2005,**25A**(4):496－502

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

# 二阶时滞微分方程奇异半正边值问题*

林晓宁
（东北师范大学数学系　长春 130024）
许晓婕
（中国石油大学应用数学系　东营 257062）

**摘要**:该文致力于讨论二阶时滞微分方程奇异半正边值问题正解的存在性,我们的非线形项 f(t,y)在 y=0 处具有奇性.

**关键词**:时滞微分方程；奇异半正问题；正解的存在性.

**MR(2000)主题分类**:34B15　　**中图分类号**:O175.08　　**文献标识码**:A

**文章编号**:1003-3998(2005)04-496-07

## 1　引言

本文主要讨论二阶时滞微分方程奇异半正边值问题非负解的存在性,其中非线形项 $f(t,y)$在 $y=0$ 处有奇性. 此前,几乎所有的文献[3,6,7,8,10]都致力于讨论二阶(时滞)微分方程奇异和非奇异正问题非负解的存在性,只有最近的文章[4,9]讨论了常微分方程的半正非奇异问题,R. P. Agarwal and D. O'Regan 在文[1]中讨论了常微分方程的半正奇异问题,特别地,他们在文中证明了问题

$$\begin{cases} y''+\mu(y^{-\alpha}+y^{\beta}-1)=0,\ 0<t<1, \\ y(0)=y(1)=0,\quad \alpha>0,\beta>1,\mu>0, \end{cases}$$

有非负解 $y\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$满足 $y(t)>0,\forall t\in(0,1)$，这里 $\mu>0$ 充分小. 文[1] 中的存在性定理是通过使用一个很常用的锥不动点定理[2,5]建立的. 然而，到目前为止还没有发现有人讨论时滞微分方程的奇异半正问题，本文正是致力于填补这一空白.

在第二节中，我们将给出一个新的有关时滞微分方程奇异半正问题的存在性定理,特别地,我们将说明问题

$$\begin{cases} y''(t)+\mu(y^{-\alpha}(t-\tau)+y^{\beta}(t-\tau)-1)=0,t\in(0,1)\backslash\{\tau\}, \\ y(t)=(-t)^m,-\tau\leqslant t\leqslant 0,0<m\leqslant 1, \\ y(1)=0,0<\alpha<1<\beta,\ 0<\tau<1,\ \mu>0, \end{cases}$$

有非负解,其中 $\mu>0$ 充分小.

文中的存在性定理是通过 Krasnoselskii's 不动点定理[5]建立的,为方便读者,我们叙述如下

**定理 1.1**　设 $E=(E,\|\cdot\|)$是 Banach 空间,$K\subset E$ 是锥,假定 $\Omega_1$，$\Omega_2$ 是 $E$ 中的开集且满足 $0\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，另外，

---

收稿日期:2003-11-15；修订日期:2004-12-30
E-mail:linxn989@nenu.edu.cn
* 基金项目:国家自然科学基金(10171010)资助

$$A: K \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to K$$

是一个全连续算子且满足

(Ⅰ) $\| Ay \| \leqslant \| y \|, \forall y \in K \cap \partial\Omega_1$; $\| Ay \| \geqslant \| y \| \ \forall y \in K \cap \partial\Omega_2$ 或

(Ⅱ) $\| Ay \| \geqslant \| y \|, \forall y \in K \cap \partial\Omega_1$; $\| Ay \| \leqslant \| y \| \ \forall y \in K \cap \partial\Omega_2$.

则 $A$ 在 $K \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中有一个不动点.

## 2 奇异半正问题

本节我们考虑奇异半正问题

$$\begin{cases} y''(t) + \mu q(t) f(t, y(t-\tau)) = 0, & t \in (0,1) \backslash \{\tau\}, \\ y(t) = \xi(t), & -\tau \leqslant t \leqslant 0, \\ y(1) = 0; \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\mu > 0, 0 < \tau < 1$ 都是正常数. 我们的非线形项 $f(t, y)$ 在 $y = 0$ 处有奇性. 首先，我们给出下面的引理[1]

**引理 2.1**[1] 设 $q \in L^1[0,1]$ 满足 $q(t) > 0, \forall t \in (0,1)$. 则边值问题

$$\begin{cases} y'' + q(t) = 0, \ 0 < t < 1, \\ y(0) = 0, y(1) = 0; \end{cases}$$

