2005,**25A**(3):421—427

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

二次非线性算子方程精确解的表示*

[1] 崔明根 [2] 李云晖

([1] 哈尔滨工业大学(威海校区)数学系 威海 284209; [2] 哈尔滨学院数学系 哈尔滨 150086)

摘要:该文在再生核空间中讨论了一类非线性算子方程 $\boldsymbol{A}v\boldsymbol{B}v+\boldsymbol{C}v=f$ 的求解问题,并且给出了精确解的表达式.

关键词:非线性;算子方程;再生核;精确解.

***MR*(2000)主题分类**:45B05 **中图分类号**:O241.17 **文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)03-421-07

1 引言

论文[1]—[4]利用了一元再生核空间 $W_2^1[a,b]$ 中的再生核技巧,讨论了线性的积分方程、微分方程、积分微分方程以及一般的算子方程的求解问题,并且给出了这些方程的精确解的表达式. 所研究的这些方程都是线性方程. 在本文中我们在再生核空间中,讨论了本质上与上述问题完全不同的问题—非线性问题,给出了二次非线性算子方程

$$\boldsymbol{A}v\boldsymbol{B}v+\boldsymbol{C}v=f,\quad f,v\in W_2^1[a,b] \tag{1}$$

精确解的表达式. 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $W_2^1[a,b]\to W_2^1[a,b]$ 的有界线性算子. 本文的方法直接可以推广到一般的三次多项式型非线性算子方程

$$\boldsymbol{A}v\boldsymbol{B}v\boldsymbol{C}v+\boldsymbol{D}v\boldsymbol{E}v+\boldsymbol{F}v=f,\quad f,v\in W_2^1[a,b]$$

以及更高次的非线性算子方程的求解问题.

下面讨论二次非线性算子方程(1)的求解. 不妨假设某一点 $v_1(y_0)=1$,如果 $v(y_0)\neq1$ 且 $v(y_0)\neq0$,我们可将 $v(x)=v(y_0)v_1(x)$ 代入(1)式有 $\boldsymbol{A}'v_1\boldsymbol{B}'v_1+\boldsymbol{C}'v_1=f,v_1,f\in W_2^1[a,b]$ 且 $v(y_0)=1$.

2 预备知识

本文中恒假定 $\{g_k(t)\}_1^\infty$ 为 $W_2^1[a,b]$ 的一组完全标准正交系.

(Ⅰ) 空间 $W_2^1[a,b]$ 的定义为

$$W_2^1[a,b]=\{u\mid u\ \text{是一元绝对连续函数,且}\ u'\in L^2[a,b]\},$$

$W_2^1[a,b]$ 上的内积和范数定义为

收稿日期:2003-08-25; 修订日期:2004-09-29

E-mail:cmgyfs@263.net

* 基金项目:黑龙江省教育厅科学技术研究项目(10511014)资助

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1}=\int_a^b uv\mathrm{d}x+\int_a^b u'v'\mathrm{d}x,\quad u,v\in W_2^1[a,b],$$

$$\| u \|_{W_2^1}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^1}}.$$

文[5]中证明了 $W_2^1[a,b]$是一个具有再生核的 Hilbert 空间. 其再生核的表达式为

$$R_\xi(x)=\frac{1}{2\mathrm{sh}(b-a)}[\mathrm{ch}(x+\xi-a-b)+\mathrm{ch}(|x-\xi|-b+a)].$$

于是由再生核的定义,对任意的 $u\in W_2^1[a,b]$和指定的 x 有

$$u(x)=\langle u(\xi),R_x(\xi)\rangle_{W_2^1}.$$

(Ⅱ) 空间 $W\{[a,b]\times[a,b]\}$定义为:$W=W_2^1\otimes W_2^1$.

