2004,**24A**(3):257－264

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

mKdV-SineGordon 方程的多孤子解*

张大军　邓淑芳　陈登远
(上海大学数学系　上海 200436)

摘要:该文首先给出了 mKdV-SineGordon 方程的双线性形式和双线性 Bäcklund 变换,然后利用 Hirota 方法、Bäcklund 变换方法和 Wronskian 技巧三种不同的方法分别得到 mKdV-SineGordon 方程的孤子解,最后验证了这三种解的一致性.

关键词:孤子解；Hirota 方法；Bäcklund 变换；Wronski 行列式；mKdV-SineGordon 方程.
MR(2000)主题分类:35Q53;37K40　**中图分类号**:O175.24　**文献标识码**:A
文章编号:1003-3998(2004)03-257-08

目前已有许多成功的方法用来寻求孤子方程的精确解,如:反散射变换方法、Bäcklund 变换方法、Hirota 方法、Wronskian 技巧等等. 1967 年, Gardner、Greene、Kruskal 和 Miura[1]首次提出了用反散射变换求解 KdV 方程. 此方法现已成功地应用于许多孤子方程的精确求解[2,3]. 除了此方法外还有一些直接的方法:例如 Hirota 方法[4]. 在此方法中,首先引入位势 u 的一个变换, 将原方程改写成双线性导数形式;其次将扰动展开式代入到双线性方程中, 在一定的条件下该展开式可以截断;最后构造 N-孤子解的表达式,但此表达式只是猜测而很难证明. Bäcklund 变换方法通常将求解高阶的微分方程转化为求解包含解之间关系的较低阶的微分方程组. 利用此变换, 可以从已知解出发,求出新的孤子解;又可进一步以新解作为已知解, 求出更新解;周而复始. 但该方法涉及到解微分方程组, 往往在求多孤子解时遇到麻烦. 直到 1974 年, Hirota[5]给出了一种 Bäcklund 变换的双线性导数形式,使得求多孤子解变得简单起来. 另外一种直接的方法是 Wronskian 技巧,这是一种应用广泛且高效的方法,这得益于 Wronski 行列式本身良好的性质. 孤子解可以表示成 Wronski 行列式,这种表示首先由 Satsuma[6]在 1979 年引入. 然而 Satsuma 本人并没有将解的这种表示与孤子方程的双线性形式联系起来. 直到 1983 年,作为一种求解孤子方程的系统方法－Wronskian 技巧－才由 Freeman 和 Nimmo[7-11]提出并建立起来. 该方法首先要得到孤子方程的双线性形式或双线性 Bäcklund 变换,然后选择适当的 ϕ_j 构成 Wronski 行列式 $W(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N)$,再代入到双线性方程或双线性 Bäcklund 变换中进行验证. 能够进行解的直接验证,这恰是 Wronskian 技巧的优势所在.

在这三种直接的方法中双线性方程和双线性 Bäcklund 变换起着很重要的作用,因此本文主要目的之一就是介绍如何求得双线性方程和双线性 Bäcklund 变换. mKdV-SG 方程[12,13]

收稿日期:2002-09-03；修订日期:2003-03-17
Email:djzhang@mail.shu.edu.cn
* 基金项目:国家自然科学基金(10371070)资助项目

$$u_{xt}+A(\frac{3}{2}u_x{}^2u_{xx}+u_{xxxx})=B\sin u,\quad (A,B\in R). \tag{1}$$

可以表示三个不同的方程：sine-Gordon (SG)方程($A=0,B=1$)

$$u_{xt}=\sin u. \tag{2}$$

mKdV 方程($A=1,B=0,u_x=2v$)

$$v_t+v_{xxx}+6v^2v_x=0 \tag{3}$$

和一维原子格点(1DAG)方程[13]($A=B=1$)

$$u_{xt}+(\frac{3}{2}u_x{}^2u_{xx}+u_{xxxx})=\sin u. \tag{4}$$

文献[13]介绍了用反散射方法求解方程(1). 在本文中我们首先介绍了方程的双线性形式和双线性 Bäcklund 变换的表达式,同时我们也给出了一般形式的 Bäcklund 变换的表达式. 其次利用 Hirota 方法、双线性 Bäcklund 变换方法和 Wronskian 技巧三种不同的方法得到三种不同表达形式的解. 最后我们利用最近陈登远等[14]提出的方法证明这三种解的一致性.

