2004,**24A**(1):105－115

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

非线性 Sobolev-Galpern 方程的近似惯性流形*

尚亚东
(广州大学数学系　广州 510405)
郭柏灵
(北京应用物理与计算数学研究所非线性研究中心　北京 100088)

摘要:近似惯性流形概念与耗散偏微分方程的长时间行为研究有关,该文对非线性 Sobolev-Galpern 方程构造了两个近似惯性流形. 证明了非平滑近似惯性流形 Σ 和平滑近似惯性流形 $\Sigma_0=P_mH$ 对整体吸引子有相同的逼近阶数.

关键词:非线性 Sobolev-Galpern 方程;长时间行为;近似惯性流形.

MR(2000)主题分类:35B40;35Q55　　**中图分类号**:O175.29　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)01-105-11

1　引言

近似惯性流形与耗散偏微分方程的长时间行为有关. 近似惯性流形是相空间中的一张有限维光滑曲面,它吸引所有解轨线到其小邻域中. 这个概念引出解的长时间行为数值处理的新的途径一非线性 Galerkin 方法. 对许多偏微分方程,已经证明了近似惯性流形的存在性. 这方面的文献,可见 Foias,Manley and Temam [1], Debussche and Marion [2], Chueshov[3], 赵 [4], 郭, 王[5], 刘 [6]和其中的参考文献.

本文考察非线性 Sobolev-Galpern 方程

$$u_t-u_{xxt}-\sigma(u_x)_x=g(u)+f(x),\quad x\in\Omega,t>0 \tag{1.1}$$

的长时间行为. 这里 σ 和 $g:R\to R$ 为两个 C^∞ 函数, $f(x)\in L^2(\Omega)$,$\Omega\subset R$ 为一有界区间.

形如(1.1)的方程称为拟抛物方程或 Sobolev-Galpern 方程,其特征是最高阶导数项中带有对时间的一次导数. 这类方程出现在许多数学物理领域,例如用于模拟热力学过程[7－8], 岩石裂缝中渗流[9－10],土壤中湿气的迁移[11], 以及二阶流体中的剪切流[12－14]. 许多作者研究了方程(1.1)解的存在性、惟一性,如 Coleman [15],Ting [16],Colton [17－18], Bui An ton [19], 施[20], 刘、王[21], 李等[22], 及其中的参考文献.

在第 2 节,导出解的时间一致先验估计,从而能够证明解的存在性. 第 3 节我们引入方程(1.1)的平滑近似惯性流形 $\Sigma_0=P_mH$ 和非平滑近似惯性流形 Σ. 证明了如果初始值 u_0 充分光滑, 那么对所有整数 $k\geqslant1$,在 t 足够大时,解 $u(t)$进入到 Σ_0(或 Σ)的一个 $C_k\lambda_{m+1}^{-k}$(在 $H^2(\Omega)$范数意义下)邻域中,其中 C_k 为只与数据(σ,g,f,Ω)和 k 有关的常数,λ_{m+1} 是算子 $-\partial_{xx}$ 相应于周期边界条件的 第($m+1$) 个特征值. 因为在 $m\to\infty$ 时, $\lambda_{m+1}\to\infty$, 我们知道当 m

收稿日期:2002-02-04; 修订日期:2003-03-12

* 基金项目:国家自然科学基金(10271034)资助

足够大，$u(t)$与Σ(或Σ_0)的($H^2(\Omega)$中)距离可以任意小.

2 非线性解半群

考虑下面非线性 Sobolev-Galpern 型方程

$$u_t - u_{xxt} - \sigma(u_x)_x = g(u) + f(x), \quad (x,t) \in \Omega \times R^+, \tag{2.1}$$

连同初始条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \tag{2.2}$$

和周期边界条件

$$\Omega = (0,L) \text{ 且 } u \text{ 是 } \Omega \text{ 周期的.} \tag{2.3}$$

其中$\sigma, g: R \to R$为两个C^∞函数，$f(x) \in L^2_{\rm per}(\Omega)$. 我们将建立解$u(t)$在$H^k_{\rm per}(\Omega)$中的时间一致先验估计,接着证明问题(2.1)－(2.3)整体解的存在性和惟一性.

文中，$\Omega=(0,l)$,并且记$H=L^2(\Omega)$,赋以通常内积$(\cdot,\cdot)$,其上范数记为$\|\cdot\|$. 对任意$1\leqslant p\leqslant\infty$，$\|\cdot\|_p$记$L^p(\Omega)$的范数($\|\cdot\|_2=\|\cdot\|$). 一般地，$\|\cdot\|_X$表示任意 Banach 空间$X$上的范数.

下面总假定σ, g满足条件

$$\text{存在正常数 } \nu \text{ 使得 } \sigma'(s) \geqslant \nu > 0, \quad \forall s \in R. \tag{2.4}$$

$$\text{存在正常数 } \mu \text{ 使得 } g'(s) \leqslant -\mu, \quad \forall s \in R, g(0) = 0. \tag{2.5}$$

引理 1 假设(2.4)－(2.5)成立，$f(x) \in L^2_{\rm per}(\Omega)$，$u_0(x) \in H^1_{\rm per}(\Omega)$. 则有

$$\|u(t)\|_{H^1} \leqslant \|u_0\|^2_{H^1} e^{-\delta_0 t} + \frac{\|f(x)\|^2}{\mu\delta_0}(1-e^{-\delta_0 t}), \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2.6}$$

因此,存在$t_0=t_0(R)>0$使得

$$\|u\|_{H^1} \leqslant E_1, \quad t \geqslant t_0(R), \tag{2.7}$$

当$\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$,这里$\delta_0=\min(2\nu,\mu)$,E_1为只依赖于数据(ν,μ,f,Ω)的常数.

