2005,**25A**(4):503－508

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

IFS 中一个经典遍历性质的一些推广*

[1] 马东魁　[2] 徐志庭

([1] 华南理工大学应用数学系　广州 510640；[2] 华南师范大学数学系　广州 510631)

摘要:该文针对概率迭代函数系统(IFS),给出一些遍历性质,这些结果推广了 Elton[2] 的结果,一个结果在某种意义上与 Fustenberg[4] 和 Assani[1] 关于弱混合系统中的结果类似.

关键词:迭代函数系统(IFS);不变测度;遍历;Banach 极限.

MR(2000)主题分类:37A30; 28D05　　**中图分类号**:O177.99　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)04-503-06

1　引言

令 X 为一个紧致度量空间,$W=\{w_1,\cdots,w_L\}$ 是 X 上 L 个压缩映射, $P=(p_1,\cdots,p_L)$ 是一个正的概率向量,称(X,W,P)是一个概率迭代函数系统(IFS). 文[5]中 Hutchinson 证明存在惟一的在 Markov 算子 M 下不变的概率测度 μ, 其中 M 定义为

$$M:\mathscr{M}(X)\rightarrow \mathscr{M}(X),$$

$$M(\nu)B=\sum_{i=1}^{L}p_i\nu(w_i^{-1}(B)),$$

此处 $\mathscr{M}(X)$表示 X 上所有 Borel 概率测度全体. B 为 X 中 Borel 子集, 不变测度 μ 也称为自相似测度.

算子 U 定义为

$$U:C(X)\rightarrow C(X),$$

$$Uf(x)=\sum_{i=1}^{L}p_if(w_i(x)),$$

U 为 M 的伴随算子. 此处 $C(X)$表示 X 上所有连续函数的全体.

令 $\Sigma=\prod_{1}^{\infty}\{1,2,\cdots,L\}$ 为符号空间, $\bar{P}$ 为由测度 $P(\{i\})=p_i$ 诱导的乘积测度.

我们使用与文[3]相同的符号,令

$$\pi^n:\Sigma\rightarrow\Sigma^n,$$

$$\pi^n(\sigma)=(\sigma_n,\ \sigma_{n-1},\cdots,\ \sigma_1)$$

用 σ^n 表示 $\pi^n(\sigma)$,用 w_{σ^n} 表示 $w_{\sigma_n}\circ w_{\sigma_{n-1}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1}$,这里 $\sigma=(\sigma_1,\ \sigma_2,\cdots,\ \sigma_n,\cdots)$, $\sigma^n\in\Sigma^n$.

下面定理 A 由 Elton 在文 [2]中证得,Forte 和 Mendivil 在文 [3]中给出简化证明. 定理 B 由 Fustenberg,Katznelson 和 Ornstein 在文[4]中得到,定理 C 由 Assani 在文 [1]中得到.

定理 A　令(X,W,P)是一个概率迭代函数系统,则对任意 $f(x)\in C(X)$,任意 $x\in X$,

收稿日期:2003-11-28;修订日期:2004-09-11

* 基金项目:教育部博士点基金(1999055810)资助

有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(w_{\sigma_i}\circ w_{\sigma_{i-1}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1}(x))=\int_X f\,\mathrm{d}\mu,$$

相对于 $\bar{P}$ 而言,对几乎所有 $\sigma\in\Sigma$ 成立.其中 μ 是自相似测度.

定理 B 令$(X,\mathscr{B},\mu,T)$ 是一个弱混合动力系统,则对任意正整数 m,对任意 $f_1,f_2,\cdots,f_m\in L^\infty$, 在 L^2 范数意义下均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}T^jf_1\cdot T^{2j}f_2\cdots T^{mj}f_m=\prod_{i=1}^{m}\int f_i\,\mathrm{d}\mu.$$

定理 C 令$(X,\mathscr{B},\mu,T)$是一个弱混合动力系统,T 限制在其 Pinsker 代数上具有奇异谱,则对任意正整数 m,对任意 $f_1,f_2,\cdots,f_m\in L^\infty$,均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(T^jx)\cdot f_2(T^{2j}x)\cdots f_m(T^{mj}x)=\prod_{i=1}^{m}\int f_i\,\mathrm{d}\mu.\quad \text{a. e.}.$$