由论文[7]可知,两个具有再生核的 Hilbert 空间 $W_2^1[a,b]$的直积 $W_2^1\otimes W_2^1$ 可构造成空间 $\{\sum\limits_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}g_k(t)g_l(\tau)\mid\{\alpha_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}\in l^2,\ \alpha_{k,l}\in R\}$,且具有再生核 $R_x(\xi)R_y(\eta)$. 从而我们有

(a) $W=W_2^1\otimes W_2^1=\{\sum\limits_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}g_k(t)g_l(\tau)\mid\{\alpha_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}\in l^2,\ \alpha_{k,l}\in R\}$;

(b) $W\{[a,b]\times[a,b]\}$具有再生核 $R_x(\xi)R_y(\eta)$;

(c) 对 $\forall u_1,u_2,v_1,v_2\in W_2^1[a,b]$,有

$$(u_1u_2,v_1v_2)_W=\langle u_1,v_1\rangle_{W_2^1}\langle u_2,v_2\rangle_{W_2^1},$$

$$\| u_1(t)u_2(\tau)\|_W=\| u_1\|_{W_2^1}\| u_2\|_{W_2^1}.$$

3 求解方程(1)转化为求解二元线性算子方程组(2)

为求解方程(1),首先研究如下定义的二元线性算子 $\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K}u(t,\tau)(x)\equiv(\boldsymbol{L}u)(x)+(\boldsymbol{H}u)(x)=f,u\in W\{[a,b]\times[a,b]\},f\in W_2^1[a,b],\tag{2}$$

$$(Lu)(x)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}(u(t,\tau),[\boldsymbol{B}_\eta^*R_x(\eta)](\tau)[\boldsymbol{A}_\xi^*R_x(\xi)](t))_{(t,\tau),W},\tag{3}$$

$$(\boldsymbol{H}u)(x)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}(u(t,\tau),R_{y_0}(t)[\boldsymbol{C}_\xi^*R_x(\xi)](\tau))_W,\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的共轭算子,$\boldsymbol{A}_\xi^*$ 中的下标 ξ 表示算子 $\boldsymbol{A}^*$ 是作用于 ξ 的函数的.

(Ⅰ) $\boldsymbol{H}$ 是有界线性算子.

引理 1 任取 $u=W\{[a,b]\times[a,b]\}$,如果 $u(t,\tau)$作为 τ 的函数$\in W_2^1$,若此时固定 t,记 $u(t,\tau)=u_t(\tau)\in W_2^1$,则有 $\| u_t(\tau)\|_{\tau,W_2^1}\leqslant R_t(t)^{\frac{1}{2}}\| u\|_W$.

证 由于 $W=W_2^1\otimes W_2^1$,所以可设 $u(t,\tau)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}[\sum\limits_{l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}g_l(\tau)]g_k(t)$. 其中实序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}\in l^2$. 记 $f_k(\tau)=\sum\limits_{l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}g_l(\tau)$,则 $f_k(\tau)\in W_2^1[a,b]$且 $\| f_k(\tau)\|_\tau=(\sum\limits_{l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}^2)^{1/2}$. 固定 t,记 $u_n(\tau)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(\tau)g_k(t)\in W_2^1$. 往证$\{u_n(\tau)\}_1^\infty$ 为 $W_2^1[a,b]$中的柯西列. 不妨设 $m<n$,由

$$\| u_n-u_m\|_{W_2^1}=\|\sum_{k=m+1}^{n}f_k(\tau)g_k(t)\|_{\tau,W_2^1}\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}|g_k(t)|\cdot\| f_k(\tau)\|_{\tau,W_2^1}$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}(\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}^2)^{1/2}|g_k(t)|.$$

由再生核的性质,我们有

$$\| u_n - u_m \|_{W_2^1} \leqslant R_t(t)^{1/2} \Big(\sum_{k=m+1}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}^2 \Big)^{1/2} \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

所以$\{u_n(\tau)\}_1^\infty$ 为 $W_2^1[a,b]$中的柯西列，再由 W_2^1 完备性知

$$u_t(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\tau) g_k(t) \in W_2^1,$$

同时由 $u_n(\tau) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^1}} u_t(\tau)$，可得 $\| u_n \|_{W_2^1} \to \| u_t(\tau) \|_{\tau, W_2^1}$.

类似于上述过程的推导，我们有

$$\| u_n(\tau) \|_{W_2^1} \leqslant R_t(t)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}^2 \Big)^{1/2} \leqslant R_t(t)^{1/2} \| u \|_W,$$

令 $n\to\infty$，得

$$\| u_t(\tau) \|_{\tau, W_2^1} \leqslant R_t(t)^{1/2} \| u \|_W.$$

▌

定理 1　设 $\boldsymbol{C}$ 是 $W_2^1[a,b]\to W_2^1[a,b]$有界线性算子，则(4)式中定义的算子 H 是 $W\{[a,b]\times[a,b]\}\to W_2^1[a,b]$的有界线性算子.

