Mathematica Acta Scientia 数学物理学报
2009,**29A**(4):1074–1083 http://actams.wipm.ac.cn

半鞅非 Lipschitz 系数随机微分方程解的大偏差 *

费为银
(安徽工程科技学院应用数理系 安徽芜湖 241000)

摘要: 建立了半鞅非 Lipschitz 系数随机微分方程，研究了 Freidlin-Wentzell 型大偏差原理.

关键词: 随机微分方程；半鞅； Gronwall 引理；非 Lipschitz 条件；大偏差.
MR(2000) 主题分类: 60H20; 60G44 **中图分类号**: O211.4 **文献标识码**: A
文章编号: 1003-3998(2009)04-1074-10

1 引言

近来， Fang 和 Zhang[1] 研究了一类非 Lipschitz 系数 Brown 运动随机微分方程 (SDE) 的路径唯一性和大偏差. 本文类似 Mao[2] 的框架讨论了以下非线性半鞅随机微分方程

$$X_t = x_0 + \int_0^t F(X_s, \mathrm{d}s) = x_0 + \int_0^t b(X_s, s)\mathrm{d}s + \int_0^t M(X_s, \mathrm{d}s),$$

等价地

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t, t)\mathrm{d}t + M(X_t, \mathrm{d}t), X_0 = x_0, \tag{1.1}$$

其中 $b(x,t)$ 是一维有限变差过程， $M(x,t)$ 是一维连续局部鞅.

本文建立了随机微分方程解 Freidlin-Wentzell 型大偏差 (见文献 [3]). 易知随机微分方程解的唯一性可由 Euler 逼近获得. 本文大偏差策略证明 Euler 逼近速度是指数的. 方程系数非 Lipschitz 特征致使文献 [4–6] 中方法不起作用. 为此本文使用一族正函数 $(\Phi_\rho)_{\rho>0}$.

设 $X_t(x_0,\omega)$ 是 SDE (1.1) 的解. 众所周知，如果驱动过程 $M(x,t)$ 是 Brown 运动且局部特征是局部 Lipschitz, 则方程解具有连续修正 $\tilde{X}_t(x_0,\omega)$(见文献 [7]). 本文研究半鞅随机微分方程在非 Lipschitz 条件 (H1) 下解的大偏差，推广了文献 [1] 到一般情形.

下一节陈述了大偏差原理. 在系数 a 和 b 有界时证明了大偏差原理. 提供了一个重要的概率不等式用于大偏差的研究. 最后一节探讨了大偏差的一般情形.

2 a 和 b 有界时大偏差

设 $\sigma(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$ 和 $b(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数. 考虑下列 Itô SDE

$$\mathrm{d}X^\epsilon(t) = \epsilon^{\frac{1}{2}}\sigma(X^\epsilon(t))\mathrm{d}N_t + b(X^\epsilon(t))\mathrm{d}t,\ X_0^\epsilon = x_0, \tag{2.1}$$

收稿日期: 2007-11-27; 修订日期: 2008-10-24
E-mail: wyfei@dhu.edu.cn
* 基金项目: 国家 973 项目 (2007CB814901) 、国家自然科学基金 (10826098) 和安徽省自然科学基金资助

其中 $N\in\mathcal{M}_2^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$. 令

$$a(x,y)\mathrm{d}t=\sigma(x)\sigma(y)\mathrm{d}\langle N\rangle_t,$$

由文献 [2] 知 $\int_0^t\epsilon^{\frac12}\sigma(x)\mathrm{d}N_t$ 和 $\int_0^t\epsilon^{\frac12}\sigma(y)\mathrm{d}N_t$ 的协变差为

$$\Big\langle\int_0^t\epsilon^{\frac12}\sigma(x)\mathrm{d}N_t,\int_0^t\epsilon^{\frac12}\sigma(y)\mathrm{d}N_t\Big\rangle=\epsilon a(x,y)t.$$

以下假设

$$\begin{cases}a(x,x)-2a(x,y)+a(y,y)\le C|x-y|^2\log\dfrac{1}{|x-y|^2}, & |x-y|<1,\\ |b(x)-b(y)|\le C|x-y|\log\dfrac{1}{|x-y|}, & |x-y|<1\end{cases}\tag{H1}$$

和

$$\begin{cases}a(x,x)\le C(|x|^2\log|x|^2+1),\\ |b(x)|\le C(|x|\log|x|+1).\end{cases}\tag{H2}$$

本文建立 SDE (2.1) 的大偏差原理. 首先陈述大偏差原理.