证 用u与方程(2.1)在H中做内积，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 + \int_\Omega \sigma(u_x)u_x dx = (g(u),u) + (f,u). \tag{2.8}$$

让

$$\sigma_1(s) = \sigma(s) - \nu s - \sigma(0).$$

则由(2.4),有$\sigma_1{}'(s)\geqslant 0$,$\sigma_1(0)=0$,并且

$$\int_\Omega \sigma(u_x)u_x dx = \int_\Omega \sigma_1(u_x)u_x dx + \nu\|u_x\|^2 \geqslant \nu\|u_x\|^2. \tag{2.9}$$

因为$g(s)$满足(2.5)

$$(g(u),u) = (g(u)-g(0),u) = (g'(\xi)u,u) \leqslant -\mu\|u\|^2, \tag{2.10}$$

由 Hölder 不等式 和 Young 不等式

$$(f,u) \leqslant \frac{\mu}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\mu}\|f(x)\|^2. \tag{2.11}$$

由(2.8)－(2.11)有

$$\frac{d}{dt}(\|u\|^2 + \|u_x\|^2) + 2\nu\|u_x\|^2 + \mu\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{\mu}\|f(x)\|^2. \tag{2.12}$$

据 Gronwall 引理，得

$$\|u(t)\|^2+\|u_x(t)\|^2\leqslant(\|u(0)\|^2+\|u_x(0)\|^2)\mathrm{e}^{-\delta_0 t}+\frac{\|f(x)\|^2}{\mu\delta_0}(1-\mathrm{e}^{-\delta_0 t}). \tag{2.13}$$

这里 $\delta_0=\min(2\nu,\mu)$. 当 $\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$,从(2.13)得到

$$\|u(t)\|^2+\|u_x(t)\|^2\leqslant 2\frac{\|f(x)\|^2}{\mu\delta_0},\quad \forall t\geqslant t_0(R), \tag{2.14}$$

其中 $t_0(R)=\frac{1}{\delta_0}\ln[\frac{\mu\delta_0 R^2}{\|f(x)\|^2}]$. (2.13) 和 (2.14) 完成引理 1 的证明. ▌

由 Agmon 不等式

$$\|u\|_\infty\leqslant C\|u\|^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2},\quad \forall u\in H^1(\Omega), \tag{2.15}$$

从引理 1,推出

$$\|u\|_\infty\leqslant C,\quad \forall t\geqslant t_0(R). \tag{2.16}$$

引理 2 假设 (2.4)—(2.5) 成立, $f(x)\in L^2_{\text{per}}(\Omega)$, $u_0(x)\in H^2_{\text{per}}(\Omega)$. 则有

$$\|u\|_{H^2}^2\leqslant E_2,\quad \forall \geqslant t_1(R). \tag{2.17}$$

其中 E_2 依赖于数据(ν,μ,f,Ω), t_1 与数据(λ,μ,f,Ω) 和 R 有关,当 $\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$.

证 做 $-u_{xx}$ 与方程(2.1)在 H 中的内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2)+\int_\Omega\sigma(u_x)_x u_{xx}\mathrm{d}x=(g(u),-u_{xx})+(f(x),-u_{xx}). \tag{2.18}$$

因为

$$(\sigma(u_x)_x,u_{xx})=(\sigma'(u_x)u_{xx},u_{xx})\geqslant\nu\|u_{xx}\|^2, \tag{2.19}$$

$$|(f(x),-u_{xx})|\leqslant\|f\|\|u_{xx}\|\leqslant\frac{\nu}{4}\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{4\nu}\|f\|^2, \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}|(g(u),-u_{xx})|&\leqslant\|g(u)\|_\infty\|u_{xx}\|_{L^1}\\&\leqslant C_1|\Omega|^{1/2}\|u_{xx}\|\\&\leqslant\frac{\nu}{4}\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{4\nu}C_1{}^2|\Omega|,\end{aligned} \tag{2.21}$$

由(2.18)—(2.21)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2)+\nu\|u_{xx}\|^2\leqslant C_2, \tag{2.22}$$

其中 $C_2=\frac{1}{2\nu}(\|f\|^2+C_1{}^2|\Omega|)$. 由(2.22) 和引理 1,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2)+\nu(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2)\leqslant\nu\|u_x\|^2+C_2\leqslant C_3,\quad\forall t\geqslant t_0(R), \tag{2.23}$$

对(2.23)的证明稍微修改后,我们也可推导出 $\forall T>0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2)+\nu(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2)\leqslant C_4,\quad\forall 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.24}$$

其中 C_4 依赖于数据,T 及 R 当 $\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$.

由 Gronwall 引理和(2.24)推出

$$\begin{aligned}\|u_x(t)\|^2+\|u_{xx}(t)\|^2&\leqslant(\|u_x(0)\|^2+\|u_{xx}(0)\|^2)\mathrm{e}^{-\nu t}+\frac{C_4}{\nu}\\&\leqslant R^2\mathrm{e}^{-\nu t}+\frac{C_4}{\nu}\leqslant C_5,\quad\forall 0\leqslant t\leqslant T,T>0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

对 (2.23)应用 Gronwall 引理,我们得到

$$\begin{aligned}\|u_x(t)\|^2+\|u_{xx}(t)\|^2 &\leqslant (\|u_x(t_0)\|^2+\|u_{xx}(t_0)\|^2)\mathrm{e}^{-\nu(t-t_0)}+\frac{C_3}{\nu}\\ &\leqslant C_5\mathrm{e}^{-\nu(t-t_0)}+\frac{C_3}{\nu},\quad \forall t\geqslant t_0\\ &\leqslant \frac{2C_3}{\nu},\quad \forall t\geqslant t_1.\end{aligned}\tag{2.26}$$

其中 $t_1=\max\{t_0,t_0+\frac{1}{\nu}\ln(\nu C_5(R)/C_3)\}$. 方程(2.26)和引理 1 推出引理 2 结论. ▌

由 Agmon 不等式和引理 2, 有

$$\|u_x\|_\infty\leqslant E_3,\qquad \forall t\geqslant t_1.\tag{2.27}$$

引理 3 如果引理 2 的条件满足, 那么我们有

$$\|u_t\|_{H^1}\leqslant E_4,\qquad \forall t\geqslant t_1(R).\tag{2.28}$$

当 $\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$,其中 E_4 依赖于数据(ν,μ,f,Ω),t_1 与数据(ν,μ,f,Ω) 和 R 有关.