1 方程的双线性形式和双线性 Bäcklund 变换

由变换

$$u=2i\ln\frac{\bar{f}}{f}, \tag{5}$$

方程(1)可以写成双线性形式

$$(D_xD_t+AD_x{}^4)f\cdot f-\frac{1}{2}B(f^2-\bar{f}^2)=0, \tag{6a}$$

$$D_x{}^2\ f\cdot\bar{f}=0 \tag{6b}$$

或

$$f_{xt}f-f_xf_t+A(f_{xxxx}f-4f_{xxx}f_x+3f_{xx}^2)-\frac{1}{4}B(f^2-\bar{f}^2)=0, \tag{7a}$$

$$f_{xx}\bar{f}-2f_x\bar{f}_x+f\bar{f}_{xx}=0, \tag{7b}$$

其中 $\bar{f}$ 表示 f 的共轭,D 表示 Hirota 双线性算子

$$D_x{}^mD_t{}^n\,a\cdot b=(\partial_x-\partial_{x'})^m(\partial_t-\partial_{t'})^na(x,t)b(x',t')\,|_{x'=x,\ t'=t}. \tag{8}$$

下面我们利用 Hirota 方法[5]给出方程(6)的双线性 Bäcklund 变换. 首先列出一些后面将要用到的等式

$$D_xab\cdot cd=(D_xa\cdot d)cb-ad(D_xc\cdot b), \tag{9a}$$

$$(D_xa\cdot b)cd-ab(D_xc\cdot d)=(D_xa\cdot c)bd-ac(D_xb\cdot d), \tag{9b}$$

$$(D_x^2a\cdot b)cd-ab(D_x^2c\cdot d)=D_x[(D_xa\cdot d)\cdot cb+ad\cdot(D_xc\cdot b)], \tag{9c}$$

$$(D_x^4a\cdot a)cc-aa(D_x^4c\cdot c)=2D_x[(D_x^3a\cdot c)\cdot ca+6(D_x^2a\cdot c)\cdot(D_xc\cdot a)], \tag{9d}$$

$$(D_x^2a\cdot b)cd+ab(D_x^2c\cdot d)=(D_x^2a\cdot d)\,cb+ad(D_x^2c\cdot b)-2(D_xa\cdot c)(D_xb\cdot d), \tag{9e}$$

$$(D_tD_xa\cdot a)cc-aa(D_tD_xc\cdot c)=2D_x(D_ta\cdot c)\cdot ac. \tag{9f}$$

利用上面的公式可以得到如下的命题

命题 1 设 f 和 g 满足条件

$$D_x\bar{f}\cdot g=\lambda f\bar{g},\quad (\lambda\in R), \tag{10}$$

$$D_x^2\bar{f}\cdot f=0,\tag{11}$$

则有

$$D_x^2\bar{g}\cdot g=0,\tag{12}$$

$$D_x^2 f\cdot g=\lambda^2 fg.\tag{13}$$

证 首先借助于等式(9c)和方程(10)，可以得到

$$\begin{aligned}(D_x^2\bar{f}\cdot f)\bar{g}g-\bar{f}f(D_x^2\bar{g}\cdot g)&=D_x[(D_x\bar{f}\cdot g)\cdot f\bar{g}+\bar{f}g\cdot(D_x\bar{g}\cdot f)]\\&=\lambda D_x(f\bar{g}\cdot f\bar{g}-\bar{f}g\cdot\bar{f}g)=0,\end{aligned}$$

于是由(11)式可以推出(12)式是正确的. 另外,由(9c)式和(10)式可以推出

$$(D_x^2 f\cdot g)\overline{fg}-fg(D_x^2\bar{f}\cdot\bar{g})=0,\tag{14}$$

再由(9e)式、(10)－(12)式可得

$$(D_x^2 f\cdot g)\overline{fg}+fg(D_x^2\bar{f}\cdot\bar{g})=2\lambda^2 fg\bar{f}\bar{g},\tag{15}$$

以上两个等式之和就是(13)式. ▌

利用上面的命题,由(6)式我们可以得到 mKdV-SG 方程的双线性 Bäcklund 变换. 假设 f 是(6)式的一个解. 令

$$\begin{aligned}P=&[(D_xD_t+AD_x^4)f\cdot f-\frac{1}{2}B(f^2-\bar{f}^2)]g^2\\&-[(D_xD_t+AD_x^4)g\cdot g-\frac{1}{2}B(g^2-\bar{g}^2)]f^2.\end{aligned}\tag{16}$$

