2005,**25A**(6):811－820

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

a 尺度正交多尺度函数和正交多小波*

杨守志

(汕头大学数学系　汕头 515063)

摘要:基于 a 尺度正交单尺度函数,分别给出重数为 2 和 3 的 a 尺度正交多尺度函数的构造算法。并给出对应正交多小波的显式构造。最后给出伸缩因子为 3 的正交多小波的构造算例。

关键词:a 尺度正交尺度函数;a 尺度正交小波;a 尺度正交多尺度函数;a 尺度正交多小波.

MR(2000)主题分类:42C40; 65T60　　**中图分类号**:O174.2　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2005)06-811-10

1　基本概念和引理

1.1　正交单小波

设 $\phi(x)$是 a 尺度的尺度函数,满足如下两尺度方程

$$\phi(x)=\sum_n p_n\phi(ax-n)\ .\tag{1}$$

其中$\{p_n\}$称为是两尺度序列. 对(1)式两边实施 Fourier 变换得到 $\hat{\phi}(w)=p(\frac{w}{a})\hat{\phi}(\frac{w}{a})$, 其中 $p(w)=\frac{1}{a}\sum_{n\in Z}p_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nw}$ 称为序列$\{p_n\}$的两尺度序列的符号。

如果$\langle\phi(x),\phi(x-n)\rangle=\delta_{0,n}$,称 $\phi(x)$是 a 尺度正交的尺度函数. 为了叙述的方便,记一个函数生成的多分辨分析为 $u-MRA$, 多个函数生成的多分辨分析记为 $m-MRA$, 设

$$V_j^u=\mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle\phi_{j,n}(x),\ n\in Z\rangle.\tag{2}$$

其中 $\phi_{j,n}(x)=a^{j/2}\phi(a^jx-n)$。

则(2)式所定义的子空间序列$\{V_j^u\}$形成多分辨分析($u-MRA$)。

定义 W_j^u, $j\in Z$ 是 V_j^u在 V_{j+1}^u中的正交补空间, 由小波分析理论可知[1－4],存在 $a-1$ 个函数 $\psi^i(x)$, $i=1,2,\cdots,a-1$, 它们的伸缩与平移生成 W_j^u 的一个正交基,即 $W_j^u=\mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle\psi_{j,n}^i(x):n\in Z;i=1,2,\cdots,a-1\rangle$, $j\in Z$. 由于每一个 $\psi^i(x)\in W_0^u\subset V_1^u$, 因此存在序列$\{q_n^i\}_{n\in Z}$有

$$\psi^i(x)=\sum_{n\in Z}q_n^i\phi(ax-n).\tag{3}$$

进而有 $\hat{\psi}^i(w)=q^i(\frac{w}{a})\hat{\phi}(\frac{w}{a})$,其中 $q^i(w)=\frac{1}{a}\sum_{n\in Z}q_n^i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nw}$。

收稿日期:2004-01-10

E-mail:szyang@stu.edu.cn

* 基金项目:广东省自然科学基金(032038)、广东省自然科学基金博士科研启动基金(04300917)资助

命题 1[3-6] 设 $\phi(x)$ 是 a 尺度正交的尺度函数，$\psi^i(x)$，$i=1,2,\cdots,a-1$ 是对应的正交小波，$p(w)$和 $q^i(w)$，$i=1,2,\cdots,a-1$ 分别是对应的两尺度符号，则

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{a} p(w+w_j)\,\overline{p(w+w_j)} = 1;\\ \sum\limits_{j=1}^{a} p(w+w_j)\,\overline{q^i(w+w_j)} = 0;\\ \sum\limits_{j=1}^{a} q^i(w+w_j)\,\overline{q^i(w+w_j)} = 1;\\ \sum\limits_{j=1}^{a} q^i(w+w_j)\,\overline{q^k(w+w_j)} = 0,\ i\neq k.\end{cases} \tag{4}$$

其中 $i,k=1,2,\cdots,a-1$；e^{-iw_j}，$j=1,2,\cdots,a$ 为方程 $x^a-1=0$ 的 a 个根。

1.2 正交多小波

设 $\Phi(x)=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r)^T$，$\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x)\in L^2(R)$是 r 重尺度函数，且满足如下的两尺度方程

$$\Phi(x) = \sum_{k\in Z} P_k\Phi(ax-k), \tag{5}$$

称 $r\times r$ 矩阵序列 $\{P_k\}$为两尺度矩阵序列. 对(5)式两边实施 Fourier 变换得

$$\hat{\Phi}(w) = P(\frac{w}{a})\hat{\Phi}(\frac{w}{a}), \tag{6}$$

其中 $P(w) = \frac{1}{a}\sum\limits_{k\in Z}P_k e^{-iwk}$ 称为两尺度矩阵符号.