2 本文结论

设 $X_i(i=1,2,\cdots,m)$是 m 个紧致度量空间,$(X_i,W_i,P_i)(i=1,2,\cdots,m)$是 m 个概率迭代函数系统. $W_i=\{w_1^{(i)},w_2^{(i)},\cdots,w_{L_i}^{(i)}\}$,$P_i=(p_1^{(i)},p_2^{(i)},\cdots,p_{L_i}^{(i)})$,$(i=1,2,\cdots,m)$. 对$(X_i,W_i,P_i)$,记其相应自相似测度为 μ_i,$(i=1,2,\cdots,m)$. 设 $\Sigma_i=\prod_1^\infty\{1,2,\cdots,L_i\}$,其乘积测度 $\bar{P}_i$由 P_i 诱导.令 Y 也是一紧致度量空间,$T:Y\to Y$ 为一连续映射,设 $\mu\in\mathscr{M}(Y,T)=\{\nu\in\mathscr{M}(Y)\,|\,\nu\circ T^{-1}=\nu\}$且 μ 为遍历的. 设 $\mathscr{B}(Y)$为 Y 上 Borel σ-代数.本文得到下述结果,其中推论 1 在某种意义上类似定理 B 和定理 C.

定理 1 存在 $\tilde{Y}\in\mathscr{B}(Y)$满足 $\mu(\tilde{Y})=1$,使得对任意 $f\in C(Y)$,任意 $f_i\in C(X_i)$,任意 $x\in\tilde{Y}$,任意 $x_i\in X_i(i=1,2,\cdots,m)$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(T^jx)\prod_{i=1}^{m}f_i(w^{(i)}_{\sigma^{(i)}_{k_ij}}\circ w^{(i)}_{\sigma^{(i)}_{k_ij-1}}\circ\cdots\circ w^{(i)}_{\sigma^{(i)}_1}(x_i))=\int_Y f\,\mathrm{d}\mu\cdot\prod_{i=1}^{m}\int_{X_i}f_i\,\mathrm{d}\mu_i,\quad(2.1)$$

相对于 $\prod_{i=1}^{m}\bar{P}_i$ 而言,对几乎所有 $(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)},\cdots,\sigma^{(m)})\in\prod_{i=1}^{m}\Sigma_i$ 成立.这里 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是任意正整数.若 $k_1=k_2=\cdots k_m=1$, 则是文[6]中的情形.

推论 1 条件同定理 A,则对任意 $f_i\in C(X)(i=1,2,\cdots,m)$和任意 $x\in X$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(w_{\sigma_j^{(1)}}\circ w_{\sigma_{j-1}^{(1)}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1^{(1)}}(x))\cdot f_2(w_{\sigma_{2j}^{(2)}}\circ w_{\sigma_{2j-1}^{(2)}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1^{(2)}}(x))$$

$$\cdots f_m(w_{\sigma_{mj}^{(m)}}\circ w_{\sigma_{mj-1}^{(m)}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1^{(m)}}(x))=\prod_{i=1}^{m}\int_X f_i\,\mathrm{d}\mu,$$

相对于 $\prod_{i=1}^{m}\bar{P}$ 而言,对几乎所有 $(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)},\cdots,\sigma^{(m)})\in\prod_{i=1}^{m}\Sigma$ 成立.这里 μ 是自相似测度.

推论 2 条件同定理 A, 则对任意 $f\in C(X)$和任意 $x\in X$,对任意正整数 k,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(w_{\sigma_{kj}}\circ w_{\sigma_{kj-1}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1}(x))=\int_X f\,\mathrm{d}\mu,$$

相对于 $\bar{P}$ 而言,对几乎所有 $\sigma\in\Sigma$ 成立.这里 μ 仍为自相似测度.若 $k=1$,即定理 A 的情形.