证　$\forall u\in W$，则存在实序列$\{\alpha_{k,l}\}_{k,l=1}^\infty \in l^2$，使

$$u(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} g_l(\tau) \Big] g_k(t),$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}u)(x) &= (u(t,\tau), R_{y_0}(t)[\boldsymbol{C}_\xi^* R_x(\xi)](\tau))_{(t,\tau),W} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} \langle g_k(t), R_{y_0}(t) \rangle_{t, W_2^1} \langle g_l(\tau), [\boldsymbol{C}_\xi^* R_x(\xi)](\tau) \rangle_{\tau, W_2^1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} [\boldsymbol{C} g_l(\tau)](x) \Big] g_k(y_0). \end{aligned} \tag{5}$$

由引理 1，$u(y_0,\tau)\in W_2^1$，及 $\boldsymbol{C}$ 为 $W_2^1[a,b]\to W_2^1[a,b]$有界线性算子知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}[u(y_0,\tau)] &= \boldsymbol{C}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} g_l(\tau) g_k(y_0) \Big] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} [\boldsymbol{C} g_l(\tau)](x) \Big] g_k(y_0). \end{aligned} \tag{6}$$

综合(5)、(6)式有：$(\boldsymbol{H}u)(x) = \{\boldsymbol{C}[u(y_0,\tau)]\}(x) \in W_2^1$. 所以，$\boldsymbol{H}$ 是 $W\to W_2^1$ 的线性算子. 再次利用引理 1 及 $\boldsymbol{C}$ 的有界性知

$$\begin{aligned}\| \boldsymbol{H}u \|_{W_2^1} &= \| \{\boldsymbol{C}[u(y_0,\tau]\}(x) \|_{W_2^1} \leqslant \| \boldsymbol{C} \|_{W_2^1} \| u_{y_0}(\tau) \|_{W_2^1} \\ &\leqslant \| \boldsymbol{C} \|_{W_2^1} R_{y_0}(y_0)^{\frac{1}{2}} \| u \|_W. \end{aligned}$$

所以 $\| \boldsymbol{H} \|_{W\to W_2^1} \leqslant \| \boldsymbol{C} \|_{W_2^1} R_{y_0}(y_0)^{\frac{1}{2}}$. $\boldsymbol{H}$ 是 $W\{[a,b]\times[a,b]\}\to W_2^1[a,b]$的有界线性算子.

▌

(Ⅱ) $\boldsymbol{L}$ 为 $W\to W_2^1$ 的有界线性算子.

先给出 $R_x(y)$的性质：$R_x(x)$为连续函数，所以存在 $M>0$，使 $R_x(x)^{1/2}\leqslant M$.

定理 2　假定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $W_2^1[a,b]\to W_2^1[a,b]$的有界线性算子，对 $u\in W\{[a,b]\times[a,b]\}$，如果

(a) $(\boldsymbol{L}_1 u)(x,y)\in W\{[a,b]\times[a,b]\}$，

(b) x 的函数：$\Big\| \dfrac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{A}_\xi^* R_x(\xi)](t) \Big\|_{t, W_2^1} \in L^2[a,b]$，

(c) x 的函数：$\left\| \frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{B}_\eta^* R_x(\eta)](\tau) \right\|_{\tau, W_2^1} \in L^2[a,b]$，

则 $\boldsymbol{L}$ 是 $W\{[a,b]\times[a,b]\}\to W\{[a,b]\times[a,b]\}$的有界线性算子.

证

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{L}u)(x)| &= |(u(t,\tau),[\boldsymbol{B}_\eta^* R_x(\eta)](\tau)[\boldsymbol{A}_\zeta^* R_x(\zeta)](t))_{(t,\tau),W}| \\ &\leqslant \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{B}\| \, \|R_x(\eta)\|_{\eta,W_2^1} \|R_x(\zeta)\|_{\zeta,W_2^1} \|u\|_W, \end{aligned}$$

因为

$$\|R_x(\zeta)\|_{\zeta,W_2^1} = \{\langle R_x(\zeta),R_x(\zeta)\rangle_{\zeta,W_2^1}\}^{\frac{1}{2}} = (R_x(x))^{\frac{1}{2}} \leqslant M.$$

所以，$|(\boldsymbol{L}u)(x)| \leqslant M^2 \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{B}\| \, \|u\|_W$。