证 用 u_t和(2.1)在 H 中做内积,发现有

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2 &\leqslant |(\sigma(u_x),u_{xt})|+|(g(u),u_t)|+|(f(x),u_t)|\\ &\leqslant \|\sigma(u_x)\|_\infty|\Omega|^{1/2}\|u_{xt}\|+\|g(u)\|_\infty|\Omega|^{1/2}\|u_t\|+\|f\|\|u_t\|\\ &\leqslant C_6|\Omega|^{1/2}\|u_{xt}\|+(C_7|\Omega|^{1/2}+\|f\|)\|u_t\|,\forall t\geqslant t_1(R),\end{aligned}\tag{2.29}$$

不等式(2.29)蕴含有

$$\|u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2\leqslant C_8,\qquad \forall t\geqslant t_1(R).\tag{2.30}$$

引理 3 证毕. ▌

由上述估计和方程(2.1), 我们可得

引理 4 如果引理 2 的条件满足, 那么也有

$$\|u_t\|_{H^2}\leqslant E_5,\qquad \forall t\geqslant t_1(R).$$

其中 E_4 依赖于数据 (ν,μ,f,Ω),t_1 与数据(ν,μ,f,Ω) 和 R 有关,当 $\|u_0\|_{H^2}\leqslant R$.

定理 1 假定 $\sigma(s)$,$g(s)$ 满足条件(2.4)—(2.5), $f\in L^2(\Omega)$,那么对 $u_0(x)\in H^2_{\rm per}(\Omega)$ 问题(2.1)—(2.3) 容许有惟一解 $u(x,t)\in L^\infty(R^+,H^2_{\rm per}(\Omega))$,$u_t(x,t)\in L^\infty(R^+,H^2_{\rm per}(\Omega))$,此外, 映射 $S(t):u_0\to u(t)$ 对所有 $t>0$ 连续.

证 应用上面引理和 Galerkin 方法,可以证明问题(2.1)—(2.3)整体解的存在性, 证明是标准的,这里省略. 设 u 和 v 是问题(2.1)—(2.3)的对应于初始数据 u_0,v_0 的两个解并且 $w=u-v$. 则 w 满足

$$w_t-w_{xxt}-(\sigma(u_x)-\sigma(v_x))_x=g(u)-g(v),\tag{2.31}$$

$$w(0=w_0,\tag{2.32}$$

取 w 和(2.31) 在 H 中做内积,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w\|^2+\|w_x\|^2)+(\sigma(u_x)-\sigma(v_x),w_x)=(g(u)-g(v),w),\tag{2.33}$$

因为

$$(\sigma(u_x)-\sigma(v_x),w_x)\geqslant\nu\|w_x\|^2,\tag{2.34}$$

$$(g(u)-g(v),w)\leqslant-\mu\|w\|^2,\tag{2.35}$$

因此我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w\|^2+\|w_x\|^2)+\mu\|w\|^2+\nu\|w_x\|^2\leqslant 0.\tag{2.36}$$

由 Gronwall 引理,得

$$\| w(t) \|^2 + \| w_x(t) \|^2 \leqslant (\| w(0) \|^2 + \| w_x(0) \|^2). \tag{2.37}$$

这意味着解 $u(t)$ 是惟一的. ▌

为了构造近似惯性流形,我们需要对解做更高阶的时间一致先验估计.

引理 5 假设 (2.4)-(2.5) 成立,$f \in H^{k-2}(\Omega)$,$u_0 \in H^k_{\text{per}}(\Omega)$,$k \in N$. 那么我们有

$$\| u \|_{H^k} \leqslant E_k, \qquad \forall t \geqslant t_k.$$

其中 E_k 与数据和 k 有关,t_k 依赖于数据,k 和 R 当 $\| u_0 \|_{H^k} \leqslant R$.

证 我们用对 k 做数学归纳法来证明此引理.

(i) 若 $k=1$,引理 5 退化为引理 1. 因此,在此情形下,引理结论真.

(ii) 若 $k=2$,引理 5 退化成引理 2,且因此引理 5 对 $k=2$ 成立.

(iii) 假设引理 5 对直到阶 $k-1$ 成立,我们要证它对 $k(k\geqslant 3)$ 也成立.