推论 3 条件同定理 A, 则对任意 $x\in X$ 和任意正整数 k,在弱*拓扑意义下,有

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{w_{\sigma_{kj}}\circ w_{\sigma_{kj-1}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1}(x)}\to\mu\quad(n\to\infty),$$

相对于 $\bar{P}$ 而言，对几乎所有 $\sigma\in\Sigma$ 成立. 这里 μ 还是自相似测度，$\delta_x\in\mathscr{M}(X)$ 定义为

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

定理 2　设 $(Y,\mathscr{B},\mu)$ 是一个概率空间，$T:(Y,\mathscr{B},\mu)\to(Y,\mathscr{B},\mu)$ 是遍历的，则对任意 $f\in L^1(\mu)$，存在 $\widetilde{Y}\in\mathscr{B}(Y)$ 满足 $\mu(\widetilde{Y})=1$，使得对任意 $f_i\in C(X_i)$，任意 $x\in\widetilde{Y}$，任意 $x_i\in X_i$（$i=1,2,\cdots,m$），相对于 $\prod_{i=1}^m\bar{P}_i$ 而言，对几乎所有 $(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)},\cdots,\sigma^{(m)})\in\prod_{i=1}^m\Sigma_i$，(2.1) 式成立. 若 $k_1=k_2=\cdots k_m=1$，则是文[6]中的情形.

3　结论的证明

引理 1[7]　若 Y 为一紧致度量空间，$T:Y\to Y$ 是一连续映射，而且 $\mu\in\mathscr{M}(Y,T)$ 是遍历的，则存在 $\widetilde{Y}\in\mathscr{B}(Y)$ 满足 $\mu(\widetilde{Y})=1$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(T^i(x))=\int f\mathrm{d}\mu,\ \forall\, x\in\widetilde{Y},\ \forall\, f\in C(Y).$$

引理 2[7]（Birkhoff 遍历定理）　若 $(Y,\mathscr{B},\mu)$ 是一概率空间，而且 $T:(Y,\mathscr{B},\mu)\to(Y,\mathscr{B},\mu)$ 是遍历变换，则对任意 $f\in L^1(\mu)$，存在 $\widetilde{Y}\in\mathscr{B}$ 满足 $\mu(\widetilde{Y})=1$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(T^i(x))=\int f\mathrm{d}\mu,\ \forall\, x\in\widetilde{Y}.$$

引理 3　若 $(Y,\mathscr{B},\mu)$ 是一概率空间，而且 $T:(Y,\mathscr{B},\mu)\to(Y,\mathscr{B},\mu)$ 是遍历变换，$S_i:\Sigma_i\to\Sigma_i$ 是推移变换（$i=1,2,\cdots,m$），则

$$T\times S_1^{k_1}\times\cdots\times S_m^{k_m}:Y\times\prod_{i=1}^m\Sigma_i\to Y\times\prod_{i=1}^m\Sigma_i$$

是遍历变换. 这里 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是任意正整数.

证　事实上，对任意正整数 k_i，$S_i^{k_i}$ 是弱混合变换（$i=1,2\cdots m$）. 由弱混合等价命题[6]，则有 $T\times S_1^{k_1}$ 是遍历变换，从而有 $T\times S_1^{k_1}\times S_2^{k_2},\cdots,T\times S_1^{k_1}\times S_2^{k_2}\times\cdots\times S_m{}^{k_m}$ 均为遍历变换. ∎

定理 1 的证明　先考虑 $m=1$ 的情形. 令 ν_i 是 X_i 上一概率测度，$\nu_i\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}$ 是 $l^\infty(N)$ 上的 Banach 极限（$i=1,2,\cdots,m$）. 固定 $f\in C(Y)$，$f_1\in C(X_1)$，$x\in\widetilde{Y}$，$x_1\in X_1$. 此处 $\widetilde{Y}$ 是引理 1 中的 $\widetilde{Y}$. 对映射 $T\times S_1^{k_1}:Y\times\Sigma_1\to Y\times\Sigma_1$，由于 $w_i^{(1)}$ 是压缩映射，Y 和 X_1 均为紧致的，则有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(T^jx)f_1(w^{(1)}_{(\sigma^{(1)})_{k_1j}}(x_1))-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(T^{j+1}x)f_1(w^{(1)}_{(S_1^{k_1}(\sigma^{(1)}))_{k_1j}}(x_1))\right|\to 0\ (n\to\infty).$$

从而

$$\nu_1\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(T^jx)f_1(w^{(1)}_{(\sigma^{(1)})_{k_1j}}(x_1))=\nu_1\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(T^{j+1}x)f_1(w^{(1)}_{(S_1^{k_1}(\sigma^{(1)}))_{k_1j}}(x_1))$$

由引理 3，$T\times S_1^{k_1}$ 是遍历变换，则 $\nu_1\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n f(T^jx)f_1(w^{(1)}_{(\sigma^{(1)})_{k_1j}}(x_1))$ 相对于 $\mu\times\bar{P}_1$，对几乎所有 $(x,\sigma^{(1)})\in Y\times\Sigma_1$ 是常数. 有以下断言.

