2005, **25A**(4): 569－576

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

B_a 空间中神经网络和平移网络的逼近*

周观珍

（宁波大学数学系　宁波 315211）

摘要：讨论了具一个隐层单元的神经网络在 B_a 空间中逼近的特征性定理并给出了逼近估计. 对于平移网络，建立了 Favard 型估计. Orlicz 空间中的相应结果均作为应用而给出.

关键词：神经网络；平移网络；B_a 空间；逼近.

MR(2000)主题分类：41A20；41A25；42C05　　**中图分类号**：O174.41　　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2005)04-569-08

1　引言

B_a 空间是由著名数学家丁夏畦先生等在[1]中引入的一种重要的函数型空间，是经典 L_p 空间的自然推广，它包括了诸如 Orlicz 空间、Sobolev 空间及 Orlicz-Sobolev 空间等. 在偏微分方程的先验估计、强非线性积分变分、调和分析、内插空间理论和逼近论等方面都得到了广泛的应用[2－7].

定义 1[1]　设 $B=\{L_{p_1},L_{p_2},\cdots,L_{p_m},\cdots\}$ 为一串 Lebesgue 类，$p_m>1, m=1,2,\cdots$，$f(x)$ 为定义在 n 维欧氏空间 R^n 内的有界闭集 G 上的可测函数，$a=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots\}$ 是非负实数列. 若对 $f(x)\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}L_{p_m}$，存在实数 $\alpha>0$ 使

$$I(f;\alpha):=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^m\|f\|_{p_m}^m<+\infty,$$

则称 $f(x)\in B_a$，且定义

$$\|f\|_{B_a}:=\inf_{\alpha>0}\{\alpha: I(f;\frac{1}{\alpha})\leqslant 1\}$$

为 B_a 空间的范数.

在上述范数下，B_a 空间为 Banach 空间. 若取 $B=\{L_p,L_p,\cdots,L_p,\cdots\}$，$a=\{1,0,\cdots,0,\cdots\}$，则这时的 B_a 空间就是经典的 L_p 空间.

近年来，有关神经网络逼近问题的研究引起了人们的极大的兴趣，已经取得了一系列重要的成果. 有关神经网络逼近能力的定性的研究已经相当成熟，这方面的工作可参见[8－11]. 在神经网络逼近的定量分析方面，Mhaskar 和 Micchelli[12] 考虑了用 $\Delta_{\phi,J}=\{\phi(Ax+t): A\in J,\ t\in R^d\}$ 的网络结构逼近周期函数类，并借助于目标函数的 Fourier 变换构造了一种

收稿日期：2004-04-30

* 基金项目：国家自然科学基金(10471069)，浙江省教育厅项目(20030431)，浙江省高校青年教师资助项目及宁波市青年基金(2004A620017)资助

非常重要的网络算子,并建立了对周期函数类逼近的上界估计.这方面的工作在[13]中被得以完善.文献[14]用以权函数 $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ 为正交的多元代数多项式系为工具构造了一类网络算子,并讨论了其对 L_w^p 中函数的逼近问题.本文的目的是探讨网络结构 $\Delta_{\phi,J}$ 对 2π-周期函数所构成的 B_a 空间中函数的逼近问题. Orlicz 空间中的相应结论在后文中作为 B_a 空间理论的应用而给出.

除非特殊说明,本文中的所有函数都指关于每个变量为以 2π 为周期的多变元 Lebesgue 可测函数.对 $1\leqslant p<\infty$, $k\geqslant 1$ (k 为整数),以 $L_p^{k,*}$ 表示 p 幂 k 维 Lebesgue 可积函数类,赋以通常的范数

$$\| f \|_{p,k}^{*}:=\left\{\int_{[-\pi,\pi]^k} | f(x) |^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

与此 Lebesgue 类相应的 B_a 空间记为 $B_a^{k,*}$.