由(9d)式和(9f)式,可得

$$P=2D_x\{[(D_t+AD_x{}^3)f\cdot g]\cdot fg-3A(D_x^2f\cdot g)\cdot(D_xf\cdot g)\}+\frac{1}{2}B(\bar{f}^2g^2-f^2\bar{g}^2).\tag{17}$$

如果我们假设 f 和 g 满足(10)式，根据命题 1,在(17)式中用 $\lambda^2\ fg$ 替换 $D_x^2f\cdot g$,则有

$$P=2D_x\{[(D_t+AD_x{}^3)f\cdot g]\cdot fg-3A\lambda^2 fg\cdot(D_xf\cdot g)\}+\frac{1}{2}B(\bar{f}^2g^2-f^2\bar{g}^2).$$

若取

$$[D_t+A(D_x{}^3+3\lambda^2\ D_x)]\ f\cdot g=\frac{B}{4\lambda}\bar{f}\bar{g},\tag{18}$$

可以得到

$$P=\frac{B}{2\lambda}[D_x(\overline{fg}\cdot fg)+\lambda(\bar{f}^2g^2-f^2\bar{g}^2)].$$

由(9a)式和(10)式可以得出 $P=0$. 这样(10)式和(18)式就构成了 mKdV-SG 方程(1)的双线性形式的 Bäcklund 变换. 也就是说,如果 u 是 mKdV-SG 方程(1)的解,那么

$$u=2i\ln\frac{\bar{g}}{g},\tag{19}$$

也一定是方程(1)的解,其中 g 满足双线性 Bäcklund 变换(10)式和(18)式.

双线性形式的 Bäcklund 变换还有另外一种等价形式. 由(10)式，我们有

$$(D_x^2\bar{g}\cdot g)\bar{f}f+\bar{g}g(D_x^2\bar{f}\cdot f)(D_x\bar{g}\cdot f)g\bar{f}-\bar{g}f(D_xg\cdot\bar{f})=-\lambda(\bar{f}^2g^2-f^2\bar{g}^2),$$

利用关系式

$$u=2i\ln\frac{\bar{f}}{f},\ u'=2i\ln\frac{\bar{g}}{g},\ \sin u=\frac{1}{i}(\frac{f}{\bar{f}}-\frac{\bar{f}}{f}),\ \sin u'=\frac{1}{i}(\frac{g}{\bar{g}}-\frac{\bar{g}}{g}).$$

可进一步得到

$$u'_x + u_x = 4\lambda \sin\frac{u'-u}{2}, \tag{20}$$

另外对(1)式积分一次,并利用(20)式，我们有

$$u'_t - u_t = -A\{2u_{xxx} + u'_x u_x{}^2 + \lambda[4u_{xx}\cos\frac{u'-u}{2} - (u'_x{}^2 + u_x{}^2)\sin\frac{u'-u}{2}]$$
$$+ 2\lambda^2(u'_x - u_x)[3-\cos(u'-u)]\} - \frac{B}{\lambda}\sin\frac{u'+u}{2}. \tag{21}$$

(20)式和(21)式是一种等价的 Bäcklund 变换的表达式.

2 N-孤子解

首先我们利用 Hirota 方法求解. 设 $f(x,t)$可按参数 ε 展开成级数

$$f(x,t) = 1 + f^{(1)}\varepsilon + f^{(2)}\varepsilon^2 + f^{(3)}\varepsilon^3 + \cdots, \tag{22}$$

将这个展开式代入(6)式,并比较 ε 的同次幂系数得

$$2(\partial_x\partial_t + A\partial_x{}^4)f^{(1)} = B(f^{(1)} - \bar{f}^{(1)}), \tag{23a}$$

$$2(\partial_x\partial_t + A\partial_x{}^4)f^{(2)} = -(D_xD_t + AD_x{}^4)f^{(1)}\cdot f^{(1)} + \frac{1}{2}B(f^{(1)2} - \bar{f}^{(1)2}) + B(f^{(2)} - \bar{f}^{(2)}), \tag{23b}$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\partial_x^2(f^{(1)} + \bar{f}^{(1)}) = 0, \tag{24a}$$

$$\partial_x^2(f^{(2)} + \bar{f}^{(2)}) = -D_x{}^2 f^{(1)}\cdot \bar{f}^{(1)}, \tag{24b}$$

$$\cdots\cdots.$$

如果取

$$f^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} e^{\xi_j + \frac{\pi}{2}i},\ \xi_j = k_j x + \omega_j t + \xi_j{}^{(0)}, k_j, \omega_j, \xi_j{}^{(0)} \in R. \tag{25}$$

则可得到 N-孤子解.