断言 1　对上述固定的 f,f_1,x,x_1，若 $f\geqslant 0$ 或 $f\leqslant 0$，则存在 X_1 上的惟一一个 Borel 概率测度 $\mu_{\nu_1}=\mu_1$ 使得

$$\nu_1\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(T^jx)f_1(w^{(1)}_{(\sigma^{(1)})_{k_1j}}(x_1))=\int_Y f\mathrm{d}\mu\int_{X_1}f_1\mathrm{d}\mu_{\nu_1}=\int_Y f\mathrm{d}\mu\int_{X_1}f_1\mathrm{d}\mu_1.\quad(3.1)$$

证　(1) 若 $\int_Y f\mathrm{d}\mu\neq 0$，则

$$J_1: f_1 \mapsto \nu_1\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(T^j x) f_1(w^{(1)}_{(\sigma^{(1)})^{k_1 j}}(x_1))}{\int_Y f \mathrm{d}\mu}$$

是一个 $C(X_1)$ 上的有界线性泛函. 且对任意 $f_1 \geqslant 0$, 均有 $J_1(f_1) \geqslant 0$. 由引理 1, $J_1(1)=1$. 从而由 Riesz 表示定理, 对应一个 X_1 上的 Borel 概率测度 μ_{ν_1} 使得

$$J_1(f_1) = \int_{X_1} f_1 \mathrm{d}\mu_{\nu_1}.$$

为证 $\mu_1 = \mu_{\nu_1}$, 只需证 $\int_{X_1} f_1 \mathrm{d}\mu_{\nu_1} = \int_{X_1} U f_1 \mathrm{d}\mu_{\nu_1}$. 证此等式与文 [3] 类似可证, 从而 (3.1) 式成立.

(2) 若 $\int_Y f \mathrm{d}\mu = 0$, 令 $f_{(n)} = \frac{1}{n} + f$, 则 $f_{(n)} \to f$, 且 $\int f_{(n)} \mathrm{d}\mu \to \int f \mathrm{d}\mu$. 由于对每个 $f_{(n)}$, (3.1) 式均成立, 从而对 f, (3.1) 式也成立. ▌

断言 2 对上面固定的 f, f_1, x, x_1, 若 $f \in C(Y,R)$ ($C(Y,R)$ 表示 Y 上实值连续函数空间). 则存在 X_1 上的惟一一个 Borel 概率测度 $\mu_{\nu_1} = \mu_1$ 使得 (3.1) 式成立.

证 令 $f_P(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_N(x) = \max\{-f(x), 0\}$, 即 f 的正部和负部, 则 $f = f_P - f_N$, 由断言 1, 对 f_P 和 f_N (3.1) 式分别成立, 从而对 f, (3.1) 式也成立. ▌

断言 3 对上面固定的 f, f_1, x, x_1, 若 $f \in C(Y,C)$ ($C(Y,C)$ 表示 Y 上的复值连续函数空间). 则存在 X_1 上的惟一一个 Borel 概率测度 $\mu_{\nu_1} = \mu_1$ 使得 (3.1) 式成立.

证 令 $f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$, $u(x)$ 和 $v(x)$ 分别为 $f(x)$ 的实部与虚部, 由断言 2, 对 $u(x)$ 和 $v(x)$ (3.1) 式分别成立, 从而对 $f(x)$, (3.1) 式也成立. ▌

因此, 相对于 $\bar{P}_1$, 对几乎所有 $\sigma^{(1)} \in \Sigma_1$, $\forall x \in \widetilde{Y}$, $\forall x_1 \in X_1$, $\forall f \in C(Y)$, $\forall f_1 \in C(X_1)$, (3.1) 式均成立, 由 ν_1 的任意性, 得知当 $m=1$ 时, 定理 1 成立.