设 $C_x([0,1],\mathbf{R})$ 是从 $[0,1]$ 到 $\mathbf{R}$ 初值为 x 的连续函数空间. 如果 $g\in C_0([0,1],\mathbf{R})$ 是绝对连续的，令 $e(g)=\int_0^1|\dot g(t)|^2\mathrm{d}t$. 假设 $F(g)$ 是以下微分方程的解

$$F(g)(t)=x_0+\int_0^t b(F(g)(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(F(g)(s))\dot g(s)\mathrm{d}s,\quad 0<t<+\infty.\tag{2.2}$$

SDE (2.1) 解的唯一性和无爆炸证明如文献 [1] 的第 2 节. 也见以下引理 2.4.

定理 2.1 设 μ_ϵ 是 $X^\epsilon(\cdot)$ 在 $C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$ 的分布. 假设 (H1) 和 (H2) 成立. 则 $\{\mu_\epsilon,\epsilon>0\}$ 满足如下速率函数的大偏差原理

$$I(f)=\inf\left\{\frac12 e(g)^2;\ F(g)=f\right\},\quad f\in C_{x_0}([0,1],\mathbf{R}).\tag{2.3}$$

即

(i) 对任意闭子集 $C\subset C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$, 有

$$\limsup_{\epsilon\to0}\epsilon\log\mu_\epsilon(C)\le-\inf_{f\in C}I(f).\tag{2.4}$$

(ii) 对任意开子集 $G\subset C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$, 有

$$\liminf_{\epsilon\to0}\epsilon\log\mu_\epsilon(G)\ge-\inf_{f\in G}I(f).\tag{2.5}$$

以下讨论 a 和 b 有界时的大偏差. 一般情形在第 3 节加以证明.

Lipschitz 系数下扩散过程的大偏差理论可见文献 [6]. Fang 和 Zhang[1] 讨论了无穷维情形. 本文主要任务是处理半鞅框架下非 Lipschitz 特征. 对 $n\ge1$, 令 $X_n^\epsilon(\cdot)$ 是以下方程的解

$$X_n^\epsilon(t)=x_0+\int_0^t b\left(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\right)\mathrm{d}s+\epsilon^{\frac12}\int_0^t\sigma\left(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\right)\mathrm{d}N_s.$$

现推广文献 [1, 引理 2.4] 到半鞅场合.

引理 2.2 令 $\xi_t = \int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}N_s$. 假设 $a(\cdot)$ 和 $\beta(\cdot)$ 是 ξ 的局部特征并满足 $|a(\cdot)| \le A$, $|\beta(\cdot)| \le B$. 则对 $T>0$ 和 $R>0$ 且 $BT<R$, 有

$$P\Big(\sup_{0\le t\le T}|\xi_t| \ge R\Big) \le 2\exp\big(-(R-BT)^2/2AT\big).$$

证 令 $\bar{\xi}_t = \xi_t - \int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s$, 于是 $\exp(\theta\bar{\xi}_t - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t a(s)\mathrm{d}s), \forall\theta\in\mathbf{R}$ 是局部鞅. 由于它是连续的局部鞅，因而是上鞅. 从而 $|\theta|=1$. 在证明结论之前，现推广文献 [9, 定理 1.2.3].

如果 $(\zeta_t, (\mathcal{F}_t), P)$ 是一上鞅且 $\lambda>0$, 则

$$P\Big(\sup_{0\le t\le T}\zeta_t \ge \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda}E\Big[\zeta_T\Big|\sup_{0\le t\le T}\zeta_t\ge\lambda\Big]. \tag{2.6}$$

不等式 (2.6) 的证明完全类似文献 [9, 定理 1.2.3].

现证明我们的结论. 由 (2.6) 式可知

$$\begin{aligned}P\Big(\sup_{0\le t\le T}\theta\xi_t \ge R\Big) &\le P\Big(\sup_{0\le t\le T}\theta\bar{\xi}_t \ge R-BT\Big)\\ &\le P\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big(\lambda\theta\bar{\xi}_t - \frac{\theta^2\lambda^2}{2}\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\Big) \ge \lambda(R-BT) - \frac{\lambda^2 A}{2}T\Big)\\ &\le \exp\Big(-\lambda(R-BT)+\frac{\lambda^2A}{2}T\Big).\end{aligned}$$

取 $\lambda = \frac{R-BT}{AT}$, 得 $P(\sup\limits_{0\le t\le T}|\xi_t|\ge R) \le 2P(\sup\limits_{0\le t\le T}\theta\xi_t\ge R)$. 于是证得结论. ∎