设 $f(x)\in B_a^{k,*}$, $l\in Z^k$, f 的 l 阶 Fourier 系数定义为

$$\hat{f}(l):=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{[-\pi,\pi]^k} f(x)\mathrm{e}^{-ilx}\mathrm{d}x.$$

设 $s\geqslant d\geqslant 1$ 为正整数,$\phi:R^d\to R$, $\phi\in B_a^{d,*}$, 用 $J=J_{d,s}$ 表示一切秩为 d,元素为整数的 $d\times s$ 阶矩阵的集合.定义

$$\Delta_{\phi,J}=\{\phi(Ax+t):A\in J,\ t\in R^d\}\cup\{1\},$$

其中 1 表示定义在 R^d 上且函数值恒为 1 的函数.显然,这是一种带有复合结构的网络类型.用 $\mathrm{Span}(\Delta_{\phi,J})$ 表示由 $\Delta_{\phi,J}$ 中的元素的有限线性组合的全体而张成的函数类.设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为一组不全为零的整数,$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数,如果 $k\in Z^d$ 且 $\langle k_1,k_2,\cdots,k_d\rangle=1$, 则称 k 为 Z^d 的素点,这里 $k_i(i=1,2,\cdots,d)$ 为 k 的第 i 个分量.

设 $f(x)\in B_a^{s,*}$, $\phi\in B_a^{d,*}$, T_n^k 表示所有阶 $\leqslant n$ 的 k 变量三角多项式全体,x_i,y_i 分别表示 x,y 的分量,$x\geqslant y$ 表示对每一 i, $x_i\geqslant y_i$. 定义最佳逼近

$$E_n(f)_{B_a^{k,*}}=\min_{T\in T_n^k}\| f-T \|_{B_a^{k,*}}.$$

2 主要结果及证明

定理 1 设 $\phi\in B_a{}^{d,*}$, 则 $\mathrm{Span}(\Delta_{\phi,J})=B_a{}^{k,*}$ 当且仅当存在素点 $k\in Z^d$ 使得 $\hat{\phi}(k)\neq 0$.

证 必要性的证明.假设结论不成立,则对任意的素点 $k\in Z^d$ 都有 $\hat{\phi}(k)=0$,将[13]定理 2.1 的必要性之证明过程推广过来得到了

$$\int_{[-\pi,\pi]^s}\mathrm{e}^{-ilx}\phi(Ax+t)\mathrm{d}x\equiv 0,\quad A\in J.$$

因为 $\mathrm{e}^{-ilx}\in B_a^{k,*}$,这便与 $\mathrm{Span}(\Delta_{\phi,J})=B_a^{k,*}$ 且 $\mathrm{e}^{-ilx}\in B_a^{k,*}$ 矛盾.

充分性的证明.设 $\phi\in B_a^{d,*}$, 则由 $B_a^{d,*}$ 的定义知,$\phi\in L_{p_m}^{d,*}$ ($p_m>1$). 如果存在素点 $k\in Z^d$ 满足 $\hat{\phi}(k)\neq 0$,则由文[13]之定理 2.1 知,$\Delta_{\phi,J}$ 在 $L_{p_m}^{d,*}$ 稠密,自然有 $\mathrm{Span}(\Delta_{\phi,J})=B_a^{k,*}$. ▌

设 $\phi\in B_a^{d,*}$, 则当 $\mathrm{Span}(\Delta_{\phi,J})=B_a^{k,*}$ 时,由定理 1 知 $L_\phi:=\{k\in Z^d:\hat{\phi}(k)\neq 0\}$ 非空,而由[13]知,$Z^s\backslash\{0\}\subseteq\{A'k:A\in J\}$ 成立的充要条件是 k 为 Z^d 的素点,这里 A' 表示 A 的转置矩阵.故对任意的 $l\in Z^d\backslash\{0\}$,可以选择 $k_l\in L_\phi$ 及 $A_l\in J$, 使得 $l=A_l'k_l$, 并选择 k_l 为满足此式成立的所有那些 k_l 中 k_l 坐标的绝对值 $|k_l|$ 为最小的那一个.对任何整数 $n\geqslant 1$, 置

$$N_n:=\max\{| k_l |:-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0\},$$

$$m_n:=\min\{| \hat{\phi}(k_l) |:-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0\},$$

则显然有

$$N_n=\begin{cases}2n, & 平移情形, d=s,\ J=\{I\}, L_\phi\supseteq Z^s\backslash\{0\},\\ 1, & 神经网络情形, d=1, J=Z^s\backslash\{0\},\quad L_\phi\supseteq\{1\},\end{cases}$$

且

$$m_n=\begin{cases}\min\{|\hat{\phi}(k_l)|:|k|\leqslant 2n\}, & 平移情形,\\ |\hat{\phi}(1)|, & 神经网络情形.\end{cases}$$