如果$\langle\Phi(x),\Phi(x-n)\rangle=\delta_{0,n}I_r$，称 $\Phi(x)$是的正交的尺度函数。

用 $\Phi(x)$定义一个子空间序列 $V_j^m\subset L^2(R)$ 为

$$V_j^m = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle\phi_{l;j,k}:\ l=1,2,\cdots,r;\ k\in Z\rangle,\ j\in Z, \tag{7}$$

对任意 $f_l\in L^2$，这里及本文的其它地方，使用记号 $f_{l;j,k}=a^{\frac{j}{2}}f_l(a^jx-k)$.

由小波分析理论知，$\Phi(x)$可生成一个 r 重多分辨分析($m-MRA$)$\{V_j^m\}_{j\in Z}$。

定义 W_j^m，$j\in Z$ 是 V_j^m 在 V_{j+1}^m 中的正交补空间，向量函数 $\Psi^i(x)=(\psi_1^i,\psi_2^i,\cdots,\psi_r^i)^T$，$\psi_l^i\in L^2(R)$，$l=1,2,\cdots,r$；$i=1,2,\cdots,(a-1)r$，其伸缩平移生成 W_j^m 的一个 Riesz 基，即

$$W_j^m = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle\psi_{l;j,k}^i:l=1,2,\cdots,r;\ i=1,2,\cdots,(a-1)r;\ k\in Z\rangle,\ j\in Z \tag{8}$$

由于对任意 $i\in\{1,2,\cdots,(a-1)r\}$均有 $\psi_l^i(x)\in W_0^m\subset V_1^m$，$l=1,2,\cdots,r$，因此存在$(a-1)r$ 个 $r\times r$ 矩阵序列$\{Q_k^i\}_{k\in Z}$有

$$\Psi^i(x) = \sum_{k\in Z}Q_k^i\Phi(ax-k). \tag{9}$$

对(9)式两边作 Fourier 变换有 $\hat{\Psi}^i(w)=Q^i(\frac{w}{a})\hat{\Phi}(\frac{w}{a})$，其中 $Q^i(w)=\frac{1}{a}\sum\limits_{k\in Z}Q_k^i e^{-iwk}$ 称为矩阵序列$\{Q_k^i\}_{k\in Z}$的矩阵符号。

在什么条件下，满足(5)式的函数存在，且为正交的多尺度函数。针对这一问题，有大量的文献进行了研究。但通常采用迭代方法。即

反复应用(6)式，则有

$$\hat{\Phi}(w) = \Big(\prod_{j=1}^{\infty}P(\frac{w}{a^j})\Big)\hat{\Phi}(0), \tag{10}$$

如果矩阵的无穷乘积$\prod\limits_{j=1}^{\infty}P(\frac{w}{a^j})$收敛，则可以定义 $\hat{\Phi}(w)$. 下面将介绍矩阵的无穷乘积$\prod\limits_{j=1}^{\infty}P$

$(\frac{w}{a^j})$收敛的命题

命题 2[5-7]　若 $\Phi(x)$是一个正交的多尺度函数，$P(w)$为对应的两尺度符号，则在紧支撑区间上无穷乘积矩阵 $\prod_{j=1}^{\infty} P(\frac{w}{a^j})$ 一致收敛到一个连续的矩阵值函数的充分必要条件是 $P(0)$的特征值 λ_i，$i=1,2,\cdots,r$ 满足 $\lambda_1=1$，$|\lambda_i|<1$，$i=2,3,\cdots,r$.

正交多尺度函数和对应的正交多小波满足具有下性质

命题 3[8,9]　设 $\Phi(x)$是 a 尺度正交多尺度函数，$\Psi^i(x)$，$i=1,2,\cdots,(a-1)r$ 是 $\Phi(x)$ 对应的 $a-1$ 个正交多小波，$P(w)$和 $Q^i(w)$ 分别是两尺度矩阵序列$\{P_n\}$，$\{Q_n^i\}$所对应的两尺度矩阵符号，w_j，$j=1,2,\cdots,a$ 为 $x^a-1=0$ 的 a 个根。则

$$\sum_{j=1}^{a} P(w+w_j)P(w+w_j)^* = I_r, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{a} P(w+w_j)Q^i(w+w_j)^* = O_r, i=1,2,\cdots,(a-1)r, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{a} Q^i(w+w_j)Q^k(w+w_j)^* = \begin{cases} I_r, i=k \\ O_r, i\neq k \end{cases}, \quad i,k=1,2,\cdots,(a-1)r. \tag{13}$$