命题 2.3 假设 (H1) 成立，且 a 和 b 有界. 于是对任意 $\delta>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|X^\epsilon(t)-X_n^\epsilon(t)|>\delta\Big) = -\infty. \tag{2.7}$$

证 设 $\delta < \mathrm{e}^{-1} < 1$. 假设 $Y_n^\epsilon(t) := X^\epsilon(t) - X_n^\epsilon(t)$ 和 $\xi_n^\epsilon(t) = |Y_n^\epsilon(t)|^2$. 于是

$$Y_n^\epsilon(t) = \int_0^t \Big[b(X^\epsilon(s)) - b\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big]\mathrm{d}s + \epsilon^{\frac12}\int_0^t\Big[\sigma(X^\epsilon(s)) - \sigma\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big]\mathrm{d}N_s$$

和

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\xi_n^\epsilon(t) = {}& 2\epsilon^{\frac12}Y_n^\epsilon(t)\Big(\sigma(X^\epsilon(t)) - \sigma\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big)\Big)\Big)\mathrm{d}N_t + 2Y_n^\epsilon(t)\Big(b(X^\epsilon(t)) - b\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big)\Big)\Big)\mathrm{d}t\\ &+\epsilon\Big(a(X^\epsilon(t),X^\epsilon(t)) - 2a\Big(X^\epsilon(t), X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big)\Big) + a\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big), X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big)\Big)\Big)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此随机收缩 $\mathrm{d}\xi_n^\epsilon\cdot\mathrm{d}\xi_n^\epsilon$ 为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\xi_n^\epsilon\cdot\mathrm{d}\xi_n^\epsilon = {}& 4\epsilon\Big(a(X^\epsilon(t),X^\epsilon(t)) - 2a\Big(X^\epsilon(t), X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big)\Big)\\ &+a\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big), X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big)\Big)\Big)|Y_n^\epsilon(t)|^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

令 $\rho>0$. 定义函数 $\psi_\rho:[0,1]\to\mathbf{R}$ 为

$$\psi_\rho(\xi) = \int_0^\xi \frac{\mathrm{d}s}{s\log\frac{1}{s}+\rho}.$$

易知，对任意 $0<\xi<1$, 有

$$\psi_\rho(\xi)\uparrow\psi_0(\xi)=\int_0^\xi\frac{\mathrm{d}s}{s\log\frac{1}{s}}=+\infty,\rho\downarrow 0.$$

对 $\lambda>0$, 定义 $\Phi_{\rho,\lambda}(\xi)=\mathrm{e}^{\lambda\psi_\rho(\xi)}$. 那么有

$$\Phi'_{\rho,\lambda}(\xi)\Big(\xi\log\frac{1}{\xi}+\rho\Big)=\lambda\Phi_{\rho,\lambda}(\xi) \tag{2.8}$$

和

$$\begin{aligned}\Phi''_{\rho,\lambda}(\xi)&=\lambda^2\Phi_{\rho,\lambda}(\xi)\frac{1}{(\xi\log\frac{1}{\xi}+\rho)^2}+\lambda\Phi_{\rho,\lambda}(\xi)\frac{1-\log\frac{1}{\xi}}{(\xi\log\frac{1}{\xi}+\rho)^2}\\&\le\lambda^2\Phi_{\rho,\lambda}(\xi)\frac{1}{(\xi\log\frac{1}{\xi}+\rho)^2},\quad \xi\le\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

现选择正常数 $\delta_1<\mathrm{e}^{-1}$ 满足 $\delta_1\log\frac{1}{\delta_1}<\rho$. 定义 $\tau_n^\epsilon=\inf\{t\ge 0;|X_n^\epsilon(t)-X_n^\epsilon(\frac{[nt]}{n})|\ge\delta_1\}$, 且令 $\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(t)=\xi_n^\epsilon(t\wedge\tau_n^\epsilon),t\ge 0$. 设 $T_n^\epsilon=\inf\{t\ge 0,|\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(t)t|\ge\delta^2\}$, 于是

$$\begin{aligned}P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|Y_n^\epsilon(t)|>\delta\Big)&=P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|Y_n^\epsilon(t)|>\delta,\tau_n^\epsilon\le 1\Big)+P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|Y_n^\epsilon(t)|>\delta,\tau_n^\epsilon>1\Big)\\&\le P(\tau_n^\epsilon\le 1)+P(T_n^\epsilon\le 1).\end{aligned}$$

