{F^n x_{m-1}\}) \leqslant k^2 \widetilde{N}(X) r(x_{m-1}), \end{aligned}$$

由 $\| x_{m+1}-x_m \| \leqslant \| x_{m+1}-F^n x_m \| + \| F^n x_m - x_m \| \leqslant \| x_{m+1}-F^n x_m \| + r(x_m)$,得

$$\begin{aligned} \| x_{m+1} - x_m \| &\leqslant \overline{\lim_n} \| x_{m+1} - F^n x_m \| + r(x_m) \leqslant \widetilde{N}(X)A(\{F^n x_m\}) + r(x_m) \\ &\leqslant (k\widetilde{N}(X)+1) r(x_m) \leqslant (k\widetilde{N}(X)+1)[k^2\widetilde{N}(X)]^m r(x_0), \end{aligned}$$

再由 $k^2\widetilde{N}(X)<1$,可知$\{x_n\}$强收敛于 $F$ 的不动点. 从而存在 $z_0\in E_0$ 使得 $T^{n_0} z_0 = z_0$. 记 $S=\{z_0, Tz_0, \cdots, T^{n_0-1} z_0\}$. 显然有 $S\subset E_0$ 且 $TS=S$. 若 $d(S)=0$,则 $z_0$ 是 $T$ 的不动点. 否则 $d_0=d(S)>0$,则由 $S$ 有正规结构可知存在 $w\in \overline{\mathrm{co}}(S)$使得 $r:=\sup\limits_{y\in S} \| w-y \| <d$. 令 $D=\{x\in \overline{\mathrm{co}}(S): \sup\limits_{y\in S} \| x-y \| \leqslant r\}$. 则 $D$ 是 $E_0$ 的非空闭凸真子集. 对 $x\in D$ 及 $y=w-\lim\limits_j T^{n_j} x$,由 $TS=S$,则对每个 $z\in S$ 和 $n\in N_+$ 存在 $z_n\in S$ 使得 $z=T^n z_n$. 从而

$$\begin{aligned} \| z - y \| &\leqslant \overline{\lim_n} \| z - T^n x \| = \overline{\lim_n} \| T^n z_n - T^n x \| \\ &\leqslant \overline{\lim_n} k_n \| z_n - x \| \leqslant \sup_{v\in S} \| v - x \| \leqslant r, \end{aligned}$$

于是 $y\in D$,因此 $D$ 具有性质(P). 这与 $E_0$ 的极小性矛盾. 所以 $Tz_0=z_0$.

由于 $z_0$ 是 $g$ 在 $C$ 上的极小值点,根据命题 2 得到

$$\mu_n \langle z - z_0, J(z_n - z_0) \rangle \leqslant 0,$$

$\forall z\in C$,特别有

$$\mu_n \langle u - z_0, J(z_n - z_0) \rangle \leqslant 0. \tag{3.3}$$

另一方面,$\forall v\in F(T)$,我们有

$$\begin{aligned} \langle z_n - T^n z_n, J(z_n - v) \rangle &= \langle z_n - v, J(z_n - v) \rangle + \langle v - T^n z_n, J(z_n - v) \rangle \\ &\geqslant \| z_n - v \|^2 - \| v - T^n z_n \| \| z_n - v \| \\ &\geqslant -(k_n - 1) \| z_n - v \|^2 \geqslant -(k_n - 1) d_v^2. \end{aligned}$$

这里 $d_v=\sup\limits_n \| z_n - v \|$. 因为 $z_n - T^n z_n = \dfrac{k_n - t_n}{t_n}(u - z_n)$,所以

$$\langle z_n - u, T(z_n - v) \rangle \leqslant s_n d_v^2, \tag{3.4}$$

这里 $s_n=t_n(k_n-1)/(k_n-t_n)\to 0$,从而

$$\mu_n \langle z_n - u, J(z_n - v) \rangle \leqslant 0,$$

特别有

$$\mu_n \langle z_n - u, J(z_n - z_0) \rangle \leqslant 0.$$

结合 (3.3),得到

$$\mu_n \langle z_n - z_0, J(z_n - z_0) \rangle = \mu_n \| z_n - z_0 \|^2 \leqslant 0,$$

于是存在$\{z_n\}$的子列$\{z_{n_j}\}$强收敛于 $z_0$. 如果$\{z_n\}$有子列$\{z_{m_j}\}$强收敛于某个 $y_0$,则 由(3.1)可知 $y_0$ 是 $T$ 的不动点,于是由(3.4)有

$$\langle z_0 - u, J(z_0 - y_0) \rangle \leqslant 0 \text{ 与 } \langle y_0 - u, J(y_0 - z_0) \rangle \leqslant 0 ,$$