设 $m=2$, 固定 $f \in C(Y)$, $f_1 \in C(X_1)$, $f_2 \in C(X_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x \in \widetilde{Y}$. 考虑

$$T \times S_1^{k_1} \times S_2^{k_2}: Y \times \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to Y \times \Sigma_1 \times \Sigma_2,$$

由于 $w_i^{(1)}, w_j^{(2)}$ 是压缩映射 ($i=1,2,\cdots,L_1$; $j=1,2,\cdots,L_2$), Y, X_1, X_2 是紧致度量空间, 又由引理 3, $T \times S_1^{k_1} \times S_2^{k_2}$ 是遍历的, 类似于 $m=1$ 的情形, 可证相对于测度 $\mu \times \bar{P}_1 \times \bar{P}_2$, 对几乎所有的 $(x, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) \in Y \times \Sigma_1 \times \Sigma_2$, Banach 极限

$$\nu_2\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(T^j x) f_1(w^{(1)}_{(\sigma^{(1)})^{k_1 j}}(x_1)) f_2(w^{(2)}_{(\sigma^{(2)})^{k_2 j}}(x_2))$$

是一个常数.

断言 4 对上面固定的 $f \in C(Y)$, $f_1 \in C(X_1)$, $f_2 \in C(X_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x \in \widetilde{Y}$, 若 $f \cdot f_1 \geqslant 0$ 或 $f \cdot f_1 \leqslant 0$, 则存在 X_2 上的惟一一个 Borel 概率测度 $\mu_{\nu_2} = \mu_2$ 使得

$$\nu_2\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(T^j x) f_1(w^{(1)}_{(\sigma^{(1)})^{k_1 j}}(x_1)) f_2(w^{(2)}_{(\sigma^{(2)})^{k_2 j}}(x_2)) = \int_Y f \mathrm{d}\mu \int_{X_1} f_1 \mathrm{d}\mu_1 \int_{X_2} f_2 \mathrm{d}\mu_2. \tag{3.2}$$

证 (1) 若 $\int_Y f \mathrm{d}\mu \int_{X_1} f_1 \mathrm{d}\mu_1 \neq 0$, 则

$$J_2: f_2 \mapsto \nu_2\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(T^j x) f_1(w^{(1)}_{(\sigma^{(1)})^{k_1 j}}(x_1)) f_2(w^{(2)}_{(\sigma^{(2)})^{k_2 j}}(x_2))}{\int_Y f \mathrm{d}\mu \int_{X_1} f_1 \mathrm{d}\mu_1}$$

是一个 $C(X_2)$ 上的有界线性泛函, 这里 $\sigma^{(1)} \in \Sigma_1$ 使 (3.1) 式成立. 易见 $J_2(1)=1$ 且对 $\forall f_2 \geqslant$

0 均有 $J_2(f_2)\geqslant 0$. 再由 Riesz 表示定理,存在 X_2 上 Borel 概率测度 μ_{ν_2} 使得 $J_2(f_2)=\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_{\nu_2}$. 为证 $\mu_2=\mu_{\nu_2}$,仍与文[3]类似可证. 从而(3.2)式成立. ▎

(2) 若 $\int_Y f\mathrm{d}\mu\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1=0$,类似断言 1 的证明,知(3.2)式也成立.

类似断言 2 和断言 3,可证下面的断言 5.

断言 5 对上面固定的 $f\in C(Y)$, $f_1\in C(X_1)$, $f_2\in C(X_2)$, $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, $x\in\tilde{Y}$,不论 $f\cdot f_1$是实值还是复值,均存在 X_2 上的惟一一个 Borel 概率测度 $\mu_{\nu_2}=\mu_2$ 使得(3.2)式成立.

因此,当 $m=2$ 时,定理 1 成立.