注意到

$$P(\tau_n^\epsilon\le 1)\le\sum_{k=1}^n P\Bigg(\sup_{\frac{k-1}{n}\le t\le\frac{k}{n}}\Big|X_n^\epsilon(t)-X_n^\epsilon\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\Big|\ge\delta_1\Bigg).$$

利用引理 2.2, a 和 b 的有界性，存在常数 $c_{\delta_1}>0$ 使得 $P(\tau_n^\epsilon\le 1)\le 2n\exp(-nc_{\delta_1}/\epsilon)$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log P(\tau_n^\epsilon\le 1)=-\infty. \tag{2.10}$$

为了记号的简明性， T 代表 T_n^ϵ, 而 τ 表示 τ_n^ϵ. 依据 Itô 公式得

$$\begin{aligned}\Phi_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(t\wedge T))=&1+2\epsilon^{\frac12}\int_0^{t\wedge T\wedge\tau}\Phi'_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s))Y_n^\epsilon(s)\Big(\sigma(X^\epsilon(s))-\sigma\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big)\mathrm{d}N_s\\&+2\int_0^{t\wedge T\wedge\tau}\Phi'_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s))Y_n^\epsilon(s)\Big(b(X^\epsilon(s))-b\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big)\mathrm{d}s\\&+\epsilon\int_0^{t\wedge T\wedge\tau}\Phi'_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s))\Big(a(X^\epsilon(s),X^\epsilon(s))-2a\Big(X^\epsilon(s),X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\\&+a\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big),X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big)\mathrm{d}s\\&+2\epsilon\int_0^{t\wedge T\wedge\tau}\Phi''_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s))\Big(a(X^\epsilon(s),X^\epsilon(s))-2a\Big(X^\epsilon(s),X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\\&+a\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big),X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big)|Y_n^\epsilon(s)|^2\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.11}$$

注意到对 $s\le T\wedge\tau,|Y_n^\epsilon(s)|\le\delta\le\mathrm{e}^{-1}<1$ 和 $|X_n^\epsilon(s)-X_n^\epsilon(\frac{[ns]}{n})|\le\delta_1<\mathrm{e}^{-1}$. 于是对 $s\le T\wedge\tau$, 有

$$\Big|Y_n^\epsilon(s)\Big(b(X^\epsilon(s))-b\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big)\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&= |Y_n^\epsilon(s)(b(X^\epsilon(s)) - b(X_n^\epsilon(s)))| + \Big|Y_n^\epsilon(s)\Big(b(X_n^\epsilon(s)) - b\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big)\Big| \\
&\le CY_n^\epsilon(s)^2 \log\Big(\frac{1}{|Y_n^\epsilon(s)|}\Big) + C\Big|X_n^\epsilon(s) - X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big| \log\Big(\frac{1}{|X_n^\epsilon(s) - X_n^\epsilon(\frac{[ns]}{n})|}\Big) \\
&\le \frac{1}{2}C\xi_n^\epsilon(s)\log\Big(\frac{1}{\xi_n^\epsilon(s)}\Big) + C\delta_1 \log\Big(\frac{1}{\delta_1}\Big) \le C\Big(\xi_n^\epsilon(s)\log\Big(\frac{1}{\xi_n^\epsilon(s)}\Big) + \rho\Big),
\end{aligned}
$$

其中已使用函数 $x\log(\frac{1}{x})$ 在 $[0, \mathrm{e}^{-1}]$ 上是增的这一事实. 进而, 对 $s \le T \wedge \tau$, 有

$$
\begin{aligned}
&a(X^\epsilon(s), X^\epsilon(s)) - 2a\Big(X^\epsilon(s), X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big) + a\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big), X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big) \\
\le{}& 2(a(X^\epsilon(s), X^\epsilon(s)) - 2a(X^\epsilon(s), X_n^\epsilon(s)) + a(X_n^\epsilon(s), X_n^\epsilon(s))) \\
&+2\Big(a(X_n^\epsilon(s), X_n^\epsilon(s)) - 2a\Big(X_n^\epsilon(s), X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big) + a\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big), X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big) \\
\le{}& C\xi_n^\epsilon(s)\log\Big(\frac{1}{\xi_n^\epsilon(s)}\Big) + C\Big|X_n^\epsilon(s) - X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big|^2 \log\Big(\frac{1}{|X_n^\epsilon(s) - X_n^\epsilon(\frac{[ns]}{n})|^2}\Big) \\
\le{}& C\Big(\xi_n^\epsilon(s)\log\Big(\frac{1}{\xi_n^\epsilon(s)}\Big) + \rho\Big).
\end{aligned}
$$