当 $N=1$ 时,由(23、24)式我们有

$$f^{(1)} = e^{\xi_1 + \frac{\pi}{2}i}, \omega_1 = \frac{B}{k_1} - Ak_1{}^3, f^{(l)} = 0, l = 2,3,\cdots,N. \tag{26}$$

则可得单孤子解为 $u=4\arctan e^{\xi_1}$. 当 $N=2$ 时,可以得到

$$f^{(1)} = e^{\xi_1+\frac{\pi}{2}i} + e^{\xi_2+\frac{\pi}{2}i}, \tag{27a}$$

$$f^{(2)} = e^{\xi_1+\xi_2+i\pi+A_{12}}, e^{A_{12}} = (\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2})^2, \omega_j = \frac{B}{k_j} - Ak_j{}^3, j = 1,2. \tag{27b}$$

$$f^{(l)} = 0, l = 3,4,\cdots,N, \tag{27c}$$

所以双孤子解为

$$u = 4\arctan\frac{e^{\xi_1} + e^{\xi_2}}{1 - e^{\xi_1+\xi_2+A_{12}}}. \tag{28}$$

一般 N-孤子解可由(5)式表示出,其中

$$f = \sum_{\mu=0,1}\exp[\sum_{j=1}^{N}\mu_j(\xi_j + \frac{\pi}{2}i) + \sum_{1\leqslant j<l}^{N}\mu_j\mu_l A_{jl}],\ \omega_j = \frac{B}{k_j} - Ak_j{}^3,\ e^{A_{jl}} = \frac{(k_j-k_l)^2}{(k_j+k_l)^2}, \tag{29}$$

式中对 μ 的和式表示 $\mu_j(j=1,2,\cdots,N)$取 0 或 1 时所有可能的项之和. 显然 SG 方程[15]和

mKdV 方程[16]的解也可由(5)式和(29)式表示.

下面我们介绍通过双线性 Bäcklund 变换获得的 N-孤子解. 当 $f=1$ 时表示零解，由(10)式和(18)式，g 应满足

$$g_x=\lambda\bar{g},\quad g_t+A(g_{xxx}+3\lambda^2g_x)=\frac{B}{4\lambda}\bar{g}. \tag{30}$$

解出

$$g=g_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}(\mathrm{e}^{\frac{\xi_1}{2}+\frac{\pi}{4}i}+\mathrm{e}^{-\frac{\xi_1}{2}-\frac{\pi}{4}i}),\quad \omega_1=\frac{B}{k_1}-Ak_1^3,\lambda=-\frac{k_1}{2}, \tag{31}$$

其为双线性 Bäcklund 的单孤子解. 如果我们取 f 是 g_1 的表达式 (31)，那么由双线性 Bäcklund 变换可以得到

$$g=g_2=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}[\alpha(\mathrm{e}^{\frac{\xi_1+\xi_2}{2}+\frac{\pi}{2}i}+\mathrm{e}^{-\frac{\xi_1+\xi_2}{2}-\frac{\pi}{2}i})+\beta(\mathrm{e}^{\frac{\xi_1-\xi_2}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\xi_1-\xi_2}{2}})], \tag{32a}$$

$$\alpha=k_1-k_2,\beta=k_1+k_2,\xi_j=\omega_jt+k_jx+\xi_j^{(0)},\quad (j=1,2). \tag{32b}$$

一般地，如果取 $f=g_{N-1}$，那么我们可以得到 N-孤子解的表达式(19)，其中

$$g_N=\mathrm{e}^{\frac{N}{4}\pi i}\sum_{\varepsilon=\pm1}\prod_{1\leqslant j<l}^{N}\varepsilon_j(\varepsilon_jk_j-\varepsilon_lk_l)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(\xi_j+\frac{\pi}{2}i)},$$

$$\omega_j=\frac{B}{k_j}-Ak_j^3,\lambda_j=-\frac{k_j}{2},\quad (j=1,2,\cdots,N). \tag{33}$$