取方程(2.1)与 $(-1)^{k-1}\partial_x^{2k-2}u$ 在 H 内做内积,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| \partial_x^{k-1} u \|^2 + \| \partial_x^k u \|^2) + \int_\Omega (-1)^k \sigma(u_x)_x \cdot \partial_x^{2k-2} u \mathrm{d}x$$
$$= (-1)^{k-1}(g(u), \partial_x^{2k-2} u) + (-1)^{k-1}(f(x), \partial_x^{2k-2} u). \tag{2.38}$$

由归纳假设,知道

$$\| u \|_{H^{k-1}} \leqslant E_{k-1}, \quad \forall t \geqslant t_{k-1}. \tag{2.39}$$

并且因此对所有 $0\leqslant l\leqslant k-2$

$$\| \partial_x^l u \|_\infty \leqslant \widetilde{C}_k, \quad \forall t \geqslant t_{k-1}. \tag{2.40}$$

注意到对 $k>3$,有

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-1)^k \sigma(u_x)_x \cdot \partial_x^{2k-2} u \mathrm{d}x &= \int_\Omega \partial_x^{k-1}\sigma(u_x) \cdot \partial_x^k u \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \sigma'(u_x)(\partial_x^k u)^2 \mathrm{d}x + (k-1)\int_\Omega \sigma''(u_x) u_{xx} \partial_x^{k-1} u \cdot \partial_x^k u \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \sum_l \alpha_l \sigma^{(l)}(u_x)(\partial_x^2 u)^{a_1} \cdots (\partial_x^{k-2} u)^{a_{k-2}} \cdot \partial_x^k u \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.41}$$

而对 $k=3$,有

$$-\int_\Omega \sigma(u_x)_x \cdot \partial_x^4 u \mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma'(u_x) u_{xxx}^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \sigma''(u_x) u_{xx}^2 u_{xxx} \mathrm{d}x. \tag{2.42}$$

由 (2.41),(2.42),得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| \partial_x^{k-1} u \|^2 + \| \partial_x^k u \|^2) + \nu \| \partial_x^k u \|^2 \\ &= (-1)^{k-1}(g(u), \partial_x^{2k-2} u) + (-1)^{k-1}(f(x), \partial_x^{2k-2} u) \\ &\quad - (k-1)\int_\Omega \sigma''(u_x) u_{xx} \partial_x^{k-1} u \cdot \partial_x^k u \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_\Omega \sum_l \alpha_l \sigma^{(l)}(u_x)(\partial_x^2 u)^{a_1} \cdots (\partial_x^{k-2} u)^{a_{k-2}} \cdot \partial_x^k u \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.43}$$

对 $k>3$ 并且

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| u_{xx} \|^2 + \| u_{xxx} \|^2) + \nu \| u_{xxx} \|^2 \\ &= (g(u), \partial_x^4 u) + (f(x), \partial_x^4 u) - \int_\Omega \sigma''(u_x) u_{xx}^2 u_{xxx} \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.44}$$

因为对 $k>3$

$$\begin{aligned}|(-1)^{k-1}(g(u),\partial_x^{2k-2}u)| &= |\int_\Omega \partial_x^{k-2}g(u)\cdot\partial_x^k u\,\mathrm{d}x| \\ &= |\int_\Omega \sum_l \beta_l g^{(l)}(u)(\partial_x u)^{b_1}\cdots(\partial_x^{k-2}u)^{b_{k-2}}\cdot\partial_x^k u\,\mathrm{d}x| \\ &\leqslant \sum_l \|\beta_l g^{(l)}(u)(\partial_x u)^{b_1}\cdots(\partial_x^{k-2}u)^{b_{k-2}}\|_\infty\int_\Omega|\partial_x^k u|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant C_9\,|\Omega|^{1/2}\|\partial_x^k u\| \\ &\leqslant \frac{1}{8}\nu\|\partial_x^k u\|^2+C_{10},\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}|(-1)^{k-1}(f(x),\partial_x^{2k-2}u)| &= |\int_\Omega \partial_x^{k-2}f(x)\cdot\partial_x^k u\,\mathrm{d}x| \leqslant \|\partial_x^{k-2}f(x)\|\,\|\partial_x^k u\| \\ &\leqslant \frac{1}{8}\nu\|\partial_x^k u\|^2+C_{11},\end{aligned} \tag{2.46}$$

及

$$\begin{aligned}&|(k-1)\int_\Omega\sigma''(u_x)u_{xx}\partial_x^{k-1}u\cdot\partial_x^k u\,\mathrm{d}x| \\ &\leqslant (k-1)\|\sigma''(u_x)u_{xx}\|_\infty\|\partial_x^{k-1}u\|\,\|\partial_x^k u\| \\ &\leqslant C_{12}\|\partial_x^k u\| \leqslant \frac{1}{8}\nu\|\partial_x^k u\|^2+C_{13},\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}&|-\int_\Omega\sum_{l=2}^{k-1}\alpha_l\sigma^{(l)}(u_x)(\partial_x^2u)^{a_1}\cdots(\partial_x^{k-2}u)^{a_{k-2}}\cdot\partial_x^k u\,\mathrm{d}x| \\ &\leqslant \sum_{l=2}^{k-1}\|\alpha_l\sigma^{(l)}(u_x)(\partial_x^2u)^{a_1}\cdots(\partial_x^{k-2}u)^{a_{k-2}}\|_\infty\|\partial_x^k u\|_{L^1} \\ &\leqslant \sum_{l=2}^{k-1}\|\alpha_l\sigma^{(l)}(u_x)(\partial_x^2u)^{a_1}\cdots(\partial_x^{k-2}u)^{a_{k-2}}\|_\infty\|\partial_x^k u\|_{L^1}.\end{aligned} \tag{2.48}$$

由(2.39)，(2.43)，和 (2.45)—(2.48)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\partial_x^{k-1}u\|^2+\|\partial_x^k u\|^2)+\nu(\|\partial_x^{k-1}u\|^2+\|\partial_x^k u\|^2)\leqslant C_{16},\quad \forall\, t\geqslant t_{k-1}. \tag{2.49}$$

对 $k>3$，其中 C_{16} 与数据有关.