对 $f(x)\in B_a^{k,*}$，记其 Fourier 展开的 De la Valleé Poussin 求和算子为

$$V_n(f,x)=\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\sum_{n\leqslant m\leqslant 2n}S_m(f,x),\ m\in Z^k,\ n\in N,$$

其中

$$S_m(f,x)=\sum_{-m\leqslant l\leqslant m}\hat{f}(l)\mathrm{e}^{-ilx}.$$

对 $f(x)\in B_a^{k,*}$ 及正整数 N，$n\geqslant 1$，与[13-14]中一样考虑如下网络算子

$$F_{n,N,\phi}(f,x)=\hat{f}(0)+\left(\frac{1}{4N+4N_n+1}\right)^d$$

$$\times\sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+4N_n}\ \sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0}\frac{\hat{V}_n(f)(l)}{\hat{\phi}(k_l)}\exp\left(i\frac{2\pi \mathrm{k_l j}}{\mathrm{4N+4N_n+1}}\right)\phi\left(\mathrm{A_l x}-\frac{2\pi \mathrm{j}}{\mathrm{4N+4N_n+1}}\right).$$

在平移网络情形下，$d=s$，$\hat{\phi}(k_l)=\hat{\phi}(l)$，因而有下面的平移网络算子

$$M_{n,N,\phi}(f,x)=\hat{f}(0)+\left(\frac{1}{4N+8n+1}\right)^s$$

$$\times\sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+8n}\left\{\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0}\frac{\hat{V}_n(f)(l)}{\hat{\phi}(l)}\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi lj}{4N+8n+1}\right)\right\}\phi\left(x-\frac{2\pi j}{4N+8n+1}\right).$$

在神经网络情形下，$d=1$，$k_l=1$，$N_n=1$，因而对应于下列的神经网络算子

$$N_{n,N,\phi}(f,x)=\hat{f}(0)+\left(\frac{1}{4N+5}\right)$$

$$\times\frac{1}{\hat{\phi}(1)}\sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+4}\ \sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0}\hat{V}_n(f)(l)\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi j}{4N+5}\right)\phi\left(lx-\frac{2\pi j}{4N+5}\right).$$

定理 2 设 $s\geqslant d\geqslant 1$，$n\geqslant 1$，$N\geqslant N_n$ 为正整数. 设 $f\in B_a^{s,*}$，$\phi\in B_a^{d,*}$，$\{a_m^{1/m}\}$，$\{a_m^{-1/m}\}\in l^\infty$，且 $p_0=\inf\limits_m\{p_m\}>1$，则有

$$\|f-F_{n,N,\phi}\|_{B_a^{s,*}}\leqslant C\left\{E_n(f)_{B_a^{s,*}}+\frac{n^\alpha E_n(\phi)_{B_a^{d,*}}}{m_n}\|f\|_{B_a^{s,*}}\right\}. \tag{1}$$

其中 $\alpha=1/\min\{p_0,2\}$.

为了证明定理 2，下列引理是必须的

引理 设 $k,n\geqslant 1$，$f\in B_a^{k,*}$，$T\in T_n^k$，则有

$$\|f-V_n(f)\|_{B_a^{k,*}}\leqslant CE_n(f)_{B_a^{k,*}}, \tag{2}$$

$$\|T\|_{p,k}^*\leqslant Cn^{k(1/r-1/p)_+}\|T\|_{r,k}^*,\ 1\leqslant r,p\leqslant\infty, \tag{3}$$

其中

$$y_+:=\max\{y,0\},$$

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{[-\pi,\pi]^k}f(At)\mathrm{d}t=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}f(v)\mathrm{d}v. \tag{4}$$

证 (3)，(4)式可见[12]. 下面证明(2)式. 事实上，由于 V_n 在 $L_{p_m}^{k,*}$ 上是一致有界的，即

$$\|V_n(f)\|^*_{p_m,k} \leqslant 3\|f\|^*_{p_m,k},\ f\in L^{k,*}_{p_m}.$$

这样就有

$$\begin{aligned}\|V_n(f)\|_{B^{k,*}_a} &\leqslant \inf\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\alpha^m}(\|V_n(f)\|^*_{p_m,k})^m\leqslant 1\}\\ &\leqslant \inf\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\alpha^m}(3\|f\|^*_{p_m,k})^m\leqslant 1\}\\ &\leqslant 3\inf\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\alpha^m}(\|f\|^*_{p_m,k})^m\leqslant 1\}\\ &= 3\|f\|_{B^{k,*}_a}.\end{aligned}$$