最后我们给出 Wronskian 形式的 N-孤子解. 表达式为

$$f=W(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N)=\begin{vmatrix}\phi_1 & \cdots & \phi_1^{(N-1)}\\ & & \cdots\\ \phi_N & \cdots & \phi_N^{(N-1)}\end{vmatrix}=|\widehat{N-1}|, \tag{34}$$

其中 $\phi_j^{(l)}=\partial^l\phi_j/\partial x^l$，且 ϕ_j 满足

$$\phi_j=\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}(\mathrm{e}^{\frac{\xi_j}{2}+\frac{i\pi}{4}}+(-1)^{j-1}\mathrm{e}^{-\frac{\xi_j}{2}-\frac{i\pi}{4}}),\xi_j=k_jx-(Ak_j^3-B\frac{1}{k_j})t+\xi_j^{(0)},\ k_j,\xi_j^{(0)}\in R. \tag{35}$$

这里我们定义 $|\widehat{N-1}|=|0,1,2,\cdots,n-1|$，$|\tilde{N}|=|1,2,\cdots,N|$，以下同. 不难得到

$$\bar{f}=|-1,\widehat{N-2}|\prod_{j=1}^{N}\alpha_j=|\tilde{N}|\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\alpha_j},\ \bar{f}^2=|-1,\widehat{N-2}||\tilde{N}|,$$

$$\bar{f}_x=|\widetilde{N-1},N+1|\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\alpha_j},\bar{f}_{xx}=[|\widetilde{N-2},N,N+1|+|\widetilde{N-1},N+2|]\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\alpha_j},$$

$$f_x=|\widehat{N-2},N|,\ f_{xx}=|\widehat{N-3},N-1,N|+|\widehat{N-2},N+1|,$$

$$f_t=-4A[(\widehat{N-4},N-2,N-1,N|-|\widehat{N-3},N-1,N+1|$$
$$+|\widehat{N-2},N+2|]+\frac{1}{4}B|-1,\widetilde{N-1}|,$$

$\cdots\cdots$,

现将以上各式直接代入(7a)式的左端，可得

$$f_{xt}f-f_xf_t+A(f_{xxxx}f-4f_{xxx}f_x+3f_{xx}^2)-\frac{1}{4}B(f^2-\bar{f}^2)$$

$$=12A[|\widehat{N-3},N-2,N-1||\widehat{N-3},N,N+1|$$

$$-|\widehat{N-3},N-2,N||\widehat{N-3},N-1,N+1|$$

$$+|\widehat{N-3},N-2,N+1||\widehat{N-3},N-1,N|]$$
$$+\frac{1}{2}B[|\widehat{N-2},N-1||-1,\widetilde{N-2},N|-|\widehat{N-2},N||-1,\widetilde{N-2},N-1|$$
$$+|\widetilde{N-2},N-1,N||-1,\widehat{N-2}|]$$
$$=-6A\begin{vmatrix}0\ \widetilde{N-3} & 0 & N-2 & N-1 & N & N+1\\ 0 & 0\ \widetilde{N-3} & N-2 & N-1 & N & N+1\end{vmatrix}$$
$$-\frac{1}{4}B\begin{vmatrix}-1 & 0 & \widetilde{N-2} & 0 & N-1 & N\\ -1 & 0 & 0 & \widetilde{N-2} & N-1 & N\end{vmatrix}=0.$$

其中我们利用了等式

$$\left\{\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2[\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2|\widehat{N-1}|]\right\}|\widehat{N-1}|=[\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2|\widehat{N-1}|]^2.$$

同时,对于(7b)的左端我们有

$$f_{xx}\bar{f}-2f_x\bar{f}_x+f\bar{f}_{xx}=\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\alpha_j}\{|\widehat{N-1}|[|\widetilde{N-2},N,N+1|+|\widetilde{N-1},N+2|]$$
$$-2|\widehat{N-2},N||\widetilde{N-1},N+1|+|\hat{N}|[|\widehat{N-3},N-1,N|+|\widehat{N-2},N+1|]\}.$$

把

$$|\widehat{N-3},N-1,N|=-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2|\widehat{N-1}|+|\widehat{N-2},N+1|,\ |\widetilde{N-1},N+2|$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2|\hat{N}|+|\widetilde{N-2},N,N+1|$$

代入上面的等式,则就可以得到

$$-\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\alpha_j}\begin{vmatrix}0 & \widetilde{N-2} & 0 & N-1 & N & N+1\\ 0 & 0 & \widetilde{N-2} & N-1 & N & N+1\end{vmatrix}=0.$$

所以(7)式具有 Wronskian 形式的解(34、35)式.