类似地, 可得

$$
\begin{aligned}
&\Big(a(X^\epsilon(s), X^\epsilon(s)) - 2a\Big(X^\epsilon(s), X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big) + a\Big(X_n^\epsilon\Big(\frac{[nt]}{n}\Big), X_n^\epsilon\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big)|Y_n^\epsilon(s)|^2 \\
\le{}& C\xi_n^\epsilon(s)\Big(\xi_n^\epsilon(s)\log\Big(\frac{1}{\xi_n^\epsilon(s)}\Big) + \rho\Big) \le C\Big(\xi_n^\epsilon(s)\log\Big(\frac{1}{\xi_n^\epsilon(s)}\Big) + \rho\Big)^2.
\end{aligned}
$$

结合这些不等式, 由 (2.11) 式得

$$
\begin{aligned}
E[\Phi_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(t\wedge T))] \le{}& 1 + CE\Big[\int_0^{t\wedge T} \Phi'_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s))\Big(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s)\log\Big(\frac{1}{\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s)}\Big) + \rho\Big)\mathrm{d}s\Big] \\
&+C\epsilon E\Big[\int_0^{t\wedge T} \Phi''_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s))\Big(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s)\log\Big(\frac{1}{\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s)}\Big) + \rho\Big)^2\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}
$$

从 (2.8) 和 (2.9) 式知它不超过

$$
1 + C(\epsilon\lambda^2 + \lambda)\int_0^t E[\Phi_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(s\wedge T))]\mathrm{d}s.
$$

根据 Gronwall 引理得

$$
E[\Phi_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(1\wedge T))] \le \mathrm{e}^{C(\epsilon\lambda^2+\lambda)}. \tag{2.12}
$$

另一方面, 有

$$
E[\Phi_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(1\wedge T))] \ge E[\Phi_{\rho,\lambda}(\xi_{n,\delta_1}^\epsilon(T))|T \le 1] = \mathrm{e}^{\lambda\psi_\rho(\delta^2)}P(T \le 1). \tag{2.13}
$$

结合 (2.12) 和 (2.13) 式, 有 $P(T \le 1) \le \mathrm{e}^{-\lambda\psi_\rho(\delta^2)}\mathrm{e}^{C(\epsilon\lambda^2+\lambda)}$. 取 $\lambda = \frac{1}{\epsilon}$, 得

$$
\limsup_{n\to\infty}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log P(T \le 1) \le -\psi_\rho(\delta^2) + 2C.
$$

结合 (2.10) 式意味着

$$
\limsup_{n\to\infty}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|Y_n^\epsilon(t)| > \delta\Big) \le -\psi_\rho(\delta^2) + 2C.
$$

令 ρ 趋于 0 即可证得结论. ▌

对 $n\geq 1$, 定义映射 $F_n(\cdot):C_0([0,1],\mathbf{R})\to C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$ 为

$$\begin{aligned}&F_n(g)(0)=x_0,\\&F_n(g)(t)=F_n(g)\Big(\frac{k}{n}\Big)+b\Big(F_n(g)\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)\Big(t-\frac{k}{n}\Big)+\sigma\Big(F_n(g)\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)\Big(g(t)-g\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big),\end{aligned}\tag{2.14}$$

对 $\frac{k}{n}\leq t\leq\frac{k+1}{n}$. 易知 F_n 是一从 $C_0([0,1],\mathbf{R})$ 到 $C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$ 的连续映射.

引理 2.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\{g;e(g)\leq\alpha\}}\sup\limits_{0\leq t\leq 1}|F_n(g)(t)-F(g)(t)|=0.$

证 注意到对满足 $e(g)\leq\alpha$ 的 g, 有

$$F_n(g)(t)=x_0+\int_0^t b\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\dot g(s)\mathrm{d}s.$$

于是

$$\begin{aligned}F_n(g)(t)-F(g)(t)=&\int_0^t\Big[b\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)-b(F(g)(s))\Big]\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\Big[\sigma\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)-\sigma(F(g)(s))\Big]\dot g(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于 a 和 b 是有界的，对 $t\leq 1$, 有

$$\begin{aligned}&\Big|F_n(g)(t)-F_n(g)\Big(\frac{[nt]}{n}\Big)\Big|\\&\leq\int_{\frac{[nt]}{n}}^t b\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\mathrm{d}s+\int_{\frac{[nt]}{n}}^t\Big|\sigma\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)\Big||\dot g(s)|\mathrm{d}s\leq C_\alpha\Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac12},\end{aligned}\tag{2.15}$$