相似的，对 $k=3$ 情形也有

$$\begin{aligned}|(g(u),\partial_x^4u)| &= |\int_\Omega g'(u)u_xu_{xxx}\,\mathrm{d}x| \leqslant \|g'(u)u_x\|_\infty\|u_{xxx}\|_{L^1} \\ &\leqslant C_{17}\,|\Omega|^{1/2}\|u_{xxx}\| \leqslant \frac{1}{6\nu}\|u_{xxx}\|^2+C_{18},\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}|(f(x),\partial_x{}^4u)| &= |\int_\Omega f'(x)u_{xxx}\,\mathrm{d}x| \leqslant \|f'(x)\|\,\|u_{xxx}\| \\ &\leqslant \frac{1}{6\nu}\|u_{xxx}\|^2+C_{19},\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}|-\int_\Omega\sigma''(u_x)u_{xx}^2u_{xxx}\,\mathrm{d}x| &\leqslant \|\sigma''(u_x)\|_\infty\|u_{xx}\|_{L^4}^2\|u_{xxx}\| \\ &\leqslant C\|\sigma''(u_x)\|_\infty\|u_{xx}\|^{3/2}\|u_{xxx}\|^{3/2} \\ &\leqslant \frac{1}{6\nu}\|u_{xxx}\|^2+C_{20}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

将(2.50)—(2.52) 代入(2.44)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_{xx}\|^2+\|u_{xxx}\|^2)+\nu(\|u_{xx}\|^2+\|u_{xxx}\|^2)$$
$$\leqslant\nu\|u_{xx}\|^2+2(C_{18}+C_{19}+C_{20})\leqslant C_{21},\quad\forall t\geqslant t_2.\tag{2.53}$$

因此(2.49)对所有 $k\geqslant3$ 成立.

采取由(2.23)到(2.26)同样的做法,可以推导得

$$\|\partial_x{}^{k-1}u(t)\|^2+\|\partial_x{}^{k}u(t)\|^2\leqslant(\|\partial_x{}^{k-1}u(t_{k-1})\|^2+\|\partial_x{}^{k}u(t_{k-1})\|^2)\mathrm{e}^{-\nu(t-t_{k-1})}+\frac{C_{16}}{\nu}$$
$$\leqslant C_{22}(R)\mathrm{e}^{-\nu(t-t_{k-1})}+\frac{C_{16}}{\nu},\quad\forall t\geqslant t_{k-1}$$
$$\leqslant\frac{2C_{16}}{\nu},\quad\forall t\geqslant t_k,\tag{2.54}$$

这里 $t_k=\max\{t_{k-1},t_{k-1}+\frac{1}{\nu}\ln(\frac{\nu C_{22}(R)}{C_{16}}\},k\geqslant3$. 式(2.39)和式(2.54)推出引理 5. ▍

引理 6 假设引理 5 的条件成立. 则有

$$\|u_t\|_{H^k}\leqslant B_k,\quad\forall t\geqslant t_k,$$

其中 B_k 与数据和 k 有关, t_k 依赖于数据, k 和 R 当 $\|u_0\|_{H^k}\leqslant R$.

证 对于 $3\leqslant m\leqslant k$,取方程(2.1)和 $(-1)^{m-1}\partial_x{}^{2m-2}u_t$ 在 H 内作内积, 得到

$$\|\partial_x{}^{m-1}u_t\|^2+\|\partial_x{}^{m}u_t\|^2+(\partial_x{}^{m-1}\sigma'(u_x),\partial_x{}^{m}u_t)$$
$$=(-\partial_x{}^{m-2}g(u),\partial_x{}^{m}u_t)-(\partial_x{}^{m-2}f(x),\partial_x{}^{m}u_t).\tag{2.55}$$

由引理 5 我们知对 $3\leqslant m\leqslant k$ 有

$$\|u\|_{H^m}\leqslant E_m,\quad\forall t\geqslant t_m.\tag{2.56}$$

由 Agmon 不等式和(2.56)我们看到

$$\|\partial_x{}^{m-1}u\|_{\infty}\leqslant C_m,\quad\forall t\geqslant t_m.\tag{2.57}$$

注意到

$$|(\partial_x{}^{m-1}\sigma'(u_x),\partial_x{}^{m}u_t)|\leqslant\|\partial_x{}^{m-1}\sigma'(u_x)\|\,\|\partial_x{}^{m}u_t\|$$
$$\leqslant\|\sigma'(u_x)\partial_x{}^{m}u\|\,\|\partial_x{}^{m}u_t\|+\|(m-1)\sigma''(u_x)u_{xx}\partial_x{}^{m-1}u\|\,\|\partial_x{}^{m}u_t\|$$
$$+\|\sum_l\alpha_l\sigma^{(l)}(u_x)(\partial_x{}^{2}u)^{a_1}\cdots(\partial_x{}^{m-2}u)^{a_{m-2}}\|\,\|\partial_x{}^{m}u_t\|$$
$$\leqslant\bar{C}\|\partial_x{}^{m}u_t\|,\quad\forall t\geqslant t_m,\tag{2.58}$$

$$|(-\partial_x{}^{m-2}g(u),\partial_x{}^{m}u_t)|\leqslant\|\sum_l\beta_l g^{(l)}(u)(\partial_x u)^{b_1}\cdots(\partial_x{}^{m-2}u)^{b_{m-2}}\|\,\|\partial_x{}^{m}u_t\|$$
$$\leqslant\check{C}\|\partial_x{}^{m}u_t\|,\quad\forall t\geqslant t_m,\tag{2.59}$$

$$|-(\partial_x{}^{m-2}f(x),\partial_x{}^{m}u_t)|\leqslant\|\partial_x{}^{m-2}f(x)\|\,\|\partial_x{}^{m}u_t\|\leqslant\hat{C}\|\partial_x{}^{m}u_t\|,\quad\forall t\geqslant t_m.\tag{2.60}$$