其中 I_r，O_r 分别表示 $r\times r$ 的单位矩阵和零阵。这里及以后，用“$*$”表示矩阵的共轭转置。

2　正交多尺度函数的构造

2.1　二重正交尺度函数的构造

下面将给出由单正交尺度函数构造 2 重正交多尺度函数的方法。

为了讨论的方便，设两尺度矩阵符号具有如下形式

$$P(w) = \begin{bmatrix} A(w) & 0 \\ B(w) & C(w) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

由命题 3 知，如果它对应于一个 2 重正交尺度函数，则它必须满足

$$\sum_{j=1}^{a} P(w+w_j)P(w+w_j)^* = I_2, \tag{15}$$

与之等价的有下面的三个等式

$$\sum_{j=1}^{a} |A(w+w_j)|^2 = 1, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{a} A(w+w_j)\overline{B(w+w_j)} = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{a} [|B(w+w_j)|^2 + |C(w+w_j)|^2] = 1. \tag{18}$$

下面给出构造 $P(w)$的方法，即给出构造 $A(w)$，$B(w)$，$C(w)$的方法。

引理 1　设 $s(w)$，$h(w)$满足条件：1) 均为$\frac{2\pi}{a}$的周期函数；2) $|s(w)|^2+|h(w)|^2=1$；3 $s(w)h(w)\neq 0$，则$|s(w)|<1$，$|h(w)|<1$.

引理 1 的证明是显然的。且满足条件 1)－3)的函数 $s(w)$，$h(w)$很多，如取

$$h(w) = \frac{a-\sin aw}{a^2}, \quad s(w) = \frac{\sqrt{a^4-a^2+2a\sin(aw)-\sin^2 aw}}{a^2}.$$

设 $\phi^1(x)$ 是单正交尺度函数，$\psi^{1,k}(x)$，$k=1,2,\cdots,a-1$ 是对应的正交小波，$p^1(w)$，$q^{1,k}(w)$ 分别为 $\phi^1(x)$，$\psi^{1,k}(x)$ 对应的两尺度符号，$p^2(w)$ 是另一个单正交尺度函数 $\phi^2(x)$ 所对应的两尺度符号，定义一个下三角矩阵

$$P(w)=\begin{bmatrix} p^1(w) & 0 \\ s(w)q^{1,k}(w) & h(w)p^2(w) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

定理 1　设 $s(w)$，$h(w)$ 是满足引理 1 条件的两个函数，$P(w)$ 为(19)式定义的下三角矩阵，则

$$\sum_{j=1}^{a} P(w+w_j)P(w+w_j)^* = I_2. \tag{20}$$

证　因为 $p^1(w)$，$q^{1,k}(w)$ 分别为正交尺度函数 $\phi^1(x)$ 和对应的正交小波 $\psi^{1,k}(x)$ 的两尺度符号，$p^2(w)$ 是单正交尺度函数 $\phi^2(x)$ 所对应的两尺度符号，根据命题 1，有

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{a} p^1(w+w_j)\overline{p^1(w+w_j)}=1; \\ \sum\limits_{j=1}^{a} p^1(w+w_i)\overline{q^{1,k}(w+w_j)}=0; \\ \sum\limits_{j=1}^{a} q^{1,k}(w+w_j)\overline{q^{1,k}(w+w_j)}=1; \\ \sum\limits_{j=1}^{a} q^{1,k}(w+w_j)\overline{q^{1,i}(w+w_j)}=0,\ i\neq k. \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{a} p^2(w+w_j)\overline{p^2(w+w_j)}=1.$$