有一个解 $\omega(t)$ 满足

$$w(t) \leqslant t(1-t)C_0, \ \forall t \in [0,1].$$

这里

$$C_0 = \max_{t \in [0,1]} \left\{ \frac{1}{1-t} \int_t^1 (1-x) q(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{t} \int_0^t x q(x) \mathrm{d}x \right\}.$$

利用定理 1.1 和上述引理,我们建立本文的主要结论。

**定理 2.1** 假设下列条件满足

$$\xi \in C[-\tau, 0], \xi(t) > 0, \forall t \in [-\tau, 0), \xi(0) = 0. \tag{2.2}$$

$$q \in C(0,1) \cap L^1[0,1] \text{ 满足 } q(t) > 0, \forall t \in (0,1). \tag{2.3}$$

$f: [0,1] \times (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ 连续且存在常数 $M > 0$ 满足

$$f(t,u) + M \geqslant 0, \forall (t,u) \in [0,1] \times (0, \infty). \tag{2.4}$$

$$f^*(t,u) = f(t,u) + M \leqslant g(u) + h(u), \ \forall (t,u) \in [0,1] \times (0, \infty) \tag{2.5}$$

且 $g$ 是 $(0, \infty)$ 上的单调不增连续正函数, $h$ 是 $[0, \infty)$ 上的非负连续函数且 $\frac{h}{g}$ 在 $(0, \infty)$ 上单调不减。

存在 $K_0 > 0$ 满足

$$g(ab) \leqslant K_0 g(a) g(b), \ \forall a > 0, \ b > 0. \tag{2.6}$$

$$a_0 = \int_\tau^1 s(1-s) q(s) g((s-\tau)(1+\tau-s)) \mathrm{d}s < \infty. \tag{2.7}$$

$$b_0 = \int_0^\tau s(1-s) q(s) f^*(s, \xi(s-\tau)) \mathrm{d}s < \infty. \tag{2.8}$$

存在 $r > \max\{\mu M C_0, \mu b_0\}$ 满足

$$\frac{r - \mu b_0}{g(r - \mu M C_0) \{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\}} \geqslant \mu K_0 a_0. \tag{2.9}$$

存在 $0 < a < \frac{1-\tau}{2}$ 和单调不增的连续函数 $g_1: (0, \infty) \to (0, \infty)$ 及连续函数 $h_1: [0, \infty) \to (0,$

$\infty$)使得$\frac{h_1}{g_1}$在$(0,\infty)$上单调不减且

$$f(t,u)+M\geqslant g_1(u)+h_1(u),\ \forall (t,u)\in[\tau+a,1-a]\times(0,\infty). \tag{2.10}$$

存在 $R>r$ 使得

$$\frac{Rg_1(\varepsilon a(a+\tau)R)}{g_1(R)g_1(\varepsilon a(a+\tau)R)+g_1(R)h_1(\varepsilon a(a+\tau)R)}\leqslant\mu\int_{\tau+a}^{1-a}G(\sigma,\ s)q(s)\mathrm{d}s; \tag{2.11}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意常数(选择后固定)满足 $1-\frac{\mu MC_0}{R}\geqslant\varepsilon$(因为 $R>r>\mu MC_0$,故 $\varepsilon$ 存在),$G(t,s)$是下面问题的格林函数

$$y''=0,y(0)=y(1)=0,$$

其中 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 满足

$$\int_{\tau+a}^{1-a}q(s)G(\sigma,\ s)\mathrm{d}s=\sup_{t\in[0,1]}\int_{\tau+a}^{1-a}q(s)G(t,\ s)\mathrm{d}s.$$

则(2.1)存在一个解 $y\in C[-\tau,1]\cap C^2((0,1)\backslash\{\tau\})$满足 $y(t)>0,\forall t\in(0,1)$.

**证** 为证(2.1)式存在非负解,我们考虑边值问题

$$\begin{cases}y''(t)+\mu q(t)f^*(t,y(t-\tau)-\phi(t-\tau))=0,t\in(0,1)\backslash\{\tau\},\\ y(t)=0,-\tau\leqslant t\leqslant0,\\ y(1)=0.\end{cases} \tag{2.12}$$

这里

$$\phi(t)=\begin{cases}\mu Mw(t),0\leqslant t\leqslant1,\\ -\xi(t),-\tau\leqslant t\leqslant0.\end{cases} \tag{2.13}$$

其中 $w$ 如引理 2.1 中定义.