假设当 $m=l$ 时定理 1 成立,再证当 $m=l+1$ 时定理 1 成立. 固定 $f\in C(Y)$, $f_i\in C(X_i)$, $x\in\tilde{Y}$, $x_i\in X_i$, $(i=1,2,\cdots,l+1)$,考虑

$$T\times S_1^{k_1}\times S_2^{k_2}\times\cdots\times S_{l+1}^{k_{l+1}}:Y\times\prod_{i=1}^{l+1}\Sigma_i\to Y\times\prod_{i=1}^{l+1}\Sigma_i,$$

由于 $w_{i_1}^{(1)},w_{i_2}^{(2)},\cdots,w_{i_{l+1}}^{(l+1)}$ $(i_1=1,2,\cdots,L_1;i_2=1,2,\cdots,L_2;\cdots;i_{l+1}=1,2,\cdots,L_{l+1})$是压缩映射,且由引理 3 知 $T\times S_1^{k_1}\times S_2^{k_2}\times\cdots\times S_{l+1}^{k_{l+1}}$ 是遍历的,又由 Y, $X_i(i=1,2,\cdots,l+1)$ 是紧致度量空间,与 $m=1$ 的情形类似可证相对测度 $\mu\times\prod_{i=1}^{l+1}\bar{P}_i$,对几乎所有 $(x,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)},\cdots,\sigma^{(l+1)})\in Y\times\prod_{i=1}^{l+1}\Sigma_i$, Banach 极限

$$\nu_{l+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(T^jx)\prod_{i=1}^{l+1}f_i(w^{(i)}_{(\sigma^{(i)})^{k_ij}}(x_i))$$

是常数. 与 $m=2$ 的情形类似可证两个断言,从而对 $m=l+1$ 定理 1 成立,由数学归纳法,定理 1 得证. ▎

推论 1 的证明 令 $X_1=X_2=\cdots=X_m=X$, $k_1=1,k_2=2,\cdots,k_m=m$, $f\equiv 1$,由定理 1,推论 1 得证. ▎

推论 2 的证明 由推论 1 立即得证. ▎

推论 3 的证明 由于在弱*拓扑下,$\mathscr{M}(X)$中 $\mu_n\to\mu(n\to\infty)$当且仅当对 $\forall f\in C(X)$, $\int f\mathrm{d}\mu_n\to\int f\mathrm{d}\mu(n\to\infty)$ ([7]P149),又由于$\int_X f\mathrm{d}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{w_{\sigma_{kj}}\circ w_{\sigma_{kj-1}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1}(x)})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(w_{\sigma_{kj}}\circ w_{\sigma_{kj-1}}\circ\cdots\circ w_{\sigma_1}(x))$,再利用推论 2,推论 3 得证. ▎

定理 2 的证明 把定理 1 证明中用到的引理 1 换成引理 2,与证定理 1 类似可证定理 2. ▎

致谢 感谢周作领教授的关心和鼓励,同时还感谢审稿人指出了原稿中的一些错漏.

参 考 文 献

[1] Assani I. Multiple recurrence and almost sure convergence for weakly mixing dynamical systems. Isreal J of math, 1998, **103**: 111-124

[2] Elton J. An ergodic theorem for iterated maps. Ergod Th & Dynam Sys, 1987, **7**: 481-488

[3] Forte B, Mendivil F. A classical ergodic property for IFS: a simple proof. Ergod Th & Dynam Sys, 1998, **18**: 609-611

[4] Furstenberg H, Katznelson Y, Ornstein D. The ergodic theoretical proof of Szemerdi's theorem. Bulletin of the American Mathematical Society, 1982, **7**: 527-552

[5] Hutchinson J E. Fractals and Self-similarity. Indiana Univ Math J, 1981, **30**: 713−747
[6] Ma D K, Zhou Z L. Ergodic properties for IFS-the improvement of elton theorem. Mathematica Applicata, 2001, **14**(4): 46−50(in Chinese)
[7] Walters P. An Introduction to ergodic theory. New York: Springer-verlag, 1982

Some Generalizations of a Classical Ergodic Property for IFS

Ma Dongkui
(*Department of Applied Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou* 510640)
Xu Zhiting
(*Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou* 510631)

Abstract: In this paper, the authors give some ergodic properties for the contractive iterated function systems(IFS) with probabilities. These results generalize the corresponding result of Elton's paper. One result is similar to the results of Furstenberg and Assani's papers in weakly mixing system in a sense.

Key words: Iterated function systems(IFS); Invariant measure; Ergodic; Banach Limit.
MR(2000) Subject Classification: 37A30; 28D05