对于双线性 Bäcklund 变换(10)和(18),设 $f=|\widehat{N-2},\tau|$ 表示$(N-1)$孤子解,$g=|\widehat{N-1}|$表示 N-孤子解,其中 $\tau=(0,\cdots,1)^T$,那么(10)和(18)分别变为

$$-\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{N-1}\frac{1}{\alpha_j}\begin{vmatrix}0 & \widetilde{N-2} & 0 & N-1 & N & \tau\\ 0 & 0 & \widetilde{N-2} & N-1 & N & \tau\end{vmatrix}=0$$

和

$$-3A\left\{\begin{vmatrix}0 & \widetilde{N-4} & N-2 & 0 & N-3 & N-1 & N & \tau\\ 0 & 0 & \widetilde{N-4} & N-2 & N-3 & N-1 & N & \tau\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.+\begin{vmatrix}0 & \widetilde{N-3} & 0 & N-2 & N-1 & N+1 & \tau\\ 0 & 0 & \widetilde{N-3} & N-2 & N-1 & N+1 & \tau\end{vmatrix}\right\}$$

$$-\frac{B}{8}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \widetilde{N-2} & 0 & N-1 & \tau \\ -1 & 0 & 0 & \widetilde{N-2} & N-1 & \tau\end{vmatrix}=0,$$

其中系数 $\lambda=\alpha_N$. 因此，双线性 Bäcklund 变换是由$(N-1)$-孤子解到 N-孤子解的变换.

等式(1)除了可以表示 mKdV、SG 和 1DAG 方程外，还可以表示其他结果. 如果在(6)式和(35)式中取 $A=1$，$B=0$，那么 $u=2(\ln f)_{xx}$ 恰是 KdV 方程复数形式的解. 如果取 $A=1$，$B=0$，那么双线性 Bäcklund 变换(10)式和(18)式恰是 KdV 方程的双线性 Bäcklund 变换[5].

3 三种解的一致性

根据行列式的性质，元素为(34)式的 $f=|\widehat{N-1}|$ 可以分成 2^N 个 Vandermonde 行列式的和. 因此我们有

$$\begin{aligned}f_N=&\ \mathrm{e}^{\frac{N\pi}{4}i}\sum_{\varepsilon=\pm1}\varepsilon_2\varepsilon_4\cdots\varepsilon_{[\frac{N}{2}]}\triangle\left(\varepsilon_1\frac{k_1}{2},\varepsilon_2\frac{k_1}{2},\cdots,\varepsilon_N\frac{k_N}{2}\right)\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(\frac{\xi_j}{2}+\frac{i}{4}\pi)}\\ =&\ (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\mathrm{e}^{\frac{N\pi}{4}i}\sum_{\varepsilon=\pm1}\prod_{1\leqslant j<l}^{N}\varepsilon_l(\varepsilon_jk_j-\varepsilon_lk_l)\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(\frac{\xi_j}{2}+\frac{\pi}{4}i)}.\end{aligned}\tag{36}$$

其中 $\Delta\left(\varepsilon_1\frac{k_1}{2},\varepsilon_2\frac{k_2}{2}\cdots,\varepsilon_N\frac{k_N}{2}\right)$表示元素为 $\varepsilon_1\frac{k_1}{2}$，$\varepsilon_2\frac{k_2}{2}$，$\cdots$，$\varepsilon_N\frac{k_N}{2}$的 $N\times N$ 的 Vandermonde 行列式. 可以看出由(36)式得到的解和由(33)式得到的解是一致的.