又由于 $s(w)$，$h(w)$ 是以 $\dfrac{2\pi}{a}$ 的周期函数，且满足 $|s(w)|^2+|h(w)|^2=1$，所以有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{a} P(w+w_j)P(w+w_j)^* \\
=&\sum_{j=1}^{a}\begin{bmatrix} p^1(w+w_j) & 0 \\ s(w+w_j)q^{1,k}(w+w_j) & h(w+w_j)p^2(w+w_j) \end{bmatrix} \\
&\cdot\begin{bmatrix} \overline{p^1(w+w_j)} & \overline{s(w+w_j)q^{1,k}(w+w_j)} \\ 0 & \overline{h(w+w_j)p^2(w+w_j)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{a} |p^1(w+w_j)|^2 & \sum\limits_{j=1}^{a} \overline{s(w+w_j)}p^1(w+w_j)\overline{q^{1,k}(w+w_j)} \\ \sum\limits_{j=1}^{a} s(w+w_j)\overline{p^1(w+w_j)}q^{1,k}(w+w_j) & H(w+w_j) \end{bmatrix}.$$

其中

$$H(w+w_j)=\sum_{j=1}^{a}\left[|s(w+w_j)|^2|q^{1,k}(w+w_j)|^2+|h(w+w_j)|^2|p^2(w+w_j)|^2\right]。$$

显然

$$\sum_{j=1}^{a} |p^1(w+w_j)|^2=1,$$

$$\sum_{j=1}^{a}\overline{s(w+w_j)}p^1(w+w_j)\overline{q^{1,k}(w+w_j)}=\overline{\sum_{j=1}^{a}s(w+w_j)\overline{p^1(w+w_j)}q^{1,k}(w+w_j)}=0。$$

下面说明 $H(w+w_j)=1$. 事实上

$$H(w+w_j)=\sum_{j=1}^{a}[|s(w+w_j)|^2|q^{1,k}(w+w_j)|^2+|h(w+w_j)|^2|p^2(w+w_j)|^2]$$

$$=|s(w)|^2\sum_{j=1}^{a}[|q^{1,k}(w+w_j)|^2]+|h(w)|^2\sum_{j=1}^{a}[|p^2(w+w_j)|^2]$$

$$=|s(w)|^2+|h(w)|^2=1。$$

这意味着(20)成立。 ▌

定理 2　$P(w)$是(19)式定义的下三角矩阵，则矩阵 $P(0)$有两个特征值，其中一个等于1，另一个特征值为 $h(0)$，其绝对值小于 1.

证　显然

$$P(0)=\begin{bmatrix}p^1(0) & 0\\ s(0)q^{1,k}(0) & h(0)p^2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & h(0)\end{bmatrix},$$

所以，$P(0)$的两个特征值，一个等于 1，另一个特征值为 $h(0)$，再由引理 1 知，$|h(0)|<1$. ▌

由定理 2 知 $P(0)$的两个特征值，一个等于 1，另一个特征值为 $h(0)<1$. 根据命题 2 知，无穷乘积 $\prod_{j=1}^{\infty}P(\frac{w}{a^j})$ 收敛。因此，可定义一个二重加细函数 $\hat{\Phi}(w)$为

$$\hat{\Phi}(w)=[\hat{\phi}_1(w),\hat{\phi}_2(w)]^T=\begin{bmatrix}p^1(\frac{w}{a}) & 0\\ s(\frac{w}{a})q^{1,k}(\frac{w}{a}) & h(\frac{w}{a})p^2(\frac{w}{a})\end{bmatrix}\left[\hat{\phi}_1(\frac{w}{a}),\hat{\phi}_2(\frac{w}{2})\right]^T,$$

即

$$\hat{\phi}_1(w)=p^1(\frac{w}{a})\hat{\phi}_1(\frac{w}{a}),\quad \hat{\phi}_2(w)=s(\frac{w}{a})q^{1,k}(\frac{w}{a})\hat{\phi}_1(\frac{w}{a})+h(\frac{w}{a})p^2(\frac{w}{a})\hat{\phi}_2(\frac{w}{a}).$$

根据以上分析，得到如下的定理。

定理 3　设 $p^1(w)$，$p^2(w)$分别是两个单正交尺度函数 $\phi^1(x)$，$\phi^2(x)$ 对应的两尺度符号，$\psi^{1,k}(x)$为 $\phi^1(x)$对应的某一个单正交小波，$q^{1,k}(w)$为 $\psi^{1,k}(x)$对应的两尺度符号，$s(w)$，$h(w)$为满足引理 1 中条件的函数，则由(19)式定义矩阵符号 $P(w)$生成的加细函数 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x)]^T$ 是二重正交的尺度函数。

2.2　三重正交尺度函数的构造

下面将给出由单正交尺度函数构造重数为 3 的正交多尺度函数的方法。

类似于上面，设两尺度矩阵符号具有如下形式

$$P(w)=\begin{bmatrix}A_1(w) & 0 & 0\\ B_1(w) & C_1(w) & 0\\ B_2(w) & C_2(w) & D_2(w)\end{bmatrix},\tag{20}$$