我们将使用定理 1.1 证明(2.12)式有解 $y_1(t)$满足 $y_1(t)>\phi(t),\forall t\in(0,1)$且 $y_1(t)=0,\forall t\in[-\tau,0]$. 如果上述结论成立,则 $u(t)=y_1(t)-\phi(t)$, $-\tau\leqslant t\leqslant1$ 是(2.1)式的一个非负解,这是因为 $u(t)=\xi(t),\forall -\tau\leqslant t\leqslant0$ 且

$$\begin{aligned}u''(t)=y_1''(t)-\phi''(t)&=-\mu q(t)f^*(t,y_1(t-\tau)-\phi(t-\tau))+\mu Mq(t)\\&=-\mu q(t)[f(t,y_1(t-\tau)-\phi(t-\tau))+M]+\mu Mq(t)\\&=-\mu q(t)f(t,y_1(t-\tau)-\phi(t-\tau))\\&=-\mu q(t)f(t,u(t-\tau)),0<t<1.\end{aligned}$$

因而,我们将主要考虑问题(2.12). 令

$$E=\{u\in C[-\tau,1]:u(t)=0,\ \forall t\in[-\tau,0],\ u(1)=0\}$$

并赋予范数 $\|u\|:=\sup\{|u(t)|:-\tau\leqslant t\leqslant1\}$,则 $E$ 是一个 Banach 空间. 从现在开始,$\|u\|=\|u\|_{[0,1]}$, $\forall u\in E$,其中 $\|u\|_{[0,1]}=\sup\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$.

定义 $E$ 中的锥 $K$ 为

$$K=\{u\in E;\ u(t)\geqslant t(1-t)\|u\|,\ t\in[0,1]\}.$$

令

$$\Omega_1=\{u\in E;\|u\|<r\},\ \Omega_2=\{u\in E;\|u\|<R\}$$

且定义算子 $A:K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to E$ 为

$$(Ay)(t)=\begin{cases}\mu\int_0^1G(t,s)q(s)f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant1;\\ 0,\ -\tau\leqslant t\leqslant0.\end{cases}$$

首先,这样定义的算子 $A$ 是合理的. 事实上,若 $y\in K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$,则 $r\leqslant\|y\|\leqslant R$ 且 $y(t)\geqslant t(1-t)\|y\|\geqslant t(1-t)r$, $0\leqslant t\leqslant1$. 应用 Lemma 2.1 与 $y(t)\geqslant t(1-t)r$, $w(t)\leqslant t(1-t)C_0$, $r>\mu MC_0$,我们有

$$y(t)-\phi(t)=y(t)-\mu M\,w(t)\geqslant t(1-t)r-\mu M\,t(1-t)C_0$$
$$=t(1-t)(r-\mu M\,C_0),\quad t\in[0,1].$$

从而,当 $t\in(0,\tau)$时,

$$f^*(t,y(t-\tau)-\phi(t-\tau))=f^*(t,\xi(t-\tau));$$

当 $t\in(\tau,1)$时,

$$\begin{aligned}f^*(t,y(t-\tau)-\phi(t-\tau))&=f(t,y(t-\tau)-\phi(t-\tau))+M\\&\leqslant g(y(t-\tau)-\phi(t-\tau))+h(y(t-\tau)-\phi(t-\tau))\\&=g(y(t-\tau)-\phi(t-\tau))\{1+\frac{h(y(t-\tau)-\phi(t-\tau))}{g(y(t-\tau)-\phi(t-\tau))}\}\\&\leqslant g((t-\tau)(1+\tau-t)(r-\mu M\,C_0))\{1+\frac{h(R)}{g(R)}\}\\&\leqslant K_0\,g((t-\tau)(1+\tau-t))g(r-\mu MC_0)\{1+\frac{h(R)}{g(R)}\}.\end{aligned}$$

上述不等式连同(2.7)-(2.8)式保证 $A:K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to E$ 定义的合理性. 当 $y\in K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$,我们有

$$\begin{cases}\|Ay\|_{[0,1]}\leqslant\mu\int_0^1 s(1-s)q(s)f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\mathrm{d}s,\\(Ay)(t)\geqslant t(1-t)\mu\int_0^1 s(1-s)q(s)f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\mathrm{d}s\\\qquad\geqslant t(1-t)\|Ay\|_{[0,1]}=t(1-t)\|Ay\|,\ t\in[0,1],\end{cases}$$