其中 C_α 是仅依赖于 α 和 a 与 b 一致范数的常数. 设 $Y_n^g(t)=F_n(g)(t)-F(g)(t)$ 和 $Z_n^g(t)=|Y_n^g(t)|^2$. 对任意 $0<\delta<\mathrm{e}^{-1}$, 定义 $\tau_n(g)=\inf\{t\geq 0,|Y_n^g(t)|>\delta\}$. 给定 $\rho>0$, 定义

$$\Phi_\rho(\xi)=\mathrm{e}^{\psi_\rho(\xi)},$$

其中

$$\psi_\rho(\xi)=\int_0^\xi\frac{\mathrm{d}s}{s\log\frac1s+\rho}.$$

因此

$$\Phi_\rho'(\xi)\Big(\xi\log\frac{1}{\xi}+\rho\Big)=\Phi_\rho(\xi).$$

依据链法则得

$$\begin{aligned}\Phi_\rho(Z_n^g(t\wedge\tau_n(g)))=&1+2\int_0^{t\wedge\tau_n(g)}\Phi_\rho'(Z_n^g(s))Y_n^g(s)\Big(b\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)-b(F(g)(s))\Big)\mathrm{d}s\\&+2\int_0^{t\wedge\tau_n(g)}\Phi_\rho'(Z_n^g(s))Y_n^g(s)\Big(\sigma\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)-\sigma(F(g)(s))\Big)\dot g(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{2.16}$$

利用 (H1) 和 (2.15) 式，对 $s \le \tau_n(g)$ 有

$$\begin{aligned}
&\Big|Y_n^g(s)\Big(b\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)-b(F(g)(s))\Big)\Big| \\
\le\ &\Big|Y_n^g(s)\Big(b\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)-b(F_n(g)(s))\Big)\Big|+|Y_n^g(s)(b(F_n(g)(s))-b(F(g)(s)))| \\
\le\ &C|Y_n^g(s)|\Big|F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)-F(g)(s)\Big|\log\Big(\frac{1}{|F_n(g)(\frac{[ns]}{n})-F(g)(s)|}\Big)+\frac{1}{2}CZ_n^g(s)\log\Big(\frac{1}{Z_n^g(s)}\Big) \\
\le\ &CC_\alpha\Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{2}}\log(n^{\frac{1}{2}})+CZ_n^g(s)\log\Big(\frac{1}{Z_n^g(s)}\Big) \\
\le\ &C\Big(Z_n^g(s)\log\Big(\frac{1}{Z_n^g(s)}\Big)+\rho\Big),
\end{aligned}$$

对 $n \ge N_\alpha^1$, 其中 N_α^1 依赖于 α 和 ρ. 类似地，对 $s \le \tau_n(g)$ 和 $n \ge N_\alpha^1$, 有

$$|Y_n^g(s)|\Big|\sigma\Big(F_n(g)\Big(\frac{[ns]}{n}\Big)\Big)-\sigma(F(g)(s))\Big|\le C\Big(Z_n^g(s)\log\Big(\frac{1}{Z_n^g(s)}\Big)+\rho\Big).$$

从 (2.16) 式，对 $n \ge N_\alpha^1$ 和 $g \in \{g; e(g) \le \alpha\}$ 有

$$\begin{aligned}
\Phi_\rho(Z_n^g(t\wedge\tau_n(g))) &\le 1+C\int_0^{t\wedge\tau_n(g)}\Phi_\rho'(Z_n^g(s))\Big(Z_n^g(s)\log\Big(\frac{1}{Z_n^g(s)}\Big)+\rho\Big)(1+|\dot g(s)|)\mathrm{d}s \\
&\le 1+C\int_0^t\Phi_\rho(Z_n^g(s\wedge\tau_n(g)))(1+|\dot g(s)|)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

根据 Gronwall 引理，有

$$\Phi_\rho\left(Z_n^g(1\wedge\tau_n(g))\right)\le\exp\Big\{C\int_0^t(1+|\dot g(s)|)\mathrm{d}s\Big\}\le \mathrm{e}^{C(\sqrt{\alpha}+1)}.$$

由于 $\Phi_\rho(\xi)$ 是 ξ 的增函数，于是对 $n \ge N_\alpha^1$, 有

$$\Phi_\rho\Big(\sup_{g\in\{g;e(g)\le\alpha\}}Z_n^g(1\wedge\tau_n(g))\Big)\le \mathrm{e}^{C\sqrt{\alpha}+1}.$$