对任意 $T\in T^k_n$,由于 $V_n(T)=T$,故有

$$\begin{aligned}\|f-V_n(f)\|_{B^{k,*}_a} &= \|(f-T)-V_n(f-T)\|_{B^{k,*}_a}\\ &\leqslant C\|f-T\|_{B^{k,*}_a}.\end{aligned}$$

因此(2)式成立. ▌

定理 2 的证明 由[12,(2.17)]知道

$$V_n(f,x)=F_{n,N,V_n(\phi)}(f,x). \tag{5}$$

利用(5)和(2)式得

$$\begin{aligned}\|V_n(\phi,A_l\cdot-v)-\phi(A_l\cdot-v)\|^*_{p,s} &= (2\pi)^{s-d}\|V_n(\phi)-\phi\|^*_{p,d}\\ &\leqslant C(2\pi)^{s-d}\|V_n(\phi)-\phi\|_{B^{d,*}_a}\\ &\leqslant CE_n(\phi)_{B^{d,*}_a}.\end{aligned}$$

因此,由 $F_{n,N,\phi}(f,x)$的定义,得

$$\begin{aligned}&\|F_{n,N,\phi}(f)-F_{n,N,V_n(\phi)}(f)\|^*_{p_m,s}\\ &\leqslant\left(\frac{1}{4N+4N_n+1}\right)^d\sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+4N_n}\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0}\left|\frac{\hat V_n(f)(l)}{\hat\phi(k_l)}\right|\\ &\quad\times\left\|V_n\Big(\phi,A_l\cdot-\frac{2\pi j}{4N+4N_n+1}\Big)-\phi\Big(A_l\cdot-\frac{2\pi j}{4N+4N_n+1}\Big)\right\|^*_{p_m,s}\\ &\leqslant CE_n(\phi)_{B^{d,*}_a}\left(\frac{1}{4N+4N_n+1}\right)^d\sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+4N_n}\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,l\neq 0}\left|\frac{\hat V_n(f)(l)}{\hat\phi(k_l)}\right|\\ &\leqslant C\frac{E_n(\phi)_{B^{d,*}_a}}{m_n}\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0}|\hat V_n(f)(l)|.\end{aligned} \tag{6}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Parseval 等式以及 Nikolskii 不等式(3),有

$$\begin{aligned}\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0}|\hat V_n(f)(l)| &\leqslant Cn^{s/2}\Big\{\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0}|\hat V_n(f)(l)|^2\Big\}^{1/2}\\ &= Cn^{s/2}\|V_n(f)\|^*_{2,s}\\ &\leqslant Cn^{\alpha}\|V_n(f)\|^*_{p_m,s}\\ &\leqslant Cn^{\alpha}\|f\|^*_{p_m,s}\\ &\leqslant Cn^{\alpha}\|f\|_{B^{s,*}_a}.\end{aligned} \tag{7}$$

这里应用了[2]中的一个结论,即,当$\{a_m^{1/m}\}$,$\{a_m^{-1/m}\}\in l^\infty$时,

$$\|f\|^*_{p_m,s}\leqslant\frac{1}{r}\|f\|_{B^{s,*}_a},$$

其中 $r=\inf\limits_m\{a_m^{1/m}\}$. 结合(6)和(7)式, 有

$$\| F_{n,N,\phi}(f) - F_{n,N,V_n(\phi)}(f) \|_{p_m,s}^{*} \leqslant C \frac{n^{\alpha} E_n(\phi)_{B_a^{d,*}}}{m_n} \| f \|_{B_a^{s,*}}.$$

因此，由 $B_a^{k,*}$ 的范数定义有

$$\| F_{n,N,\phi}(f) - F_{n,N,V_n(\phi)}(f) \|_{B_a^{s,*}} \leqslant C \frac{n^{\alpha} E_n(\phi)_{B_a^{d,*}}}{m_n} \| f \|_{B_a^{s,*}}. \tag{8}$$

结合(2)、(5)、(6)、(8)式进一步得到

$$\begin{aligned} \| f - F_{n,N,\phi}(f) \|_{B_a^{s,*}} &\leqslant \| f - V_n(f) \|_{B_a^{s,*}} + \| V_n(f) - F_{n,N,\phi}(f) \|_{B_a^{s,*}} \\ &= \| f - V_n(f) \|_{B_a^{s,*}} + \| F_{n,N,\phi}(f) - F_{n,N,V_n(\phi)}(f) \|_{B_a^{s,*}} \\ &\leqslant C(E_n(f)_{B_a^{s,*}} + \frac{n^{\alpha} E_n(\phi)_{B_a^{d,*}}}{m_n} \| f \|_{B_a^{s,*}}). \end{aligned}$$

▌

关于平移网络，我们建立了下面的 Favard 型估计.