即,$Ay\in K$,故 $A:K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$. 下面我们将证明 $A:K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续的. 为此,设 $y_n$, $y\in K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$且 $\|y_n-y\|\to0$ 当 $n\to\infty$. 显然有 $r\leqslant\|y_n\|=\|y_n\|_{[0,1]}\leqslant R$, $r\leqslant\|y\|=\|y\|_{[0,1]}\leqslant R$, $y_n(t)\geqslant t(1-t)r$, $y(t)\geqslant t(1-t)r$, $\forall\,0\leqslant t\leqslant1$. 同时注意到 $y_n(s)-\phi(s)\geqslant s(1-s)(r-\mu M\,C_0)$ 和 $y(s)-\phi(s)\geqslant s(1-s)(r-\mu M\,C_0)$, $\forall\,s\in[0,1]$, 我们有

$$\rho_n(s)=|f^*(s,y_n(s-\tau)-\phi(s-\tau))-f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))|=0,s\in(0,\tau),$$
$$\rho_n(s)=|f^*(s,y_n(s-\tau)-\phi(s-\tau))-f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))|\to0,$$
$$\text{as}\quad n\to\infty,\ s\in(\tau,1),$$
$$\rho_n(s)\leqslant2K_0\{1+\frac{h(R)}{g(R)}\}g(r-\mu MC_0)g((s-\tau)(1+\tau-s)),\ \forall\,s\in(\tau,1).$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理,我们有

$$\|Ay_n-Ay\|=\|Ay_n-Ay\|_{[0,1]}\leqslant\sup_{t\in[0,1]}\mu\int_0^1 G(t,s)q(s)\rho_n(s)\mathrm{d}s\to0,\ n\to\infty,$$

因此 $A:K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 连续. 又当 $y\in K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$时,

$$\begin{aligned}\|Ay\|&=\|Ay\|_{[0,1]}=\sup_{t\in[0,1]}\mu\int_0^1 G(t,s)q(s)f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\mathrm{d}s\\&\leqslant\sup_{t\in[0,1]}\mu\int_0^\tau G(t,s)q(s)f^*(s,\xi(s-\tau))\mathrm{d}s\\&\quad+\sup_{t\in[0,1]}\mu\int_\tau^1 G(t,s)q(s)f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\mathrm{d}s\\&\leqslant\mu b_0+\mu\int_\tau^1 s(1-s)q(s)g(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\{1+\frac{h(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))}{g(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))}\}\mathrm{d}s\\&\leqslant\mu b_0+\mu\int_\tau^1 s(1-s)q(s)K_0g((s-\tau)(1+\tau-s))g(r-\mu MC_0)\{1+\frac{h(R)}{g(R)}\}\mathrm{d}s\\&=\mu b_0+\mu a_0\,K_0g(r-\mu MC_0)\{1+\frac{h(R)}{g(R)}\},\end{aligned}$$

当 $t,\ t'\in[0,1]$时,

$$|(Ay)(t)-(Ay)(t')|\leqslant\mu\int_0^\tau|G(t,s)-G(t',s)|q(s)f^*(s,\xi(s-\tau))\mathrm{d}s$$

$$+\mu K_0g(r-\mu MC_0)\{1+\frac{h(R)}{g(R)}\}\int_\tau^1|G(t,s)-G(t',s)|q(s)g((s-\tau)(1+\tau-s))\mathrm{d}s.$$

既然$(Ay)(t)=0,t\in[-\tau,0]$, Arzela-Ascoli 定理保证 $A:K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是紧的.

下面我们证明

$$\|Ay\|\leqslant\|y\|,\forall K\cap\partial\Omega_1. \tag{2.14}$$

为此,令 $y\in K\cap\partial\Omega_1$,则 $\|y\|=\|y\|_{[0,1]}=r$ 且 $y(t)\geqslant t(1-t)r,\forall t\in[0,1]$. 从而当 $t\in(0,1)$时,我们有

$$y(t)-\phi(t)\geqslant t(1-t)r-\mu M\,t(1-t)C_0\geqslant t(1-t)(r-\mu M\,C_0),$$