由于对偶映射在 $X$ 的每个有界子集上是范-弱$^*$一致连续的可知

$$\langle z_0 - y_0, J(z_0 - y_0) \rangle = \| z_0 - y_0 \|^2 \leqslant 0.$$

所以 $z_0=y_0$. 这就证明了$\{z_n\}$强收敛于 $z_0$. ▌

**定理 2**　设 $T$ 是从 $C$ 到 $C$ 的使得 $F(T)$非空的渐近非扩张映射,$x\in C$,$\{z_n\}$强收敛于 $z$

$\in F(T)$，其中 $z_n\in C$ 满足 $z_n=(1-\frac{t_n}{k_n})x+\frac{t_n}{k_n}T^n z_n$，这里 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(k_n-1)/(1-t_n)=0$. 设$\{x_n\}$是由(1.3)定义的序列，其中$\{\alpha_n\}$满足

$$0<\alpha_n k_n<1 \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n k_n)=\infty,\ \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty,$$

如果

$$\|x_n-Tx_n\|\leqslant|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\quad \forall n\in N, \tag{3.5}$$

则$\{x_n\}$强收敛于 $z$.

**引理 1** 设$\{\rho_n\}$，$\{\sigma_n\}$和$\{\gamma_n\}$是三个非负数列满足

$$\beta_{n+1}\leqslant(1-\delta_n)\beta_n+\sigma_n+\gamma_n,$$

其中 $\delta_n\in(0,1]$，$\sum\limits_1^{\infty}\delta_n=\infty$，$\sum\limits_1^{\infty}\gamma_n<\infty$，$\sigma_n=o(\delta_n)$. 则 $\overline{\lim\limits_n}\beta_n\leqslant\overline{\lim\limits_n}\frac{\sigma_n}{\delta_n}$.

**证** 任给 $\varepsilon>\overline{\lim\limits_n}\frac{\sigma_n}{\delta_n}$，取 $k$ 使得 $\sigma_n<\varepsilon\delta_n$，$\forall n\geqslant k$ 与 $\sum\limits_k^{\infty}\gamma_n<\varepsilon$. 由

$$\beta_{n+1}\leqslant\prod_{j=k}^{n}(1-\delta_j)\beta_k+\Big[\sum_{j=k}^{n}\delta_j\prod_{i=j+1}^{n}(1-\delta_j)\Big]\varepsilon+\sum_{j=k}^{n}\gamma_j$$

和 $\delta_n\in(0,1]$，$\sum\limits_1^{\infty}\delta_n=\infty$，可得$\overline{\lim\limits_n}\beta_n\leqslant\varepsilon$. 令 $\varepsilon\to\overline{\lim\limits_n}\frac{\sigma_n}{\delta_n}$，我们获得$\overline{\lim\limits_n}\beta_n\leqslant\overline{\lim\limits_n}\frac{\sigma_n}{\delta_n}$. ∎

**引理 2** $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$.

**证** 取 $p\in F(T)$，则有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|&\leqslant\alpha_n\|T^n x_n-p\|+(1-\alpha_n)\|x-p\|\\&\leqslant\alpha_n k_n\|x_n-p\|+(1-\alpha_n)\|x-p\|\\&\leqslant\alpha_n k_n\|x_n-p\|+[(1-\alpha_n k_n)+\alpha_n(k_n-1)]\|x-p\|,\end{aligned}$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\delta_n k_n)=\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$ 和引理 1，获得$\overline{\lim\limits_n}\|x_n-p\|\leqslant\|x-p\|$. 记 $M=\sup\limits_n\{\|T^n x_{n-1}\|+\|x\|+k_{n-1}\}$. 由于

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|&\leqslant\alpha_n k_n\|x_n-x_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|(\|x\|+\|T^n x_{n-1}\|)\\&\quad+\alpha_{n-1}k_{n-1}\|x_{n-1}-Tx_{n-1}\|\\&\leqslant\alpha_n k_n\|x_n-x_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|M,\end{aligned}$$

$\forall n\in N_+$，再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n k_n)=\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n-1}-\alpha_n|<\infty$ 和引理 1 可得结论. ∎

**引理 3** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\langle x-z,J(x_n-z)\rangle\leqslant 0$.

**证** 设 $\mu$ 是 Banach 极限，$m\in N_+$. 由(3.5)和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n-1}-\alpha_n|<\infty$，得到

$$\mu_n\|x_n-T^m z_m\|^2=\mu_n\|T^m x_n-T^m z_m\|^2\leqslant k_m^2\mu_n\|x_n-z_m\|^2.$$

根据$\frac{t_m}{k_m}(x_n-T^m z_m)=(x_n-z_m)-(1-\frac{t_m}{k_m})(x_n-x)$，我们有

$$\begin{aligned}\Big(\frac{t_m}{k_m}\Big)^2\|x_n-T^m z_m\|^2&\geqslant\|x_n-z_m\|^2-2\Big(1-\frac{t_m}{k_m}\Big)\langle x_n-x,J(x_n-z_m)\rangle\\&\geqslant-\Big(1-2\frac{t_m}{k_m}\Big)\|x_n-z_m\|^2+2\Big(1-\frac{t_m}{k_m}\Big)\langle x-z_m,J(x_n-z_m)\rangle,\end{aligned}$$