由(2.55),(2.58)-(2.60)我们推出

$$\|\partial_x{}^{m-1}u_t\|^2+\|\partial_x{}^{m}u_t\|^2\leqslant(\bar{C}+\check{C}+\hat{C})\|\partial_x{}^{m}u_t\|,\quad\forall t\geqslant t_m.$$

这暗示有

$$\|\partial_x{}^{m-1}u_t\|^2+\|\partial_x{}^{m}u_t\|^2\leqslant C,\quad\forall t\geqslant t_m.\tag{2.61}$$

式(2.61), 引理 3, 和 引理 4 结合推出引理 6 结论. ▍

定理 2 假定引理 5 的条件成立. 那么周期初值问题(2.1)-(2.3)存在惟一整体光滑解 $u(t)$ 并且 $u(x,t)\in L^{\infty}(R^{+};H^{k}_{\mathrm{per}}(\Omega)),\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\in L^{\infty}(R^{+};H^{k}_{\mathrm{per}}(\Omega))(k\geqslant3)$.

3 近似惯性流形

本节我们对问题(2.1)—(2.3)引入近似惯性流形. 为此，改写方程 (2.1) 为空间 H 中的一抽象微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Au+\nu Au+R(u)=f, \tag{3.1}$$

其中 $A=-\partial_{xx}$ 是一无界自伴算子

$$D(A)=\{u\in H^2(\Omega): u(x,t)=u(x+L,t)\}.$$

$R(u)=(\sigma'(u_x)+\nu)u_{xx}+g(u)$ 为从 $H^2(\Omega)$ 到 H 的一非线性算子.

如周知，存在 H 的一个标准正交基 $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$，其构成 A 的特征向量，且使得

$$Aw_i=\lambda_i w_i,\qquad 0=\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_i\to\infty, \text{当 } i\to\infty.$$

对所有 m，用 $P=P_m$ 记 $H\to\mathrm{span}\{w_1,\cdots,w_m\}$ 的正交投影，并且令 $Q=Q_m=I-P_m$.

对(3.1)作用 P_m 和 Q_m，得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ap+\nu Ap+P_mR(p+q)=P_mf, \tag{3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Aq+\nu Aq+Q_mR(p+q)=Q_mf, \tag{3.3}$$

其中 $p=P_mu$，$q=Q_mu$.

由引理 5 和引理 6，我们知道对所有 $k\geqslant 0$，如果 $u_0\in H_{\mathrm{per}}^{2k+2}(\Omega)$，那么

$$\|u(t)\|\leqslant\|u(t)\|_{H^1}\leqslant\|u(t)\|_{H^2}\leqslant C,\quad\forall t\geqslant t_1, \tag{3.3}$$

$$\|A^{k+1}u(t)\|,\ \|A^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\|\leqslant C_k,\quad\forall t\geqslant t_k. \tag{3.4}$$

其中 C_k 与数据和 k 有关，t_k 依赖于数据，k 和 R 当 $\|u_0\|_{H^{2k+2}}\leqslant R$.

注意到

$$\|A^{1/2}u\|=\|u_x\|,\ u\in H^1(\Omega), \tag{3.5}$$

$$\|P_mu\|\leqslant\|u\|,\ \|Q_mu\|\leqslant\|u\|,\ u\in H, \tag{3.6}$$

$$\|Q_mAu\|=\|AQ_mu\|\leqslant\|Au\|, \tag{3.7}$$

$$\|A^{\alpha}u\|\geqslant\lambda_{m+1}^{\alpha}\|u\|,\ u\in Q_mD(A^{\alpha}), \tag{3.8}$$

因此式 (3.4)蕴含有

$$\|A^{k+1}q(t)\|=\|A^{k+1}Q_mu\|=\|Q_mA^{k+1}u(t)\|\leqslant\|A^{k+1}u(t)\|\leqslant C_k,\quad\forall t\geqslant t_k. \tag{3.9}$$

相似地，也可以推得

$$\|A^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)\|\leqslant C_k,\quad\forall t\geqslant t_k. \tag{3.10}$$

从式 (3.8)—(3.10)我们得到

$$\|Aq(t)\|\leqslant\lambda_{m+1}^{-k}\|A^{k+1}q(t)\|\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k},\quad\forall t\geqslant t_k. \tag{3.11}$$

$$\|A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)\|\leqslant\lambda_{m+1}^{-k}\|A^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)\|\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k},\quad\forall t\geqslant t_k. \tag{3.12}$$

对任意解 $u(t)$，我们看到

$$\mathrm{dist}_{H^2}(u(t),P_mH)=\|Aq(t)\|\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k},\qquad\forall t\geqslant t_k,$$

这表明有限维子空间 $\Sigma_0=P_mH$ 为一个平滑近似惯性流形，更准确地说，有

定理 3　假设(2.4)－(2.5)成立，$f\in H_{\rm per}^{2k}(\Omega)$，$u_0\in H_{\rm per}^{2k+2}(\Omega)$，$k\geqslant 0$. 那么存在仅依赖于数据和 k 的常数 C_k，使得当 $t\geqslant t_k$ 时，问题(2.1)－(2.3)的任意解 $u(t)$ 进入到 $\Sigma_0=P_mH$ 的 $C_k\lambda_{m+1}^{-k}$ 邻域，具体地说

$$\mathrm{dist}_{H^2}(u(t),P_mH)=\|Aq(t)\|\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k},\quad \forall\, t\geqslant t_k,$$

其中 t_k 依赖于数据，k 和 R 当 $\|u_0\|_{H^{2k+2}}\leqslant R$.

