2009,**29A**(6):

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

NA 随机场对数律的收敛速度 *

金敬森
(台州学院数学系　临海 317000)

摘要：设 d 是一个正整数，$\mathcal{N}^d$ 是 d - 维正整数格点. 设 $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathcal{N}^d\}$ 是一同分布的负相伴随机场，记 $S_{\mathbf{n}} = \sum\limits_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$, $S_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{k})} = S_{\mathbf{n}} - X_{\mathbf{k}}$, 如果 $r > 2$, $EX_{\mathbf{1}} = 0$ 和 $\sigma^2 = Var(X_{\mathbf{1}})$, 则存在一个正数 $M := 100\sqrt{(r-2)(1+\sigma^2)}$ 使得下列条件等价：

(I)　$E|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2} < \infty$,

(II)　$\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d} |n|^{r/2-2} P(\max\limits_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{k})}| \geq (2^d+1)\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) < \infty \qquad \forall\varepsilon > M$,

(III)　$\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d} |n|^{r/2-2} P(\max\limits_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| \geq \varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) < \infty \qquad \forall\varepsilon > M$.

关键词：NA; 随机场；对数律；收敛性.

MR(2000) 主题分类: 60F15　**中图分类号**: O211.4　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)06–

1　引言及结果

定义 1.1　称随机变量 $X_1, \cdots, X_n (n \geq 2)$ 是 NA(Negatively Associated) 的，如果对于 $\{1, \cdots, n\}$ 中的任意两个不相交的非空子集 A_1 和 A_2, 都有

$$Cov(g_1(X_i, i \in A_1), g_2(X_j, j \in A_2)) \leq 0, \tag{1}$$

其中 g_1 和 g_2 是任意两个使得协方差存在的且对每个变元均单调上升的函数. 称序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 NA 的，如果对每个 $n \geq 2$, 随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 都是 NA 的.

NA 随机变量在可靠性理论，多元统计分析及渗透理论等方面有广泛的应用，这个概念是 Alam 和 Saxena (1981) 和 Joag-Dev 和 Proschan (1983) 提出的. 近年来，许多学者对 NA 随机变量作了很多理论上的研究（参见， Matula (1992), 苏淳，赵林城和王岳宝 (1996), 苏淳和王岳宝 (1998), 梁汉营和苏淳 (1998), 邵启满和苏淳 (1999), 张立新 (2000) 等等)

梁汉营和苏淳 (1998) 把 Lai (1974) 关于 i.i.d. 序列对数律的收敛结果推广到 NA 序列，得到了如下结果：

定理 A　设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一同分布的 NA 序列，记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $S_n^{(k)} = S_n - X_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$. 设 $r > 2$, 则存在某个 $M > 0$ 使得下列条件等价：

(i)　$E|X_1|^r(\log|X_1|)^{-r/2} < \infty$ 且 $EX_1 = 0$,

收稿日期：2007-10-20; 修订日期：2008-09-22

E-mail: jinjingsen@tzc.edu.cn

* 基金项目：国家自然科学基金 (No:10471126)

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r/2-2}P(\max\limits_{1\le k\le n}|S_n^{(k)}|\ge 3\varepsilon\sqrt{n\log n})<\infty \qquad \forall\varepsilon>M$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r/2-2}P(\max\limits_{1\le k\le n}|S_k|\ge \varepsilon\sqrt{n\log n})<\infty \qquad \forall\varepsilon>M$,

这里及下文中，记 $\log x=\ln(e\vee x)$.

设 d 是一个正整数， $\mathcal{N}^d$ 是 d - 维正整数格点. 对于 $\mathbf{m}=(m_1,\cdots,m_d)\in\mathcal{N}^d$ 和 $\mathbf{n}=(n_1,\cdots,n_d)\in\mathcal{N}^d$, 记 $|\mathbf{n}|=n_1\cdots n_d$ 和 $\mathbf{n}-\mathbf{m}=(n_1-m_1,\cdots,n_d-m_d)$. 进一步，记号 $\mathbf{m}\le\mathbf{n}$ 表示 $m_s\le n_s$, $s=1,\cdots,d$, 记号 $\mathbf{n}\to\infty$ 表示 $|\mathbf{n}|\to\infty$ 和 $\mathbf{1}=(1,\cdots,1)\in\mathcal{N}^d$. 本文中，总设 $\{X_\mathbf{n},\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d\}$ 是一同分布的负相伴随机场. 记 $S_\mathbf{n}=\sum\limits_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}X_\mathbf{k}$, $S_\mathbf{n}^{(\mathbf{k})}=S_\mathbf{n}-X_\mathbf{k}$, $\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}$, $\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d$. 本文一律用 C 表示正常数，其值在不同的地方可表示不同的值.