对任意 $\rho > 0$, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\Phi_\rho\Big(\sup_{g\in\{g;e(g)\le\alpha\}}Z_n^g(1\wedge\tau_n(g))\Big)\le C\mathrm{e}^{1+\sqrt{\alpha}}. \tag{2.17}$$

为了完成证明, 仅须表明对任意 $\delta > 0$, 存在一整数 N 使得如果 $n \ge N$, 则对 $g \in \{g; e(g) \le \alpha\}$ 有 $\tau_n(g) > 1$. 此结果来自 (2.17) 式. 事实上，如果相反的话，则存在 $\delta > 0$, 一个正整数序列 $\{n_k, k \ge 1\}$ 和 $g_{n_k} \in \{g; e(g) \le \alpha\}$ 使得 $\tau_{n_k}(g_{n_k}) \le 1$. 这意味着

$$\Phi_\rho\Big(\sup_{g\in\{g;e(g)\le\alpha\}}Z_{n_k}^g(1\wedge\tau_{n_k}(g))\Big)\ge\Phi_\rho(Z_{n_k}^{g_k}(1\wedge\tau_{n_k}(g_{n_k})))=\Phi_\rho(\delta^2).$$

结合 (2.17) 式，对任意 ρ 有

$$\Phi_\rho(\delta^2)\le \mathrm{e}^{C(\sqrt{\alpha}+1)}. \tag{2.18}$$

由于 (2.18) 式的左边随 ρ 趋于 0 而趋于无穷大，这导致矛盾，从而证得结论. ∎

a 和 b 有界时定理 2.1 的证明 注意到 $X_n^\epsilon(s) = F_n(\epsilon^{\frac{1}{2}}N)(s)$, 其中 $N \in \mathcal{M}_2^{c,loc}(\mathcal{F}_t)$. 类似于文献 [4] 及文献 [1], 依据命题 2.3 和引理 2.4 可证得结论. ∎

3 一般情形的大偏差

本节将除去 a 和 b 有界性假设.

命题 3.1 假设 (H2) 成立. 则

$$\lim_{R\to+\infty}\limsup_{\epsilon\to0}\epsilon\log P\Big(\sup_{0\le t\le1}|X^\epsilon(t)-x_0|>R\Big)=-\infty, \tag{3.1}$$

其中 $X^\epsilon(\cdot)$ 是方程 (2.1) 的解.

证 设 δ_0 是固定小正数，例如 $\delta_0<\frac{1}{2}$. 假设 $f\in C^1(\mathbf{R}_+)$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上严格正 C^1 函数，满足

$$f(s)=\begin{cases}-s\log s, & 0\le s\le 1-\delta_0,\\ s\log s, & s\ge 1+\delta_0.\end{cases}$$

从现在开始， C 表示基本常数. 易证，存在正常数 C 使得

$$s|\log s|+1\le C(f(s)+1), f'(s)\ge -C, s\ge 0. \tag{3.2}$$

定义 $\psi(\xi)=\int_0^\xi\frac{\mathrm{d}s}{f(s)+1},\xi\ge0$. 并令 $\Phi_\lambda(\xi)=\mathrm{e}^{\lambda\psi(\xi)},\lambda\ge0$. 从 (3.2) 式得

$$\Phi_\lambda'(\xi)=\lambda\Phi_\lambda(\xi)\frac{1}{f(\xi)+1}\le C\lambda\Phi_\lambda(\xi)\frac{1}{\xi|\log\xi|+1}$$

和

$$\Phi_\lambda''(\xi)=\lambda^2\Phi_\lambda(\xi)\frac{1}{(f(\xi)+1)^2}-\lambda\Phi_\lambda(\xi)\frac{f'(\xi)}{(f(\xi)+1)^2}\le C(\lambda^2+\lambda)\Phi_\lambda(\xi)\frac{1}{(\xi|\log\xi|+1)^2}. \tag{3.3}$$

假设 $\eta^\epsilon(t)=X^\epsilon(t)-x_0$ 和 $\xi^\epsilon(t)=|\eta^\epsilon(t)|^2$. 定义 $\tau_R=\inf\{t>0,|\eta^\epsilon(t)|^2\ge R\},R>0$. 依据 Itô 公式得