现在定义从 P_mH 到 Q_mH 的映射 Φ 使得对任意 $p\in P_mH$，$\Phi(p)=\Psi$ 如下定义

$$\nu A\Psi+Q_mR(p)=Q_mf. \tag{3.13}$$

让 $\Sigma=\mathrm{graph}(\Phi)$，我们证明 Σ 是问题(2.1)－(2.3)的非平滑近似惯性流形，即

定理 4　假设 (2.4)－(2.5) 成立，$f\in H_{\rm per}^{2k}(\Omega)$，$u_0\in H_{\rm per}^{2k+2}(\Omega)$，$k\geqslant 0$. 则存在只依赖于数据 和 k 的常数 C_k 使得，当 $t\geqslant t_k$ 时，问题(2.1)－(2.3)的任意解 $u(t)$ 进入 Σ 的 H^2 意义的 $C_k\lambda_{m+1}^{-k}$ 邻域，即就是

$$\mathrm{dist}_{H^2}(u(t),\Sigma)\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k},\quad \forall\, t\geqslant t_k,$$

其中 t_k 与数据，k 和 R 有关，当 $\|u_0\|_{H^{2k+2}}\leqslant R$.

证　注意到

$$\begin{aligned}
\|A^kR(p)\| &= \|\partial_x^{2k+1}\sigma(p_x)+\nu\partial_x^{2k+2}p+\partial_x^{2k}g(p)\|\\
&\leqslant \Big\|\sum_m C(\alpha_{m,1},\cdots\alpha_{m,2k})\sigma^{(m)}(p_x)(\partial_x^2p)^{\alpha_{m,1}}\cdots(\partial_x^{2k+1}p)^{\alpha_{m,2k}}\Big\|+\nu\|\partial_x^{2k+2}p\|\\
&\quad+\|\sigma'(p_x)\partial_x^{2k+2}p\|+\Big\|\sum_l\beta_lg^{(l)}(p)(\partial_xp)^{\beta_1}\cdots(\partial_x^{2k}p)^{\beta_{2k}}\Big\|\\
&\leqslant \bar C\sum_m\|\sigma^{(m)}(p_x)\|_\infty\|\partial_x^2p\|_{H^1}^{\alpha_{m,1}}\cdots\|\partial_x^{2k+1}p\|_{H^1}^{\alpha_{m,2k}}+\nu\|\partial_x^{2k+2}p\|\\
&\quad+|\Omega|^{1/2}\|\sigma'(p_x)\|_\infty\|\partial_x^{2k+2}p\|+\check C\sum_l\|g^{(l)}(p)\|_\infty\|\partial_xp\|_{H^1}^{\beta_1}\cdots\|\partial_x^{2k}p\|_{H^1}^{\beta_{2k}}\\
&\leqslant \bar C\sum_m\|\sigma^{(m)}(p_x)\|_\infty\|p\|_{H^2}^{\alpha_{m,1}}\cdots\|p\|_{H^{2k+2}}^{\alpha_{m,2k}}+\nu\|p\|_{H^{2k+2}}\\
&\quad+|\Omega|^{1/2}\|\sigma'(p_x)\|_\infty\|p\|_{H^{2k+2}}+\bar C\sum_l\|g^{(l)}(p)\|_\infty\|p\|_{H^2}^{\beta_1}\cdots\|p\|_{H^{2k+1}}^{\beta_{2k}}\\
&\leqslant \bar C\sum_m\|\sigma^{(m)}(p_x)\|_\infty\|u\|_{H^2}^{\alpha_{m,1}}\cdots\|u\|_{H^{2k+2}}^{\alpha_{m,2k}}+\nu\|u\|_{H^{2k+2}}\\
&\quad+|\Omega|^{1/2}\|\sigma'(p_x)\|_\infty\|u\|_{H^{2k+2}}+\hat C\sum_l\|g^{(l)}(p)\|_\infty\|u\|_{H^2}^{\beta_1}\cdots\|u\|_{H^{2k+1}}^{\beta_{2k}}\\
&\leqslant \hat C_k.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

这里用到了(3.4) 及 $\forall\, 0\leqslant l\leqslant k$，

$$\|A^{l+1}p(t)\|=\|A^{l+1}P_mu(t)\|=\|P_mA^{l+1}u(t)\|\leqslant\|A^{l+1}u(t)\|\leqslant C_l, \tag{3.15}$$

$$\|p_x\|_\infty\leqslant C,\quad \|p\|_\infty\leqslant C. \tag{3.16}$$

因此由 (3.13) 得到

$$\begin{aligned}
\|A^{k+1}\Psi\| &\leqslant \frac{1}{\nu}\|A^kQ_mR(p)\|+\frac{1}{\nu}\|A^kQ_mf\|\\
&\leqslant \frac{1}{\nu}\|A^kR(p)\|+\frac{1}{\nu}\|A^kf\|\\
&\leqslant \frac{1}{\nu}\|A^kR(p)\|+\frac{1}{\nu}\|f\|_{H^{2k}}\leqslant \widetilde C_k.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

由 (3.9) 结合 (3.17) 得

$$\|A^{k+1}\Psi-A^{k+1}q\|\leqslant\|A^{k+1}\Psi\|+\|A^{k+1}q\|\leqslant C_k',\qquad \forall\, t\geqslant t_k. \tag{3.18}$$

这些暗含有

$$\| A\Psi - Aq \| \leqslant C_k{}'\lambda_{m+1}^{-k}, \qquad \forall \geqslant t_k. \tag{3.19}$$