本文的目的是把定理 A 的结果推广到随机场 (即， $d\ge 2$), 我们得到了下面的结果：

定理 1 设 $r>2$, $EX_\mathbf{1}=0$ 和 $\sigma^2=Var(X_\mathbf{1})$. 则存在一个正数 $M:=100\sqrt{(r-2)(1+\sigma^2)}$ 使得下列条件等价：

(I) $E|X_\mathbf{1}|^r(\log|X_\mathbf{1}|)^{d-1-r/2}<\infty$,

(II) $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|n|^{r/2-2}P(\max\limits_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S_\mathbf{n}^{(\mathbf{k})}|\ge(2^d+1)\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})<\infty \qquad \forall\varepsilon>M$,

(III) $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|n|^{r/2-2}P(\max\limits_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S_\mathbf{k}|\ge\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})<\infty \qquad \forall\varepsilon>M$.

注 1 若 $\{X_\mathbf{n},\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d\}$ 为 i.i.d. 随机场， $M=\sqrt{(r-2)\sigma^2}$, 则 Gut (1980) 证明过此结果 (参见， Gut, 1980, 定理 3.3), 在定理 1 中， (II) 不同于 i.i.d. 情形.

2 定理 1 的证明

我们首先给出定理证明中将要用到的两个引理.

引理 1 设 $\{Y_\mathbf{k};\mathbf{k}\le\mathbf{n}\}$ 是一 NA 随机场，且 $EY_\mathbf{1}=0$. 记 $T_\mathbf{k}=\sum\limits_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}Y_\mathbf{i}$. 则对任意的 $q>2$, 有

$$E\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|T_\mathbf{k}|^q\le C|\mathbf{n}|^{q/2}\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}E|Y_\mathbf{k}|^q.$$

证 参见张立新 (2000) 文中的引理 3.4.

引理 2 设 $\{Y_\mathbf{k};\mathbf{k}\le\mathbf{n}\}$ 是一 NA 随机场，且 $EY_\mathbf{k}=0$ 和 $|Y_\mathbf{k}|\le b$ a.s., 其中 $0<b<\infty$. 记 $T_\mathbf{k}=\sum\limits_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}Y_\mathbf{i}$, $M_\mathbf{n}=\max\limits_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|T_\mathbf{k}|$ 和 $B_\mathbf{n}^2=\sum\limits_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}EY_\mathbf{k}^2$. 则对任意的 $x>0$, 有

$$P(M_\mathbf{n}-2EM_\mathbf{n}\ge 20x)\le 2^{d+1}\exp\Big\{-\frac{x^2}{2(bx+B_\mathbf{n}^2)}\Big\}.$$

证 参见张立新 (2004) 文中的命题 2.3.

定理 1 的证明 先证 $(I)\Rightarrow(III)$. 对每个 $\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d$, $\mathbf{1}\le\mathbf{j}\le\mathbf{n}$ 和任意的 $\varepsilon>M:=100\sqrt{(r-2)(1+\sigma^2)}$, 记 $\lambda_{|\mathbf{n}|}=\frac{50}{\varepsilon}\sqrt{|\mathbf{n}|/\log|\mathbf{n}|}$, $\rho_{|\mathbf{n}|}=\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}$, 并记

$$X_{\mathbf{nj}}^1=-\lambda_{|\mathbf{n}|}I\{X_\mathbf{j}<-\lambda_{|\mathbf{n}|}\}+X_\mathbf{j}I\{|X_\mathbf{j}|\le\lambda_{|\mathbf{n}|}\}+\lambda_{|\mathbf{n}|}I\{X_\mathbf{j}>\lambda_{|\mathbf{n}|}\},$$

$$X_{\mathbf{nj}}^2=(X_\mathbf{j}-\lambda_{|\mathbf{n}|})I\{\lambda_{|\mathbf{n}|}<X_\mathbf{j}<\rho_{|\mathbf{n}|}\},$$

$$X_{\mathbf{nj}}^3=(X_\mathbf{j}+\lambda_{|\mathbf{n}|})I\{-\lambda_{|\mathbf{n}|}>X_\mathbf{j}>-\rho_{|\mathbf{n}|}\},$$

$$X_{\mathbf{nj}}^4=(X_\mathbf{j}+\lambda_{|\mathbf{n}|})I\{X_\mathbf{j}\le-\rho_{|\mathbf{n}|}\}+(X_\mathbf{j}-\lambda_{|\mathbf{n}|})I\{X_\mathbf{j}\ge\rho_{|\mathbf{n}|}\},$$

$$S_{\mathbf{nk}}^i=\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{j}\le\mathbf{k}}X_{\mathbf{nj}}^i,\quad \mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n},\quad i=1,2,3,4.$$