同理

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\boldsymbol{L}u)(x)\right| &= \left|\left(u(t,\tau),\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{B}_\eta^* R_x(\eta)](\tau)[\boldsymbol{A}_\zeta^* R_x(\zeta)](t)\right)_{(t,\tau),W}\right| \\ &\leqslant \left|\left(u(t,\tau),[\boldsymbol{B}_\eta^* R_x(\eta)](\tau)\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{A}_\zeta^* R_x(\zeta)](t)\right)_{(t,\tau),W}\right| \\ &\quad + \left|\left(u(t,\tau),[\boldsymbol{A}_\zeta^* R_x(\zeta)](t)\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{B}_\eta^* R_x(\eta)](\tau)\right)_{(t,\tau),W}\right| \\ &\leqslant M\|u\|\left\{\|\boldsymbol{B}\| \left\|\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{A}_\zeta^* R_x(\zeta)](t)\right\|_{t,W_2^1} \right. \\ &\quad \left. + \|\boldsymbol{A}\| \left\|\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{B}_\eta^* R_x(\eta)](\eta)\right\|_{\tau,W_2^1}\right\}. \end{aligned}$$

由条件(b)和(c)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\boldsymbol{L}_1 u)(x,x) \in L^2[a,b].$$

所以

$$\|(\boldsymbol{L}u)(x)\|_{x,W_2^1} \leqslant \mathrm{const}\, \|u\|_W,$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{const} = \{ & M^4 \|\boldsymbol{A}\|^2 \|\boldsymbol{B}\|^2 (b-a) + 2M^2 \{\|\boldsymbol{B}\|^2 \int_a^b \left\|\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{A}_\zeta^* R_x(\zeta)](t)\right\|_{t,W_2^1}^2 \mathrm{d}x \\ & + \|\boldsymbol{A}\|^2 \int_a^b \left\|\frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{B}_\eta^* R_x(\eta)](\tau)\right\|_{\tau,W_2^1}^2 \mathrm{d}x\}\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$ ∎

(Ⅲ) $\boldsymbol{K}$ 为 $W\to W_2^1$ 上的有界线性算子。

综合(Ⅰ)，(Ⅱ)知

定理 3 在定理 1 和定理 2 的条件下方程(2)中的 $\boldsymbol{K}$ 是 $W\{[a,b]\times[a,b]\}\to W_2^1[a,b]$ 的有界线性算子.

4 方程(2)的精确解

定理 4 设在(2)式中的算子 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足定理 2 和定理 3 的条件，且 $\boldsymbol{K}^{-1}$ 存在，如果 $\boldsymbol{K}^{-1}$ 是 $C[a,b]\to W$ 的有界线性算子，则方程(2)有唯一解，这个解可表示为

$$u(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(y_i)\beta_i^2 \psi_i(M), M \in [a,b]\times[a,b], \tag{7}$$

其中

$$\psi_k(M)=(\boldsymbol{K}^*\phi_k(x))(M),\beta_k=\frac{1}{\|\psi_k\|_W},\tag{8}$$

$$\phi_k(x)=R_{y_k}(x),\tag{9}$$

$$\rho_k(y_k)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\rho_k(x)|.\tag{10}$$

而 $\rho_k(x)$ 是递推定义的

$$\rho_0(x)=f(x),\tag{11}$$

$$H_k(M)=\rho_k(y_k)\beta_k^2\psi_k(M),\tag{12}$$

$$\rho_{k+1}(x)=\rho_k(x)-(\boldsymbol{K}H_k(M))(x),k=1,2,\cdots,\tag{13}$$

并且有 $\|r_{k+1}\|\leqslant\|r_k\|$，其中

$$r_{k+1}=u(M)-\sum_{j=0}^{k}\rho_j(y_j)\beta_j^2\psi_j(M).$$

证　在定理条件下，我们知道方程(2)的解存在，这个解记为 $u(M)$，反复应用(13)式有

$$\begin{aligned}\rho_{k+1}(x)&=\rho_{k-1}(x)-(\boldsymbol{K}H_{k-1}(M))(x)-(\boldsymbol{K}H_k(M))(x)\\&=\cdots=f(x)-\sum_{j=0}^{k}(\boldsymbol{K}H_j(M))(x),\end{aligned}$$