定理 3 设 $d=s, f\in B_a^{s,*}, \phi\in B_a^{d,*}, \{a_m^{1/m}\}, \{a_m^{-1/m}\}\in l^{\infty}$，$p_0=\inf\limits_m\{p_m\}>1$，而且 $f(x)$ 可以表示成为

$$f(x) = (\phi * h)(x) := \frac{1}{(2\pi)^s}\int_{[-\pi,\pi]^s} \phi(x-t)h(t)\mathrm{d}t,\ h \in B_a^{s,*}.$$

则当 $N\geqslant 2n$ 时，有

$$\| f - M_{n,N,\phi} \|_{B_a^{s,*}} \leqslant C\{n^{\alpha}E_n(\phi)_{B_a^{s,*}} + E_n(\phi)_{B_a^{s,*}}\} \| h \|_{B_a^{s,*}}.$$

证 由 $L_{p_m}^{s,*}$ 的定义及

$$\| f \|_{p_m,s}^{*} \leqslant \frac{1}{r} \| f \|_{B_a^{s,*}},$$

有

$$\| \phi * h \|_{p_m,s}^{*} \leqslant C \| \phi \|_{p_m,s}^{*} \| h \|_{p_m,s}^{*} \leqslant C \| \phi \|_{B_a^{s,*}} \| h \|_{B_a^{s,*}}.$$

取 $T\in T_n^s$ 使得

$$\| \phi - T \|_{B_a^{s,*}} = E_n(\phi)_{B_a^{s,*}},$$

则 $T * h\in T_n^s$，且有

$$\begin{aligned} \| (\phi - T) * h \|_{p_m,s}^{*} &\leqslant C \| \phi - T \|_{B_a^{s,*}} \| h \|_{B_a^{s,*}} \\ &\leqslant CE_n(\phi)_{B_a^{s,*}} \| h \|_{B_a^{s,*}}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} E_n(f)_{B_a^{s,*}} &\leqslant \| (\phi - T) * h \|_{B_a^{s,*}} \\ &\leqslant \inf\{\alpha > 0: \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\alpha^m}(\| (\phi - T) * h \|_{p_m,s}^{*})^m \leqslant 1\} \\ &\leqslant \inf\{\alpha > 0: \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{C}{\alpha}E_n(\phi)_{B_a^{s,*}} \| h \|_{B_a^{s,*}})^m \leqslant 1\} \\ &\leqslant CE_n(\phi)_{B_a^{s,*}} \| h \|_{B_a^{s,*}}. \end{aligned} \tag{9}$$

由于

$$\hat{f}(k) = \hat{\phi}(k)\hat{h}(k), k \in Z^s,$$

所以

$$\frac{\hat{V}_n(f)(l)}{\hat{\phi}(l)} = \hat{V}_n(h)(l),\ 0 < | l | \leqslant 2n.$$

借助于(6)、(7)式有

$$\| V_n(f) - M_{n,N,\phi}(f) \|_{B_a^{s,*}} \leqslant CE_n(\phi)_{B_a^{s,*}} \sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n,\ l\neq 0} | \hat{V}_n(h)(l) |$$
$$\leqslant Cn^{\alpha} E_n(\phi)_{B_a^{s,*}} \| h \|_{B_a^{s,*}}. \tag{10}$$

结合(9)式得到

$$\| f - V_n(f) \|_{B_a^{s,*}} \leqslant CE_n(f)_{B_a^{s,*}} \leqslant CE_n(\phi)_{B_a^{s,*}} \| h \|_{B_a^{s,*}}. \tag{11}$$

▌

对 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_s)\in Z_+^s$ (Z_+^s 表示 Z^s 中坐标非负的点), $|m|=m_1+m_2+\cdots+m_s$, 定义偏导数

$$D^m f = \frac{\partial^{|m|} f}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_s^{m_s}},$$