既然 $S_{\mathbf{k}}=\sum_{i=1}^{4}S_{\mathbf{nk}}^i$, $\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}$. 因此，对任意的 $\varepsilon>M$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|n|^{r/2-2}P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S_{\mathbf{k}}|\ge\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})\\
\le&\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|n|^{r/2-2}P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S_{\mathbf{nk}}^1|\ge\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})\\
&+\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|n|^{r/2-2}P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S_{\mathbf{nk}}^2|\ge\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})\\
&+\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|n|^{r/2-2}P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S_{\mathbf{nk}}^3|\ge\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})\\
&+\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|n|^{r/2-2}P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S_{\mathbf{nk}}^4|\ge\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})\\
:=&I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}$$

由 $E|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2}<\infty$ 和 $\sum_{k=1}^{n}k^{r/2-1}d(k)=O(n^{r/2}(\log n)^{d-1})$ 可得

$$\begin{aligned}
I_4&\le\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|n|^{r/2-2}P\Big(\bigcup_{\mathbf{1}\le\mathbf{j}\le\mathbf{n}}\{|X_{\mathbf{j}}|\ge\rho_{|\mathbf{n}|}\}\Big)\\
&\le\sum_{k=1}^{\infty}k^{r/2-1}d(k)P(|X_{\mathbf{1}}|\ge\varepsilon\sqrt{k\log k})\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}k^{r/2-1}d(k)\sum_{n=k}^{\infty}P(\varepsilon\sqrt{n\log n}\le|X_{\mathbf{1}}|<\varepsilon\sqrt{(n+1)\log(n+1)})\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r/2}(\log n)^{d-1}P(\varepsilon\sqrt{n\log n}\le|X_{\mathbf{1}}|<\varepsilon\sqrt{(n+1)\log(n+1)})\\
&\le CE|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2}<\infty.
\end{aligned}$$

其中 $d(k)=Card\{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d,|\mathbf{n}|=k\}$, $CardA$ 表示集合 A 中元素的个数.

由 $X_{\mathbf{nj}}^2$ 的定义可知， $X_{\mathbf{nj}}^2\ge0$, $\mathbf{1}\le\mathbf{j}\le\mathbf{n}$. 因此由 NA 随机变量的性质 $P(X>x,Y>y)\le P(X>x)P(Y>y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$ 和 $E|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2}<\infty$ 可得

$$\begin{aligned}
I_2&=\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2-2}P\Big(\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{j}\le\mathbf{n}}X_{\mathbf{nj}}^2\ge\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}\Big)\\
&\le\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2-2}P\Big(\bigcup_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}<\mathbf{j}\le\mathbf{n}}\{X_{\mathbf{i}}>\lambda_{|\mathbf{n}|},X_{\mathbf{j}}>\lambda_{|\mathbf{n}|}\}\Big)\\
&\le\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2}[P(X_{\mathbf{1}}>\lambda_{|\mathbf{n}|})]^2\\
&\le C\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{-r/2}(\log|\mathbf{n}|)^{2r+2-2d}(E|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2})^2\\
&<\infty.
\end{aligned}$$

类似可得

$$I_3=\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2-2}P\Big(-\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{j}\le\mathbf{n}}X_{\mathbf{nj}}^2\ge\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}\Big)<\infty.$$

下面我们证明 $I_1<\infty$. 由 $EX_{\mathbf{1}}=0$ 和 $E|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2}<\infty$ 可得

$$\frac{\max\limits_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|ES^1_{\mathbf{nk}}|}{\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}}\le\frac{|\mathbf{n}|}{\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}}\{\lambda_{|\mathbf{n}|}P(|X_{\mathbf{1}}|>\lambda_{|\mathbf{n}|})+E|X_{\mathbf{1}}|I\{|X_{\mathbf{1}}|>\lambda_{|\mathbf{n}|}\}\to 0.$$

同时, 由 $E|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2}<\infty$ 易知, 存在一个 $q(2<q<r)$ 使得 $E|X_{\mathbf{1}}|^q<\infty$. 故由引理 1 和 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}\frac{E\max\limits_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S^1_{\mathbf{nk}}-ES^1_{\mathbf{nk}}|}{\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}}&\le\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}}[E\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S^1_{\mathbf{nk}}-ES^1_{\mathbf{nk}}|^q]^{1/q}\\&\le\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}}[C|\mathbf{n}|^{q/2}E|X_{\mathbf{1}}|^q]^{1/q}\to 0,\quad \mathbf{n}\to\infty.\end{aligned}$$