由此

$$\sum_{j=0}^{k}(\boldsymbol{K}H_j(M))(x)+\rho_{k+1}(x)=f(x).\tag{14}$$

设 $u(M)$ 为方程(2)的解. 令

$$r_0(M)=u(M),\tag{15}$$

$$r_{k+1}(M)=r_k(M)-H_k(M).\tag{16}$$

反复地利用此式有

$$u(M)=\sum_{j=0}^{k}\rho_j(y_j)\beta_j^2\psi_j(M)+r_{k+1}(M).\tag{17}$$

1）要证明对一切自然数 n 有

$$[\boldsymbol{K}r_j(M)](x)=\rho_j(x).\tag{18}$$

用数学归纳法证明：当 $j=0$ 时此式即为方程(2). 假定(18)式对 $j=1,2,\cdots,k$ 成立，即

$$[\boldsymbol{K}r_j(M)](x)=\rho_j(x),j=0,1,\cdots,k,\tag{19}$$

利用上式，并注意到(16)式和(19)式，我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{K}r_{k+1}(M)](x)&=[\boldsymbol{K}r_k(M)](x)-[\boldsymbol{K}H_k(M)](x)\\&=\rho_k(x)-[\boldsymbol{K}_MH_k(M)](x)=\rho_{k+1}(x).\end{aligned}$$

2）证明 $\|r_{k+1}\|_W\leqslant\|r_k\|_W$。

$$\|r_{k+1}\|_W^2=\|r_k\|_W^2+\|H_k(M)\|_W^2-2(r_k(M),H_k(M))_W,\tag{20}$$

其中

$$\|H_k(M)\|_W^2=\rho_k^2(y_k)\beta_k^4(\psi_k,\psi_k)=\rho_k^2(y_k)\beta_k^2.$$

利用(19)式，我们有

$$\begin{aligned}(r_k(M),H_k(M))_W&=\rho_k(y_k)\beta_k^2(r_k(M),(\boldsymbol{K}^*\phi_k)(M))_W\\&=\rho_k(y_k)\beta_k^2\langle(\boldsymbol{K}r_k)(x),\phi_k(x)\rangle_{W_2^1}\\&=\rho_k(y_k)\beta_k^2\langle\rho_k(x),R_{y_k}(x)\rangle_{W_2^1}\\&=\rho_k^2(y_k)\beta_k^2,\end{aligned}\tag{21}$$

于是由(21)式得出

$$\| r_{k+1} \|_W^2 = \| r_k \|_W^2 - \rho_k^2(y_k)\beta_k^2. \tag{22}$$

因此

$$\| r_{k+1} \|_W \leqslant \| r_k \|_W. \tag{23}$$

3）我们证明 $\rho_k(x) \to 0$（一致地）

（Ⅰ）我们证明 $\rho_k^2\beta_k^2 \to 0$。

反复利用(22)式，我们有

$$\begin{aligned}\| r_{k+1} \|_W^2 &= \| r_{k-1} \|_W^2 - \rho_{k-1}^2(y_{k-1})\beta_{k-1}^2 - \rho_k^2(y_k)\beta_k^2 \\ &= \cdots = \| u(M) \|_W^2 - \sum_{j=0}^{k} \rho_j^2(y_j)\beta_j^2\end{aligned}$$

或

$$\sum_{j=0}^{k} \rho_j^2(y_j)\beta_j^2 + \| r_{k+1} \|_W^2 = \| u(M) \|_W^2.$$

最后由

$$\sum_{j=0}^{k} \rho_j^2(y_j)\beta_j^2 \leqslant \| u(M) \|_W^2$$

得出上式左边级数是收敛级数，故 $\rho_j^2(y_j)\beta_j^2 \to 0$.

（Ⅱ）要证 β_k 有正的下界

由于

$$\beta_k = \frac{1}{\| \psi_k \|_W},$$

$$\| \psi_k \|_W = (\boldsymbol{K}^* \phi_k, \boldsymbol{K}^* \phi_k)_W^{1/2} \leqslant \| \boldsymbol{K} \| \ \| \phi_k \|_W^{1/2},$$

$$\| \phi_k \|_W^{\frac{1}{2}} = (R_{yk}(x), R_{yk}(x))_W^{1/2} = R_{yk}(y_k)^{\frac{1}{2}}.$$

因此

$$\beta_k \geqslant R_{yk}(y_k)^{-\frac{1}{2}} \| \boldsymbol{K} \|^{-1}, \tag{24}$$