及 Sobolev 空间

$$W_{m,B_a^{s,*}} = \{ f \in B_a^{s,*} : D^{\alpha}(f,x) (\alpha = 0,1,\cdots,m-1) \text{ 绝对连续,且 } D^m(f,x) \in B_a^{s,*} \}.$$

由于[12]

$$D^m V_n(f,x) = D^m M_{n,N,V_N(\phi)}(f,x) = \left(\frac{1}{4N+8n+1}\right)^s \times \sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+8n} \left[\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n, l\neq 0} \frac{\hat{V}_n(f)(l)}{\hat{\phi}(l)} \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{2\pi lj}{4N+8n+1}\right) \right] \times D^m V_N\left(\phi, x - \frac{2\pi j}{4N+8n+1}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4N+8n+1}\right)^s \times \sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+8n} \left[\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n, l\neq 0} \frac{\hat{V}_n(f)(l)}{\hat{\phi}(l)} \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{2\pi lj}{4N+8n+1}\right) \right] \times V_N\left(D^m\phi, x - \frac{2\pi j}{4N+8n+1}\right),$$

$$D^m M_{n,N,\phi}(f,x) = \left(\frac{1}{4N+8n+1}\right)^s \times \sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+8n} \left[\sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n, l\neq 0} \frac{\hat{V}_n(f)(l)}{\hat{\phi}(l)} \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{2\pi lj}{4N+8n+1}\right) \right] \times D^m \phi\left(x - \frac{2\pi j}{4N+8n+1}\right),$$

$$D^m N_{n,N,\phi}(f,x) = \left(\frac{1}{4N+5}\right) \frac{1}{\hat{\phi}(l)} \times \sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+4} \sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n, l\neq 0} \hat{V}_n(f)(l) \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{2\pi j}{4N+5}\right) \times l^m \phi^{(|m|)}\left(lx - \frac{2\pi j}{4N+5}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4N+5}\right) \frac{1}{\hat{\phi}^{(|m|)}(l)} \times \sum_{0\leqslant j\leqslant 4N+4} \sum_{-2n\leqslant l\leqslant 2n, l\neq 0} \hat{V}_n(D^m f)(l) \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{2\pi j}{4N+5}\right) \times \phi^{(|m|)}\left(lx - \frac{2\pi j}{4N+5}\right)$$

和

$$D^m V_n(\phi,x) = V_n(D^m\phi,x), D^m N_{n,N,\phi}(f,x) = N_{n,N,\phi^{(|m|)}}(D^m f,x).$$

借助本文中证明定理 2 时所用的方法，容易证明下面的结论

定理 4 设 $m\in Z_+^s$，$n\geqslant 1$ 为一整数，$f\in W_{m,B_a^{s,*}}$，$B_a^{s,*}$ 满足定理 2 中的条件，则

(1) 如果 $\phi\in W_{m,B_a^{s,*}}$，对 $N\geqslant 2n$，成立

$$\| D^m f - D^m M_{n,N,\phi}(f) \|_{B_a^{s,*}} \leqslant C\{E_n(D^m f)_{B_a^{s,*}} + \frac{n^\alpha E_n(D^m\phi)_{B_a^{s,*}}}{m_n} \| f \|_{B_a^{s,*}}\}.$$

(2) 如果 $\phi\in W_{m,B_a^{1,*}}$，对 $N\geqslant 1$，成立

$$\| D^m f - D^m N_{n,N,\phi}(f) \|_{B_a^{s,*}} \leqslant C\{E_n(D^m f)_{B_a^{s,*}} + n^\alpha E_n(D^m\phi)_{B_a^{1,*}} \| f \|_{B_a^{s,*}}\}.$$

3 应用

设 $M(u)$为 N 函数，$L_M^{k;*}$ 为由 $M(u)$ 所生成的每个变元均为 2π-周期的 Orlicz 空间[16]，并记其所对应的 Orlicz 范数为 $\|\cdot\|_{M,2\pi}^{k;*}$. 如果存在 $u_0>0, K>0$ 使得 $M(2u_0)\leqslant KM(u_0)$，则称 $M(u)\in\Delta_2$. 如果 $M(u)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m u^m, a_m\geqslant 0$，则称 $M(u)$ 为整函数，记为 $M(u)\in EF$. 由[16]知道 $M(u)\in\Delta_2\cap EF$ 当且仅当 $M(u)=\sum_{m=2}^{\infty}a_m u^m$ 为多项式. 此时，$L_M^{k;*}$ 为特殊的 B_a 空间. 因此，在 Orlicz 范数下定理 1—定理 4 的结果仍成立. 特别有下面的两个结论.