因此为了证明 $I_1<\infty$, 只需证明

$$\begin{aligned}I_1^*:=&\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2-2}P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S^1_{\mathbf{nk}}-ES^1_{\mathbf{nk}}|-2\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S^1_{\mathbf{nk}}-ES^1_{\mathbf{nk}}|\\&\ge\frac{\varepsilon}{5}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})<\infty.\end{aligned}\tag{2}$$

事实上, 取 $b=2\lambda_{|\mathbf{n}|}$, $x=\frac{\varepsilon}{100}\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}$, 并且利用 Chow 和 Studden (1969) 文中的推论 3 得到

$$B^2_{\mathbf{n}}=\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}E(X^1_{\mathbf{nk}}-EX^1_{\mathbf{nk}})^2\le|\mathbf{n}|\sigma^2.$$

对任意的 $\varepsilon>100\sqrt{(r-2)(1+\sigma^2)}$, 应用引理 2 得到

$$\begin{aligned}I_1^*&\le 2^{d+1}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2-2}\exp\Big\{-\frac{\varepsilon^2|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|/20000}{2(|\mathbf{n}|+|\mathbf{n}|\sigma^2)}\Big\}\\&\le C\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2-2-\varepsilon^2/(20000(1+\sigma^2))}<\infty.\end{aligned}$$

至此, (III) 得证.

下面证 $(III)\Rightarrow(II)$. 由 (III) 可得

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2-2}P(|S_{\mathbf{n}}|\ge\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})<\infty\quad\forall\varepsilon>M.\tag{3}$$

再由王建峰和金敬森 (2005) 文中的引理 5 可知

$$\{\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|X_{\mathbf{k}}|\ge 2^d\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}\}\subseteq\bigcup_1^{2^d}\{\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S_{\mathbf{k}}|\ge\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}\}\quad\forall\varepsilon>M.$$

从而由 (III) 亦可知

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d}|\mathbf{n}|^{r/2-2}P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|X_{\mathbf{k}}|\ge 2^d\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|})<\infty\quad\forall\varepsilon>M.\tag{4}$$

再因 $|S^{\mathbf{k}}_{\mathbf{n}}|\le|S_{\mathbf{n}}|+|X_{\mathbf{k}}|$, 我们有

$$\begin{aligned}&\{\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|S^{\mathbf{k}}_{\mathbf{n}}|\ge(2^d+1)\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}\}\subseteq\{|S_{\mathbf{n}}|\ge\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}\}\\&\bigcup\{\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}|X_{\mathbf{k}}|\ge 2^d\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}\}.\end{aligned}$$

因此由 (3) 和 (4) 式即知 (II) 成立.

最后，证 $(II) \Rightarrow (I)$. 注意

$$\Big|\frac{|\mathbf{n}|-1}{|\mathbf{n}|}S_{\mathbf{n}}\Big| = \Big|S_{\mathbf{n}} - \frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}\Big| = \Big|\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}\Big| \le \max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |S_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}|.$$

故由 (II) 可知，存在某个 $\epsilon > 0$ 使得

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d} |\mathbf{n}|^{r/2-2} P(|S_{\mathbf{n}}| \ge \epsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) < \infty. \tag{5}$$

又 $|X_{\mathbf{k}}| \le |S_{\mathbf{n}}| + |S_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}|$, 于是从 (II) 和 (5) 式可知，存在某个 $\epsilon_1 > 0$ 使得

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d} |\mathbf{n}|^{r/2-2} P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| \ge \epsilon_1\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) < \infty. \tag{6}$$

令 $2^{\mathbf{m}} = (2^{m_1}, 2^{m_2}, \cdots, 2^{m_d}) \in \mathcal{N}^d$, $\mathbf{m} \in \mathcal{N}^d$. 由 (6) 式可知，存在某个 $\epsilon_2 > 0$ 使得

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathcal{N}^d} |2^{\mathbf{m}}|^{r/2-1} P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le 2^{\mathbf{m}}} |X_{\mathbf{k}}| \ge \epsilon_2\sqrt{|2^{\mathbf{m}}|\log|2^{\mathbf{m}}|}) < \infty. \tag{7}$$