进一步可以发现

$$\varepsilon_l\frac{\varepsilon_jk_j-\varepsilon_lk_l}{k_j-k_l}=\left(\frac{k_l+k_j}{k_l-k_j}\right)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_j\varepsilon_l)}=\left(\frac{k_l-k_j}{k_l+k_j}\right)^{2\mu_j\mu_l-\mu_j-\mu_l}.\tag{37}$$

令 $\mu_j=(1+\varepsilon_j)/2$ 可得

$$f=\left[\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\xi_j+\frac{\pi}{2}i)}\right]\left[\prod_{1\leqslant j<l\leqslant N}(k_l-k_j)\right]\sum_{\mu=0,1}\left\{\left[\prod_{1\leqslant j<l\leqslant N}\left(\frac{k_l-k_j}{k_l+k_j}\right)^{-\mu_j-\mu_l+2\mu_j\mu_l}\right]\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{\mu_j(\xi_j+\frac{\pi}{2}i)}\right\}.\tag{38}$$

注意到

$$\prod_{1\leqslant j<l\leqslant N}\left(\frac{k_l-k_j}{k_l+k_j}\right)^{-\mu_j-\mu_l}=\exp\left\{-\sum_{j=1}^{N}\left(\mu_j\sum_{l=1,l\neq j}^{N}\frac{A_{jl}}{2}\right)\right\},\tag{39}$$

可得

$$f=\left[\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\xi_j+\frac{\pi}{2}i)}\right]\left[\prod_{1\leqslant j<l\leqslant N}(k_l-k_j)\right]\sum_{\mu=0,1}\exp\left[\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left(\eta_j+\frac{\pi}{2}i\right)+\sum_{1\leqslant j<l\leqslant N}\mu_j\mu_lA_{jl}\right],\tag{40}$$

其中

$$\eta_j=\xi_j-\frac{1}{2}\sum_{l=1,l\neq j}^{N}A_{jl}.\tag{41}$$

从(40)式，(29)式，(33)式和(5)式，我们可以看到这些解对于从(5)式恢复解来说是相互一致的.

参 考 文 献

[1] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M. Method forsolving the KdV equation. Phys Rev Lett, 1967, **19**: 1095—1097

[2] Ablowitz M J, Segur H. Soliton and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981

[3] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equation and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991

[4] Hirota R. Exact solution of the KdV equation formultiple collisions of solitons. Phys Rev Lett, 1971, **27**: 1192—1194

[5] Hirota R. A few form of Bäcklund transformations and its relationto inverse scattering problem. Pro Theo Phys, 1974, **52**: 1498—1512

[6] Satsum J. A Wronskian representation of *N*-soliton solutions of nonlinear evolution equations. J Phys Soc Japan, 1979, **46**: 359—360

[7] Freeman N C, Nimmo J J C. Soliton solitons of the KdV and KP equations: the Wronskian technique. Phys Lett A, 1983, **95**: 1—3

[8] Freeman N C, Nimmo J J C. Soliton solitons of the KdV and KP equations:the Wroanskian technique. Proc R Soc Lond, 1983, **389**A: 319—329

[9] Nimmo J J C, Freeman N C. The use of Bäcklund transformations in obtaining *N*-soliton solutions in Wronskian form. J Phys A: Math Gen, 1984, **17**: 1415—1424

[10] Nimmo J J C, Freeman N C. A method of obtainning the soliton solution of the Boussinesq equation in terms of a Wronskain. Phys Lett A, 1983, **95**: 4—6

[11] 张大军,邓淑芳. 孤子解的 Wronskian 表示. 上海大学学报,自然科学版, 2002, **8**: 232—242

[12] Gu C H. On the Bäcklund transformations for the generalized hierarchies of compound mKdV-SG equation. Lett Math Phys, 1986, **12**: 31—41

[13] Konno K, Kameyama W, Sanuki H. Effect of weak dislocation potential on nonlinear wave propagation in anharmonic crystal. J Phys Soc Japan, 1974, **37**: 171—176

[14] 陈登远. Bäcklund 变换与 *N*-孤子解: 中国第三届孤子与可积系统会议. 郑州,2001

[15] Hirota R. Exact solution of the Sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons. J Phys Soc Japan, 1972, **33**:1459—1463

[16] Hirota R. Exact envelope-soliton of a nonlinear wave equation. J Math Phys, 1973, **14**:805—809

Multi-soliton Solutions of the mKdV-SineGordon Equation

Zhang Dajun   Deng Shufang   Chen Dengyuan

(*Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200436)

Abstract: The bilinear equation and Bäcklund transformation for the mKdV-SineGordon equation are given. The multi-soliton solutions are obtained through Hirota's method, bilinear Bäcklund transformation and Wronskian technique. The uniformity of these solutions are shown.

Key words: Soliton solution; Hirota's method; Bäcklund transform; Wronskian; mKdV-SineGordon equation.

MR(2000) Subject Classification: 35Q53; 37K40