当 $t\in[0,1]$时,我们有

$$\begin{aligned}&(Ay)(t)\\&=\mu\int_0^1G(t,s)q(s)f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\mathrm{d}s\\&=\mu\int_0^\tau G(t,s)q(s)f^*(s,\xi(s-\tau))\mathrm{d}s+\mu\int_\tau^1G(t,s)q(s)f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\mathrm{d}s\\&\leqslant\mu b_0+\mu\int_\tau^1s(1-s)q(s)[g(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))+h(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))]\mathrm{d}s\\&=\mu b_0+\mu\int_\tau^1s(1-s)q(s)g(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\{1+\frac{h(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))}{g(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))}\}\mathrm{d}s\\&\leqslant\mu b_0+\mu\int_\tau^1s(1-s)q(s)g((s-\tau)(1+\tau-s)(r-\mu MC_0))\{1+\frac{h(r)}{g(r)}\}\mathrm{d}s\\&\leqslant\mu b_0+\mu K_0\,g(r-\mu MC_0)\{1+\frac{h(r)}{g(r)}\}\int_\tau^1s(1-s)q(s)g((s-\tau)(1+\tau-s))\mathrm{d}s\\&=\mu b_0+\mu a_0K_0g(r-\mu M\,C_0)\{1+\frac{h(r)}{g(r)}\}.\end{aligned}$$

这一事实连同(2.9)式说明

$$\|Ay\|=\|Ay\|_{[0,1]}\leqslant r=\|y\|,$$

即(2.14)式成立.

接下来我们证明

$$\|Ay\|\geqslant\|y\|,\forall K\cap\partial\Omega_2. \tag{2.15}$$

为此,令 $y\in K\cap\partial\Omega_2$,我们有 $\|y\|=\|y\|_{[0,1]}=R$ 且 $y(t)\geqslant t(1-t)R,\forall t\in[0,1]$. 从而当 $t\in[0,1]$时,我们有

$$\begin{aligned}y(t)-\phi(t)&=y(t)-\mu M\,w(t)\\&\geqslant t(1-t)R-\mu M\,C_0\,t(1-t)\\&\geqslant t(1-t)R(1-\frac{\mu M\,C_0}{R})\\&\geqslant\varepsilon t(1-t)R.\end{aligned}$$

因此

$$y(t-\tau)-\phi(t-\tau)\geqslant\varepsilon a(a+\tau)R,\ \forall t\in[a+\tau,1-a].$$

故

$$\begin{aligned}(Ay)(\sigma)&=\mu\int_0^1G(\sigma,s)\,q(s)f^*(s,y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\mathrm{d}s\\&\geqslant\mu\int_{\tau+a}^{1-a}G(\sigma,\ s)q(s)[g_1(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))+h_1(y(s-\tau)-\phi(s-\tau)]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$=\mu\int_{\tau+a}^{1-a}G(\sigma,s)q(s)g_1(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))\{1+\frac{h_1(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))}{g_1(y(s-\tau)-\phi(s-\tau))}\}ds$$

$$\geqslant \mu g_1(R)\int_{\tau+a}^{1-a}G(\sigma,s)q(s)\{1+\frac{h_1(\varepsilon(a+\tau)R)}{g_1(\varepsilon a(a+\tau)R)}\}ds.$$

这一事实连同(2.11)式表明$(Ay)(\sigma)\geqslant R=\|y\|$成立,即$\|Ay\|\geqslant\|y\|$,故(2.15)式成立. ▌

总上,定理1.1说明$A$在$y\in K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中有一个不动点, 即$r\leqslant\|y\|=\|y\|_{[0,1]}\leqslant R$,$y(t)\geqslant t(1-t)r$, $\forall t\in[0,1]$. 因此$y(t)$是(2.12)式的一个解且满足$y(t)>\phi(t)$, $\forall t\in(0,1)$; $y(t)=0$, $\forall t\in[-\tau,0]$.