对问题(2.1)—(2.3)的解 $u(t)=p(t)+q(t)$ 我们导出

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_{H^2}(u(t),\Sigma) &\leqslant \| u(t)-(p(t)+\Phi(p(t))) \|_{H^2} = \| \Psi(t)-q(t) \|_{H^2} \\ &\leqslant \| \Psi(t)-q(t) \| + \| A^{1/2}(\Psi(t)-q(t)) \| + \| A\Psi(t)-Aq(t) \| \\ &\leqslant (\lambda_{m+1}^{-1}+\lambda_{m+1}^{-1/2}+1)\| A\Psi(t)-Aq(t) \| \\ &\leqslant (\lambda_2^{-1}+\lambda_2^{-1/2}+1)\| A\Psi(t)-Aq(t) \| \\ &\leqslant C_k\lambda_{m+1}^{-k}, \quad \forall t \geqslant t_k.\end{aligned}$$

定理 4 的证明完成. ▌

注记 由定理 3 和 定理 4 我们看到 非平滑惯性流形 Σ 和平滑惯性流形 $\Sigma_0=P_mH$ 对整体吸引子具有同样的逼近阶. 但是, 我们知道,一般地,非平滑惯性流形对整体吸引子的逼近阶要比平滑惯性流形 $\Sigma_0=P_mH$ 对整体吸引子的逼近阶要高些[23]. 为什么我们这里的情形不再有效? 这是因为非线性 Sobolev-Galpern 的耗散是较其它耗散偏微分方程(比如 Navier-Stokes 方程和 Kuramoto-Sivashinsky 方程等)更弱的耗散. 由于相同的原因,我们无法得到方程(2.1)—(2.3)解的 Gevrey 类正则性. 而且因此无法获得解轨线以指数率逼近近似惯性流形的窄邻域,因为指数率结果基于解的 Gevrey 类正则性.

参 考 文 献

[1] Foias C, Manley O, Temam R. Sur'l interaction des et grands tourbillon's dan's les ecoulements turbulents. C R Acad Sci Paris Ser I Math, 1987, **305**: 497—500

[2] Debussche A, Marion M. On the construction of families of approximate inertial manifolds. J Diff Eqns, 1992, **100**: 173—201

[3] Chueshov I D. On a construction of approximate inertial manifolds for second order in time evolution equations. Nonl Anal T M A, 1996, **36**: 1007—1021

[4] 赵怡. 一类非线性双曲动力系统的近似弱惯性流形. 中国科学, 1996, **39**: 694—708

[5] Guo Boling, Wang Bixiang. Gevrey class regularity and approximate inertial manifolds for the Newton-Boussinesq equations. Chin Ann of Math, 1998, **19**B: 179—188

[6] Liu Xiaosong. Gevrey class regularity and approximate inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation. Physica D, 1991, **50**: 135—151

[7] Chen P J, Gurtin M E. On a theory of heat conduction involving two temperatures. Z Angew Math Phys, 1968, **19**: 614—627

[8] Ting T W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction. J Math Anal Appl, 1974, **45**: 23—31

[9] Barenlatt G I, Zheltov I P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. J Appl Math Mech, 1964, **24**: 1286—1303

[10] Barenlatt G I. On certain boundary-value problems for the equations of seepage of a liquid in fissured rocks. J Appl Math Mech, 1963, **27**: 513—518

[11] Taylor D. Research of consolidation of clays. Cambridge: MA Massachusett Institute of Technology Press, 1952

[12] Ting T W. Certain nonsteady flows of second order fluids. Arch Rat Mech Anal, 1963, **14**: 1—26

[13] Huilgol R. A second order fluid of the differential type. Internat Internal J Non-Linear Mechanics, 1968, **3**: 471—482

[14] Aifantis E C. On the problem of diffusion in solids. Acta Mech, 1980, **37**: 265—296

[15] Coleman B D, Duffin R J, Mizel V J. Instability, uniqueness, and non existence theorems for the equation $u_t=u_{xx}-u_{xtx}$ on a strip. Arch Rational Mech Anal, 1960, **6**: 355—370

[16] Ting T W. Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations. J Math Soc Japan, 1969,**27**: 513－518

[17] Colton D. A quasilinear parabolic and a related third order problem. J Math Anal Appl, 1972,**40**: 327－335

[18] Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable. J Diff Eqs, 1972,**12**: 559－565

[19] Bui An Ton. Nonlinear evolution equations of Sobolev-Galpern type. Math Z, 1976, **151**: 219－233

[20] 施德明. 土壤中非线性湿气迁移方程的初边值问题. 应用数学学报，1990,**13**(1): 31－38

[21] 刘亚成，王锋. 一类多维非线性 Sobolev-Galpern 方程. 应用数学学报，1994,**17**(4): 569－577

[22] 李德生，王宗信 ,王志林. 一类非局部扩散方程解的整体存在性、惟一性和长时间行为. 应用数学学报,1998,**21**(2): 267－276

[23] 戴正德,郭柏灵. 惯性流形和近似惯性流形. 北京: 科学出版社，2000

Approximate Inertial Manifolds for the Nonlinear Sobolev-Galpern Equations

Shang Yadong

(*Department of Mathematics*, *Guangzhou University*, *Guangzhou* 510405)

Guo Boling

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*, *Beijing* 100088)

Abstract: The concept of approximate inertial manifold is related to the study of the long time behavior of dissiputive partial differential equations. In the present paper, the authors construct two approximate inertial manifolds for the nonlinear Sobolev-Galpern equations. The authors show that the non-flat approximate inertial manifold Σ and the flat approximate inertial manifold $\Sigma_0 = P_m H$ have the same order of approximation to the global attractor.

Key words: Nonlinear Sobolev-Galpern equations; Long time behavior; Approximate inertial manifolds.

MR(2000) Subject Classification: 35B40; 35Q55