由命题 3 知，如果它对应于一个正交 3 重尺度函数，则它必须满足

$$\sum_{j=1}^{a}P(w+w_j)P(w+w_j)^*=I_3\tag{21}$$

等价的

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{a}A_1(w+w_j)\overline{A_1(w+w_j)}=1;\\ \sum_{j=1}^{a}A_1(w+w_i)\overline{B_i(w+w_j)}=0,\ i=1,2;\\ \sum_{j=1}^{a}[B_1(w+w_j)\overline{B_1(w+w_j)}+C_1(w+w_j)\overline{C_1(w+w_j)}]=1;\\ \sum_{j=1}^{a}[B_1(w+w_j)\overline{B_2(w+w_j)}+C_1(w+w_j)\overline{C_2(w+w_j)}]=0;\\ \sum_{j=1}^{a}[B_2(w+w_j)\overline{B_2(w+w_j)}+C_2(w+w_j)\overline{C_2(w+w_j)}\\ +D_2(w+w_j)\overline{D_2(w+w_j)}]=1.\end{array}\right. \tag{21}$$

下面给出一种构造 $P(w)$的特殊方法,使得 $P(w)$ 能生成一个重数为 3 的正交多尺度函数。即给出构造 $A_1(w),B_1(w),B_2(w),C_1(w),C_2(w),D_2(w)$的方法。

引理 2 设 $s_1(w),h_1(w),s_2(w),h_2(w),u_2(w)$满足条件：1) 均为$\frac{2\pi}{a}$的周期函数；2) $|s_1(w)|^2+|h_1(w)|^2=1$，$|s_2(w)|^2+|h_2(w)|^2+|u_2(w)|^2=1$；3) $s_1(w),h_1(w),s_2(w),h_2(w),u_2(w)$均不为零，则$|s_1(w)|<1$，$|h_1(w)|<1$，$|s_2(w)|<1$，$|h_2(w)|<1$,$|u_2|(w)<1$。

引理 2 的证明是显然的。

仍设 $\phi^1(x)$是 a 尺度单正交尺度函数,$\psi^{1,k}(x),k=1,2,\cdots,a-1$ 是对应的正交小波,$p^1(w),q^{1,k}(w)$分别为 $\phi^1(x),\psi^{1,k}(x)$对应的两尺度符号,$p^2(w)$, $q^{2,k}(w)$分别是单正交尺度函数 $\phi^2(x)$及与之对应小波 $\psi^{2,k}(w)$所对应的两尺度符号，$p^3(w)$是单正交尺度函数 $\phi^3(x)$对应的符号(注:$p^1(w),p^2(w),p^3(w)$三个可以全相等,也可某两个相等,也可都不相等).定义一个下三角矩阵

$$P(w)=\begin{bmatrix}p^1(w)&0&0\\ s_1(w)q^{1,k}(w)&h_1(w)p^2(w)&0\\ s_2(w)q^{1,i}(w)&h_2(w)q^{2,j}(w)&u_2(w)p^3(w)\end{bmatrix},\ k\neq i;i,j,k=1,2,\cdots,a-1. \tag{22}$$

定理 4 设 $s_1(w),h_1(w),s_2(w),h_2(w),u_2(w)$是满足引理 2 中条件的 5 个函数,$P(w)$为(22)式定义的下三角矩阵,则

$$\sum_{j=1}^{a}P(w+w_j)P(w+w_j)^*=I_3. \tag{23}$$

定理 4 的证明与定理 1 类似,这里省略。类似定理 2，我们有

定理 5 $P(w)$是(22)式定义的下三角矩阵,则矩阵 $P(0)$的 3 个特征值分别是 $\lambda_1=1,\lambda_2=h_1(0),\lambda_3=u_2(0)$. 即有一个特征值为 1,其余两个特征值的绝对值均小于 1.