定理 5 设 $\phi\in L_M^{d;*}$，$M(u)\in\Delta_2\cap EF$，则 $\mathrm{Span}(\Delta_{\phi,J})=L_M^{k;*}$ 当且仅当存在素点 $k\in Z^d$ 使得$\hat{\phi}(k)\neq 0$.

定理 6 设 $s\geqslant d\geqslant 1, n\geqslant 1$，$N\geqslant N_n$ 为正整数. 设 $f\in L_M^{s;*}$，$\phi\in L_M^{d;*}$，则有

$$\| f - F_{n,N,\phi} \|_{M,2\pi}^{s,*} \leqslant C\{E_n(f)_{M,*,s} + \frac{n^{\frac{1}{2}} E_n(\phi)_{M,*,d}}{m_n} \| f \|_{M,2\pi}^{s,*}\},$$

其中 $E_n(\phi)_{M,*,d}$为ϕ 在 Orlicz 范数下关于 T_n^s 的最佳逼近.

参 考 文 献

[1] Ding X Q, Luo P Z. B_a spaces and some estimates of Laplace operators. J Sys Sci Math Sci, 1981, **1**(1):9—33

[2] Chen G R, Men B Q. Interpolation of B_a spaces. Acta Math Scientia, 1988, **8**(1): 65—70

[3] Ding X Q, He Y Z, Luo P Z. Theory of B_a space and its application. Beijing: Science Press, 1992

[4] 盛保怀. B_a 空间中的算子逼近. 数学物理学报, 1991, **11**(4):387—395

[5] 盛保怀. B_a 空间中 Kantorovich 算子的饱和性. 数学杂志, 1992, **12**(2):146—154

[6] 盛宝怀, 刘三阳, 陈广荣. Kantorovič 算子在 B_a Besov 空间中的饱和性. 应用数学学报, 2002, **25**(3):392—401

[7] Sheng B H, Liu S Y, Chen G R. The Marcinkiewicz-Zygmund inequality in B_a spaces(I). J Sys Sci and Compl, 2003, **16**(1):74—84

[8] Chen T P, Chen H, Lin R W. Approximation capablity in $C(R^n)$ by multilayer feedforward networks and related problems. IEEE Tran Neural Networks, 1995, **6**(1):25—30

[9] Chen T P, Chen H. Approximation capablity to functions of several variables, nonlinear functions, and operators by radial basis function neural networks. IEEE Tran Neural Networks, 1995, **6**(4):904—910

[10] Chen T P, Chen H. Universal approximation to nonlinear operators by neural networks with arbitrary action functions and its application to dynamical system. IEEE Tran Neural Networks, 1995, **6**(4):911—917

[11] Chen T P. A unified approach for neural network-like approximation of nonlinear functionals. Neural Networks, 1998, **11**(5):981—983

[12] Mhaskar H N, Micchelli C A. Degree of approximation by neural and translation networks with single hidden lay-

er. Advan in Appli Math, 1995, **16**(1): 151－183

[13] 蒋传海，吴和兵，李纯明. 多元周期函数的一类逼近及逼近阶估计. 数学学报，1999，**42**(2)：263－270

[14] 王建力，盛宝怀，周颂平. 非周期神经网络及平移网络在 L^p_w 中的逼近. 数学学报，2003，**46**(1)：65－74

[15] 周观珍，盛宝怀。一类球面带形平移网络算子的逼近。数学物理学报，2005，25A(2)：269－276

[16] 吴从炘，王庭辅. 奥尔里奇空间及其应用. 哈尔滨：哈尔滨科学技术出版社，1983

[17] Deng Y H, Gu Y G. A new class of function spaces and the Hilbert transform. J Math Anal Appl, 1985, **108**(1): 99－106

On Approximation by Neural and Translation Networks in B_a Spaces

Zhou Guanzhen

(*Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo* 315211)

Abstract: The characteristic theorem as well as the degree of approximating by neural networks and translation networks, with a single hidden layer in B_a spaces is established. The Favard type estimate is obtained as well. The correspondences of Orlicz spaces are given by one of the applications of B_a spaces.

Key words: Neural networks; Translation networks; B_a spaces; Approximation.

MR(2000) Subject Classification: 41A20; 41A25; 42C05