注意对每个充分大的 $\mathbf{m}$(即，每个分量 m_i 充分大， $i = 1, \cdots, d$),

$$\max_{2^{\mathbf{m}-1}\le\mathbf{n}<2^{\mathbf{m}}} \{\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| \ge 2^{d/2+1}\epsilon_2\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}\} \subseteq \{\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le 2^{\mathbf{m}}} |X_{\mathbf{k}}| \ge \epsilon_2\sqrt{|2^{\mathbf{m}}|\log|2^{\mathbf{m}}|}\}.$$

所以由 $r > 2$ 和 (7) 式可知，存在某个 $\epsilon_3 > 0$ 使得

$$P(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| \ge \epsilon_3\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) \to 0 \quad n \to \infty. \tag{8}$$

由王建峰和金敬森 (2005) 文中的引理 4 可知， (8) 式蕴涵对充分大的 $\mathbf{n}$,

$$|\mathbf{n}|P(|X_{\mathbf{1}}| \ge \epsilon_3\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) \le CP(\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| \ge \epsilon_3\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}).$$

从而由 (6) 式得到

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d} |\mathbf{n}|^{r/2-1} P(|X_{\mathbf{1}}| \ge \epsilon_3\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) < \infty. \tag{9}$$

由 Gut (1980) 文中的引理 2.1 可知， (9) 式等价于 $E|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2} < \infty$. ▌

参 考 文 献

[1] Alam K, Saxena K M L. Positive dependence in multivariate distributions. Comm Statist, 1981, **10A**(12): 1183–1196

[2] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications. Ann Statist, 1983, **11**(1): 286–295

[3] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependence random variables. Statist Probab Lett, 1992, **15**(3): 209–213

[4] 苏淳，赵林城，王岳宝. NA 序列的矩不等式与弱收敛. 中国科学， 1996, **26A**(12): 1091–1099

[5] 苏淳，王岳宝. 同分布 NA 序列的强收敛性. 应用概率统计， 1998, **14**(2): 131–140

[6] 梁汉营，苏淳. NA 序列对数律的收敛性. 科学通报， 1998, **43**(18): 1919–1925

[7] Shao Q M, Su C. The law of the iterated logarithm for negatively associated random variables. Stochastic Processes Appl, 1999, **83**(1): 139–148

[8] Zhang L X. A functional central limit theorem for asymptotically negatively dependent random fields. Acta Math Hungar, 2000, **86**(3): 237–259

[9] Lai T L. Limit theorems for delayed sums. Ann Probab, 1974, **2**(3): 432–440

[10] Gut A. Convergence rates for probabilities of moderate deviations for sums of random variables with multidimensional indices. Ann Probab, 1980, **8**(2): 298–313

[11] Zhang L X. A law of the iterated logarithm for negatively associated random fields. 2004, http://www.math.zju.edu.cn/zlx/techreport.htm.

[12] Chow Y S, Studden W J. Monotonicity of the variance under truncation and variations of Jensen's inequality. Ann Math Statist, 1969, **40**(3): 1106–1108

[13] 王建峰, 金敬森. 关于多指标变量的 Marcinkiewicz 大数律和完全收敛性. 数学物理学报，2005, **25A**(5): 734–743

Convergence Rate in the Law of Logarithm for NA Random Fields

Jin Jingsen

(Department of Mathematics, Taizhou University, Linhai 317000)

Abstract: Let d be a positive ingter and $\mathcal{N}^d$ denote the d-dimensional lattice of positive integers. Let $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathcal{N}^d\}$ be a same distribution NA random fields, put $S_{\mathbf{n}} = \sum\limits_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$, $S_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{k})} = S_{\mathbf{n}} - X_{\mathbf{k}}$, if $r > 2$, $EX_{\mathbf{1}} = 0$ and $\sigma^2 = Var(X_{\mathbf{1}})$, then there exists a positive constant $M := 100\sqrt{(r-2)(1+\sigma^2)}$ such that the following is equivalent:

(I) $E|X_{\mathbf{1}}|^r(\log|X_{\mathbf{1}}|)^{d-1-r/2} < \infty$,

(II) $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d} |n|^{r/2-2} P(\max\limits_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{k})}| \geq (2^d+1)\varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) < \infty \qquad \forall\varepsilon > M$,

(III) $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^d} |n|^{r/2-2} P(\max\limits_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}| \geq \varepsilon\sqrt{|\mathbf{n}|\log|\mathbf{n}|}) < \infty \qquad \forall\varepsilon > M$.

Key words: NA; Random fields; Law of logarithm; Convergence rate.

MR(2000) Subject Classification: 60F15