证 由于

$$P(0)=\begin{bmatrix}p^1(0)&0&0\\ s_1(0)q^{1,k}(0)&h_1(0)p^2(0)&0\\ s_2(0)q^{1,i}(0)&h_2(0)q^{2,j}(0)&u_2(0)p^3(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&h_1(0)&0\\ 0&0&u_2(0)\end{bmatrix},$$

所以,$P(0)$的 3 个特征值,一个等于 1,另两个特征值分别为 $h_1(0),u_2(0)$,再由引理 2 知,

$|h_1(0)|<1$，$|u_2(0)|<1$。从而完成了定理 5 的证明。 ∎

根据命题 2 知，无穷乘积 $\prod_{j=1}^{\infty} P(\frac{w}{a^j})$ 收敛。因此可定义一个 3 重加细函数 $\hat{\Phi}(w)$ 为

$$\hat{\Phi}(w)=[\hat{\phi}_1(w),\hat{\phi}_2(w),\hat{\phi}_3(w)]^T$$

$$=\begin{bmatrix} p^1(\frac{w}{a}) & 0 & 0 \\ s_1(\frac{w}{a})q^{1,k}(\frac{w}{a}) & h_1(\frac{w}{a})p^2(\frac{w}{a}) & 0 \\ s_2(\frac{w}{a})q^{1,i}(\frac{w}{a}) & h_2(\frac{w}{a})q^{2,j}(\frac{w}{a}) & u_2(\frac{w}{a})p^3(\frac{w}{a}) \end{bmatrix}[\hat{\phi}_1(\frac{w}{a}),\hat{\phi}_2(\frac{w}{a}),\hat{\phi}_3(\frac{w}{a})]^T,$$

即

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1(w)=p^1(\frac{w}{a})\hat{\phi}_1(\frac{w}{a}); \\ \hat{\phi}_2(w)=s_1(\frac{w}{a})q^{1,k}(\frac{w}{a})\hat{\phi}_1(\frac{w}{a})+h_1(\frac{w}{a})p^2(\frac{w}{a})\hat{\phi}_2(\frac{w}{a}); \\ \hat{\phi}_3(w)=s_2(\frac{w}{a})q^{1,i}(\frac{w}{a})\hat{\phi}_1(\frac{w}{a})+h_2(\frac{w}{a})q^{2,j}(\frac{w}{a})\hat{\phi}_2(\frac{w}{a})+u_2(\frac{w}{a})p^3(\frac{w}{a})\hat{\phi}_3(\frac{w}{a}). \end{cases}$$

根据以上分析，得到如下的定理

定理 6 在定理 4 和定理 5 的条件下，则 由(22)式定义矩阵符号 $P(w)$生成的加细函数 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x),\phi_3(w)]^T$ 是重数为 3 的正交尺度函数。

3 正交多小波的显式构造

上节分别讨论了三角矩阵符号 $P(w)$生成重数为 2 和 3 的正交尺度函数的构造方法。本节仅讨论由 $P(w)$生成的二重正交尺度函数对应的二重正交小波的构造问题. 3 重正交多小波的构造可以类似讨论。

下面给出二重正交小波的显示构造算法。构造矩阵 $Q(w)$，$M(w)$分别为

$$Q^k(w)=\begin{bmatrix} 0 & q^{2,k}(w) \\ h(w)q^{1,k}(w) & -s(w)p^2(w) \end{bmatrix},\quad k=1,2,\cdots,a-1, \tag{23}$$

$$M(w)=\begin{bmatrix} P(w+w_1) & P(w+w_2) & \cdots & P(w+w_a) \\ Q^1(w+w_1) & Q^1(w+w_2) & \cdots & Q^1(w+w_a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q^{a-1}(w+w_1) & Q^{a-1}(w+w_2) & \cdots & Q^{a-1}(w+w_a) \end{bmatrix}. \tag{24}$$

定理 7 设 $P(w)$，$Q(w)$，$M(w)$分别是由(19)，(23)和(24)式定义的矩阵，则在定理 3 的条件下，矩阵 $M(w)$是酉矩阵。

更进一步，设 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x)]^T$ 是由 $P(w)$生成的二重正交的尺度函数，则 $\Psi^k(x)=[\psi_1^k(x),\psi_2^k(x)]^T$，$k=1,2,\cdots,a-1$ 是对应的二重正交小波，其中