**例** 考虑下面边值问题

$$\begin{cases} y''(t)+\mu(y^{-\alpha}(t-\tau)+y^{\beta}(t-\tau)-1)=0, & t\in(0,1)\backslash\{\tau\}, \\ y(t)=(-t)^m, & -\tau\leqslant t\leqslant 0,\ 0<m\leqslant 1, \\ y(1)=0, & 0<\alpha<1<\beta,\ 0<\tau<1. \end{cases} \tag{2.16}$$

其中$\mu\in(0,\mu_0)$满足

$$\frac{\mu_0}{2}+(\frac{2\mu_0 a_0}{1-\mu_0 b_0})^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1,\mu_0<\frac{1}{b_0}. \tag{2.17}$$

这里

$$a_0=\int_\tau^1 s(1-s)(s-\tau)^{-\alpha}(1+\tau-s)^{-\alpha}ds<\infty,$$

$$b_0=\int_0^\tau s(1-s)[(\tau-s)^{-m\alpha}+(\tau-s)^{m\beta}]ds<\infty.$$

则(2.16)式有一个解$y$满足$y(t)>0$, $\forall t\in(0,1)$.

为此,我们应用定理2.1,令

$$g(y)=g_1(y)=y^{-\alpha},\ h(y)=h_1(y)=y^{\beta},\ q(t)=1,\ M=1,\xi(t)=(-t)^m,$$

$$K_0=1,C_0=\frac{1}{2},\ \varepsilon=\frac{1}{2},a=\frac{1-\tau}{4}.$$

显然(2.2)−(2.8)式和(2.10)式成立. 若$r=1$,则(2.9)式成立,这是因为由(2.17)式得

$$\mu K_0 a_0=\mu a_0<\mu_0 a_0\leqslant\frac{1}{2}(1-\mu_0 b_0)(1-\frac{\mu_0}{2})^{\alpha}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1-\mu b_0)(1-\frac{\mu}{2})^{\alpha}$$

$$=\frac{r-\mu b_0}{\{1+\frac{h(r)}{g(r)}\}g(r-\mu M C_0)}.$$

又因为$\beta>1$,则

$$\frac{R\,g_1(\varepsilon a(a+\tau)R)}{g_1(R)g_1(\varepsilon a(a+\tau)R)+g_1(R)h_1(\varepsilon(a+\tau)R)}$$

$$=\frac{[\varepsilon a(a+\tau)]^{-\alpha}R^{1+\alpha}}{[\varepsilon a(a+\tau)]^{-\alpha}+[\varepsilon a(a+\tau)]^{\beta}R^{\alpha+\beta}}\to 0,\quad 当 R\to\infty,$$

这表明(2.11)式对于充分大$R$成立. 因此定理中所有条件都满足,故结论成立.

## 参 考 文 献


[1] Agarwal R P, Donal O'Regan. Semipositone Dirichlet boundary value problem with singular dependent nonlinearities. Houston J Math, 2004, (30): 287−308

[2] Agarwal R P, Donal O'Regan. Existence theorem for single and multiple solutions to singular positone boundary val-

ue problems. Jour Differential Equations, 2001, **175**(2): 393—414

[3] Agarwal R P, O'Regan D. Singular boundary value problems for superlinear second ordinary and delay differential equations. J Differential Equations, 1996, **130**(2): 335—355

[4] Bobisud L E. Behavior of solutions for a Robin problem. Jour Differential Equations, 1990, **85**(1): 91—104

[5] Deimling K. Nonlinear functional analysis. New York: Springer Verlag, 1985

[6] Erbe L H, Qingkai Kong. Boundary value problems for singular second-order functional differential equations. J Comput Appl Math, 1994, **53**(3): 377—388

[7] Jiang D Q, Wang J Y. On boundary value problems for singular second-order functional differential equations. J Comput Appl Math, 2000, **116**(2): 231—241

[8] Jiang D Q. Multiple positive solutions for boundary value problems of second-order delay differential equations. Appl Math Letters, 2002, **15**(5): 575—583

[9] Mengseng L. On a fourth order eigenvalue problem. Advances in Math, 2000, **29**(1): 91—93

[10] Weng P X, Jiang D Q. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE. Computer and Mathematics with Applications, 1999, **37**(10): 1—9

# Singular Semipositone Boundary Value Problems of Second Order Delay Differential Equations

[1]Lin Xiaoning [2]Xu Xiaojie

([1]*Department of Mathematics, Northeast Normal University, Changchun* 130024)

([2]*Department of Applied Mathematics, Petroleum University, Dongying* 257062)

**Abstract:** In this paper the authors present a new existence result for singular semipositone bopundary value problems of second order delay differential equations. Throughout their paper the nonlinearity may be singular in its dependent variable.

**Key words:** Existence; Semipositone problem; Singular delay differential equations.

**MR(2000) Subject Classification:** 34B16