$\forall m\in N$. 由以上不等式产生

$$\frac{1}{2}\Big[\Big(1-\frac{t_m}{k_m}\Big)+\frac{t_m^2}{k_m}(k_m+1)\frac{k_m-1}{k_m-t_m}\Big]\mu_n\|x_n-z_m\|^2\geqslant\mu_n\langle x-z_m,J(x_n-z_m)\rangle.$$

再由 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{k_m-1}{k_m-t_m}\leqslant\lim\limits_{m\to\infty}\frac{k_m-1}{1-t_m}=0$ 和 $\lim\limits_{m\to\infty}\Big(1-\frac{t_m}{k_m}\Big)=0$，我们得到

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\mu_n\langle x-z_m,J(x_n-z_m)\rangle\leqslant 0,$$

由 $z_n\to z$ 及 $X$ 的范数一致 Gãteaux 可微，获得

$$\mu_n\langle x-z,J(x_n-z)\rangle\leqslant 0.$$

另一方面由引理 1 有

$$\lim_{m\to\infty}|\langle x-z,J(x_{n+1}-z)\rangle-\langle x-z,J(x_n-z)\rangle|=0,$$

再由命题 1，证得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle x-z,J(x_n-z)\rangle\leqslant 0.$$ ▍

**定理 2 的证明** 由 $\alpha_n(T^nx_n-z)=(x_{n+1}-z)-(1-\alpha_n)(x-z)$，我们有

$$\|\alpha_n(T^nx_n-z)\|^2\geqslant\|x_{n+1}-z\|^2-2(1-\alpha_n)\langle x-z,J(x_{n+1}-z)\rangle,$$

从而

$$\|x_{n+1}-z\|^2\leqslant\alpha_nk_n\|x_n-z\|^2+2(1-\alpha_n)\langle x-z,J(x_{n+1}-z)\rangle,$$

$\forall n\in N$. 任取 $\varepsilon>0$，由引理 3，存在 $m\in N$ 使得

$$\langle x-z,J(x_{n+1}-z)\rangle\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

$\forall n\geqslant m$. 于是

$$\|x_{n+1}-z\|^2\leqslant\alpha_nk_n\|x_n-z\|^2+[(1-\alpha_nk_n)+\alpha_n(k_n-1)]\varepsilon,$$

再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_nk_n)=\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$ 和引理 1，得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-z\|^2=\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_{n+m}-z\|^2\leqslant\varepsilon.$$

这就证明了$\{x_n\}$强收敛于 $z$. ▍

**注记** 取 $k_n=1+n^{-(1+\alpha)}(0<\alpha<1)$ 和 $\alpha_n=1-n^{-\beta}\big(\frac{1+\alpha}{2}<\beta<1\big)$，$t_n=1-\sqrt{k_n-1}$，则满足定理 2 的条件. 所以定理 2 推广了 Shioji 和 Takahashi 在[4]中的相关结果.

## 参 考 文 献


[1] Goebel K，Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. Proc Am Math Soc，1972，**35**：171－174

[2] Reich S. Some problems and results in fixed point theory. Contemp Math，1983，**21**：179－187

[3] Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings. Arch Math，1992，**58**：486－491

[4] Shioji N，Takahashi W. Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces. Pro Am Math Soc，1997，**125**(12)：3641－3645

[5] Lorentz G G. A contribution to the theory of divergent series. Acta Math，1948，**80**：167－190

[6] Takahashi W，Ueda Y. On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators. J Math Anal Appl，1984，**104**：546－553

[7] Bynum W L. Normal structure coefficients for Banach spaces. Pacif J Math，1980，**86**：427－436

[8] Takahashi W，Gangeun K. Strong convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonself-mappings in Banach space. Nonlinear Analysis，1998，**32**(3)：447－454

[9] Bruck R E. On the almost-convergence of iterates of a nonexpansive mapping in Hilbert space and the structure of the weak-limit set. Israel J Math, 1978, **29**: 1－16

[10] Casini E, Maluta E. Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings in spaces with uniformly normal structure. Nonlinear Analysis, 1985, **9**: 103－108

# Strong Convergence of Approximated Sequences for Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces

Hu Changsong

(*Department of Mathematics, Hubei Normal University, Huangshi* 435002)

**Abstract**: In this paper, the author studies the convergence of the sequence defined by

$$x_0 \in C, x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1-\alpha_n)x, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

where $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$ and $T$ is an asymptotically nonexpansive mapping from a closed convex subset of a Banach space into itself and it is proved that, if $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_n-1}{1-t_n}=0$, $z_n=(1-\frac{t_n}{k_n})u+\frac{t_n}{k_n}T^n z_n$ and $\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n-Tz_n\|=0$ holds, then $T$ has a fixed point if and only if $\{z_n\}$ remains bounded as $n\to\infty$, in this case $\{z_n\}$ converges strongly to a fixed point of $T$.

**Key words**: Asymptotically nonexpansive mapping; Strong convergence; Banach limits.

**MR(2000) Subject Classification**: 47H09; 49M05