$$\hat{\Psi}^k(w)=Q^k(\frac{w}{2})\hat{\Phi}(\frac{w}{2}). \tag{25}$$

证 根据小波的构造定理知，仅需证明 $M(w)$是酉矩阵。在定理 3 的条件下，容易验证下矩阵

$$\begin{bmatrix} p^1(w+w_1) & 0 & \cdots & p^1(w+w_a) & 0 \\ s(w+w_1)q^{1,1}(w+w_1) & h(w+w_1)p^2(w+w_1) & \cdots & s(w+w_a)q^{1,1}(w+w_a) & h(w+w_a)p^2(w+w_a) \\ 0 & q^{2,1}(w+w_1) & \cdots & 0 & q^{2,1}(w+w_a) \\ h(w+w_1)q^{1,1}(w+w_1) & -s(w+w_1)p^2(w+w_1) & \cdots & h(w+w_a)q^{1,1}(w+w_a) & -s(w+w_a)p^2(w+w_a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & q^{2,a-1}(w+w_1) & \cdots & 0 & q^{2,a-1}(w+w_a) \\ h(w+w_1)q^{1,a-1}(w+w_1) & -s(w+w_1)p^2(w+w_1) & \cdots & h(w+w_a)q^{1,a-1}(w+w_a) & -s(w+w_a)p^2(w+w_a) \end{bmatrix}$$

是酉矩阵。即 $M(w)$是酉矩阵，从而完成定理 7 的证明。 ▌

4 构造算例

文献[10]详细研究了伸缩因子为 3 的紧支撑正交小波系统完全的参数化形式，构造出大量性质良好的伸缩因子为 3 的正交尺度函数和对应的小波。下面利用[10]所构造出的正交尺度函数和正交小波去构造正交多尺度函数和对应的正交多小波。

例 满足下方程 $\phi^1(x)$，$\phi^2(x)$分别是两个伸缩因子为 3 的正交单尺度函数[10]

$$\phi^1(x)=\phi^1(3x)+\phi^1(3x-1)+\phi^1(3x-2),$$

$$\begin{cases}\phi^2(x)=\dfrac{2-\sqrt6}{4}\phi^2(3x)+\dfrac12\phi^2(3x-1)+\dfrac{2+\sqrt6}{4}\phi^2(3x-2)\\ \qquad\qquad +\dfrac{2+\sqrt6}{4}\phi^2(3x-3)+\dfrac12\phi^2(3x-4)+\dfrac{2-\sqrt6}{4}\phi^2(3x-5).\end{cases}$$

$\phi^1(x)$，$\phi^2(x)$分别对应的两尺度符号 $p^1(w)$，$p^2(w)$为

$$p^1(w)=\frac13(1+e^{-iw}+e^{-2iw}+e^{-3iw}),$$

$$p^2(w)=\frac13\Big[\frac{2-\sqrt6}{4}+\frac12e^{-iw}+\frac{2+\sqrt6}{4}e^{-2iw}+\frac{2+\sqrt6}{4}e^{-3iw}+\frac12e^{-4iw}+\frac{2-\sqrt6}{4}e^{-5iw}\Big].$$

$\phi^1(x)$，$\phi^2(x)$分别对应的小波 $\psi^{1,1}(x)$，$\psi^{1,2}(x)$，$\psi^{2,1}(x)$，$\psi^{2,2}(x)$为[9]

$$\begin{cases}\psi^{1,1}(x)=-\dfrac{\sqrt2}{2}\phi^1(3x)+\sqrt2\phi^1(3x-1)-\dfrac{\sqrt2}{2}\phi^1(3x-2);\\ \psi^{1,2}(x)=-\dfrac{\sqrt6}{2}\phi^1(3x)+\dfrac{\sqrt6}{2}\phi^1(3x-2).\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi^{2,1}(x)=-\dfrac{2-\sqrt6}{4}\phi^2(3x)-\dfrac12\phi^2(3x-1)-\dfrac{2+\sqrt6}{4}\phi^2(3x-2)\\ \qquad\qquad +\dfrac{2+\sqrt6}{4}\phi^2(3x-3)+\dfrac12\phi^2(3x-4)+\dfrac{2-\sqrt6}{4}\phi^2(3x-5);\\ \psi^{2,2}(x)=-\dfrac{\sqrt2}{2}\phi^2(3x)+\sqrt2\phi^2(3x-1)-\dfrac{\sqrt2}{2}\phi^2(3x-2).\end{cases}$$

取 $h(w)=\dfrac12$，$s(w)=\dfrac{\sqrt3}{2}$，根据定理 4，得二重正交的尺度函数 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x)]^T$ 为

$$
\begin{cases}
\phi_1(x) = \phi_1(3x) + \phi_1(3x-1) + \phi_1(3x-2); \\
\phi_2(x) = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}\phi_1(3x) + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\phi_1(3x-1) - \dfrac{3}{4}\phi_1(3x-2) + \dfrac{2-\sqrt{6}}{8}\phi_2(3x) \\
\qquad + \dfrac{1}{4}\phi_2(3x-1) + \dfrac{2+\sqrt{6}}{8}\phi_2(3x-2) + \dfrac{2+\sqrt{6}}{8}\phi_2(3x-3) \\
\qquad + \dfrac{1}{4}\phi_2(3x-4) + \dfrac{2-\sqrt{6}}{8}\phi_2(3x-5).
\end{cases}
$$