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} R_y(y) = \frac{\mathrm{ch}(b-a)}{\mathrm{sh}(b-a)}.$$

由(24)式，有

$$\beta_k \geqslant \left\{ \frac{\mathrm{sh}(b-a)}{\mathrm{ch}(b-a)} \right\}^{\frac{1}{2}} \| \boldsymbol{K} \|^{-1}, \tag{25}$$

由（Ⅰ），（Ⅱ）得出 $\rho_k(y_k) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\rho_k(x)| \to 0$. 因此(17)式中的级数是一致收敛的. 即它在空间 $C[a,b]$ 中收敛，所以对每一个点 M，一致地有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(y_k)\beta_k^2 [\boldsymbol{K}\psi_k(M)](x) = f(x), f \in W_2^1[a,b]. \tag{26}$$

4）证明(7)式为方程(2)的解.

若 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}^{-1}$ 分别为 $W \to C[a,b]$ 和 $C[a,b] \to W$ 的有界线性算子，令

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \rho_k(y_k)\beta_k^2 \psi_k(M), \tag{27}$$

有

$$u_n(M) = \boldsymbol{K}^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{n} \rho_k(y_k)\beta_k^2 \boldsymbol{K}\psi_k(M)\Big), \tag{28}$$

$$\| u_n - u_m \|_W \leqslant \| K^{-1} \|_{C[a,b] \to W} \Big\| \sum_{k=n}^{m} \rho_k(y_k)\beta_k^2 \boldsymbol{K}\psi_k(M) \Big\|_{C[a,b]} \to 0 \quad (m, n \to \infty). \tag{29}$$

故$\{u_n\}$在 W 中收敛. 因此(26)式中的 $\sum$ 和 $\boldsymbol{K}$ 可以互换. 由(26)式有

$$\boldsymbol{K}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k(y_k)\beta_k^2\psi_k(M)\right)=f(x). \tag{30}$$

▌

5 求解方程(1)

定理 5 $v(x)$是方程(1)的解$\Leftrightarrow v(x)v(y)$是方程 $\boldsymbol{K}u=f$ 的解.

证 由 $\boldsymbol{K}$ 的定义有

$$(\boldsymbol{K}v(x)v(y))x=(\boldsymbol{A}v)(x)(\boldsymbol{B}v)x+(\boldsymbol{C}v)(x).$$

所以结论成立. ▌

根据定理 5,我们可以从定理 4 直接得出如下定理

定理 6 在定理 4 的条件下,如果方程(1)有解,则此解可表示为

$$v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k(y_k)\beta_k^2\psi_k(x,y_0), \tag{31}$$

其中 $\beta_k,\rho_k,y_k,\psi_k$ 是由(8)-(13)式定义的.

证 将(7)式中的 $u(M)(M=(x,y))$用 $v(x)v(y)$替代,并令 $y=y_0$,即得定理 6. ▌

参 考 文 献

[1] 李云晖,崔明根. 再生核空间 $W_2^2(*)$ 中积分-微分方程精确解的表示. 数学物理学报,1998,**18**(增刊):83-92

[2] 崔明根. 算子方程 $\boldsymbol{A}u=f$ 的解的表示. 高等学校计算数学学报,1995,**17**(1):82-86

[3] Cui Minggen, Deng Zhongxing. Solution to The Definite Solution Problem of Differential Eqations in Space. Advances in Math, 1988, **17**(2):327-329

[4] 邓中兴,崔明根. 第一类算子的解析解. 高等学校计算数学学报,1991,**13**(1):16-22

[5] 崔明根,邓中兴. W_2^1 空间中最佳插值算子. 计算数学,1986,**8**(2):209-216

[6] Wen Songlong, Cui Minggen. Best approximate intopolation operator in space W. J of Computational Mathmatics and Application, 1997, **3**

[7] Aronszajn N. Theory of reproducing Kernels. Trans A M S, 1950, **68**:337-404

The Exact Solution of Quadratic Nonlinear Operator Equation

[1]Cui Minggen [2]Li Yunhui

([1]*Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Weihai* 284209)

([2]*Department of Mathematics, Harbin University, Harbin* 150086)

Abstract: The paper consider the problems of solving a kind of nonlinear operator equation $Au+Bu+Cu=f$ and its exact solution is given.

Key words: Nonlinear; Operator equation; Reproducing kernel; Exact solution.

MR(2000) Subject Classification: 45B05