根据定理 5，$\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x)]^T$ 得到对应的二重正交的多小波 $\Psi^1(x)=[\psi_1^1(x),\psi_2^1(x)]^T$，$\Psi^2(x)=[\psi_1^2(x),\psi_2^2(x)]^T$ 为

$$
\begin{cases}
\psi_1^1(x) = -\dfrac{2-\sqrt{6}}{4}\phi_2(3x) - \dfrac{1}{2}\phi_2(3x-1) - \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\phi_2(3x-2) \\
\qquad + \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\phi_2(3x-3) + \dfrac{1}{2}\phi_2(3x-4) + \dfrac{2-\sqrt{6}}{4}\phi_2(3x-5); \\
\psi_2^1(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\phi_1(3x) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\phi_1(3x-1) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\phi_1(3x-2) \\
\qquad - \dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{8}\phi_2(3x) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\phi_2(3x-1) \\
\qquad - \dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{8}\phi_2(3x-2) - \dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{8}\phi_2(3x-3) \\
\qquad - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\phi_2(3x-4) - \dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{8}\phi_2(3x-5);
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\psi_1^2(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\phi_2(3x) + \sqrt{2}\phi_2(3x-1) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\phi_2(3x-2); \\
\psi_2^2(x) = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}\phi_1(3x) + \dfrac{\sqrt{6}}{4}\phi_1(3x-2) - \dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{8}\phi_2(3x) \\
\qquad - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\phi_2(3x-1) - \dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{8}\phi_2(3x-2) \\
\qquad - \dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{8}\phi_2(3x-3) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\phi_2(3x-4) \\
\qquad - \dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{8}\phi_2(3x-5).
\end{cases}
$$

上例中我们基于两个正交尺度函数去构造二重正交多尺度函数和对应的多小波。当然更简单地也可以使用同一个单正交尺度函数构造二重正交的尺度函数和对应的多小波。

参 考 文 献

［1］ Daubechies I. Ten Lecture on Wavelets. CBMS-NSF Regional Series in Applied Math 61, Philadelphia: SIAM, 1992

［2］ Daubechies I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. Comm Pure and Appl Math, 1988, **41**: 909－996

［3］ Chui C K, Lian J A. Construction of compactly supported symmetric and antisymmetric orthonprmal wavelets with scale＝3. Appl Comput Harmon Anal, 1995, **2**: 21－51

［4］ 杨守志，程正兴。有限区间上的采样定理及 H(I)空间的逼近表示。数学物理学报，2001，**21**A：410－415

［5］ Cabrelli C, Heil C, Molter U. Accuracy of lattice translates of several multidimensional refinable functions. J Approx Theory, 1996, **95**: 5—52

[6] He Wenjie, Lai Mingjun. Construction of bivariate compactly supported biorthogonal box spline wavelets with arbitrarily high regularities. Appl Comput Harmon Anal, 1999, **6**: 53—74

[7] Jiang Q. Orthogonal multiwavelets with optimun time-frequency resolution. IEEE Trans Signal Process, 1998, **46**: 830—845

[8] Chui C K, Lian J. A study on orthonormal multiwavelets. J Appl Numer Math, 1996, **20**: 273—298

[9] Lian J. Orthogonal criteria for multiscaling functions. Appl Comp Harm Anal, 1998, **5**: 277—311

[10] 彭立中,王永革. 3带正交小波系统的参数化和代数结构. 中国科学, 2001, **31**A:602—614

Orthogonal Multiscaling Functions and Orthogonal Multiwavelets with Dilation *a*

Yang Shouzhi

(*Department of Mathematics*, *Shantou University*, *Shantou* 515063)

Abstract: A method for constructing orthonormal multiscaling function with dilation a is given by using an orthogonal uniscaling with dilation a. In addition, explicit construction formula for the corresponding orthogonal multiwavelets is obtained. Finally, the example for construction orthogonal multiscaling functions and multiwavelets with dilation 3 is given.

Key words: Orthogonal scaling function with dilation a; Orthogonal wavelets with dilation a; Orthogonal multiscaling function with dilation a; Orthogonal multiwavelets with dilation a。

MR(2000) Subject Classification: 42C40; 65T60