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\xi^\epsilon(t\wedge\tau_R))=1&+2\epsilon^{\frac12}\int_0^{t\wedge\tau_R}\Phi_\lambda'(\xi^\epsilon(s))\eta^\epsilon(s)\sigma(X^\epsilon(s))\mathrm{d}N_s\\&+2\int_0^{t\wedge\tau_R}\Phi_\lambda'(\xi^\epsilon(s))\eta^\epsilon(s)b(X^\epsilon(s))\mathrm{d}s\\&+\epsilon\int_0^{t\wedge\tau_R}\Phi_\lambda'(\xi^\epsilon(s))a(X^\epsilon(s),X^\epsilon(s))\mathrm{d}s\\&+2\epsilon\int_0^{t\wedge\tau_R}\Phi_\lambda''(\xi^\epsilon(s))a(X^\epsilon(s),X^\epsilon(s))|\eta^\epsilon(s)|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据条件 (H2), 存在 $C_1>0$ 使得

$$\begin{cases}a(x,x)\le C_1(|x-x_0|^2\log|x-x_0|+1),\\ |b(x)|\le C_1(|x-x_0|\log|x-x_0|+1).\end{cases}$$

于是

$$\frac{a(X^\epsilon(s),X^\epsilon(s))|\eta^\epsilon(s)|^2}{(\xi^\epsilon(s)|\log\xi^\epsilon(s)|+1)^2}\le C_1\frac{\xi^\epsilon(s)(\xi^\epsilon(s)|\log\xi^\epsilon(s)|+1)}{(\xi^\epsilon(s)|\log\xi^\epsilon(s)|+1)^2},$$

而上式右端被常数 C 控制. 根据 (3.3) 式得

$$\int_0^{t\wedge\tau_R}\Phi_\lambda''(\xi^\epsilon(s))a(X^\epsilon(s),X^\epsilon(s),t)|\eta^\epsilon(s)|^2\mathrm{d}s\le C(\lambda^2+\lambda)\int_0^{t\wedge\tau_R}\Phi_\lambda(\xi^\epsilon(s))\mathrm{d}s.$$

同样地，对某常数 $C>0$, 有

$$\frac{|\eta^\epsilon(s)b(X^\epsilon(s))|+a(X^\epsilon(s),X^\epsilon(s))}{\xi^\epsilon(s)|\log\xi^\epsilon(s)|+1}\le C, s>0.$$

结合上述不等式可得

$$E(\Phi_\lambda(\xi^\epsilon(t\wedge\tau_R)))\le 1+C(\epsilon\lambda^2+\lambda)\int_0^t E(\Phi_\lambda(\xi^\epsilon(t\wedge\tau_R)))\mathrm{d}s,$$

上式意味着 $E(\Phi_\lambda(\xi^\epsilon(1\wedge\tau_R)))\le \mathrm{e}^{C(\epsilon\lambda^2+\lambda)}$. 设 $\lambda=\frac{1}{\epsilon}$. 于是

$$P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|X^\epsilon(t)-x_0|>R\Big)\Phi_{\frac{1}{\epsilon}}(R)\le E(\Phi_{\frac{1}{\epsilon}}(\xi^\epsilon(1\wedge\tau_R)))\le \mathrm{e}^{2C\frac{1}{\epsilon}}.$$

由此可得

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|X^\epsilon(t)-x_0|>R\Big)\le 2C-\psi(R). \tag{3.4}$$

注意到 $\lim\limits_{R\to+\infty}\psi(R)=+\infty$. 在 (3.4) 式令 R 趋于 $+\infty$ 可得结论. ▌

对 $R>0$, 定义 $m_R=\sup\{a(x,x),|b(x)|;|x|\le R\}$ 和 $a_R=(-m_R-1)\vee a\wedge(m_R+1), b_R=(-m_R-1)\vee b\wedge(m_R+1)$. 于是对 $|x|\le R$, $a_R(x,x)=a(x,x)$, $\quad b_R(x)=b(x)$, 其中 a_R 和 b_R 满足带有同样常数的条件 (H1) 和 (H2).

设 $X_R^\epsilon(\cdot)$ 是下列方程的解

$$X_R^\epsilon(t)=x_0+\int_0^t b_R(X_R^\epsilon(s))\mathrm{d}s+\epsilon^{\frac{1}{2}}\int_0^t\sigma_R(X_R^\epsilon(s))\mathrm{d}N_s, t>0.$$

对满足 $e(g)<\infty$ 的 g, 设 $F_R(g)$ 是下列方程的解

$$F_R(g)(t)=x_0+\int_0^t b_R(F_R(g)(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_R(F_R(g)(s))\dot g(s)\mathrm{d}s.$$

定义 $I_R(f)=\inf\{\frac{1}{2}e(g)^2;F_R(g)=f\}, f\in C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$. 如果 $\sup\limits_{0\le t\le 1}|F(g)(t)|\le R$, 则 $F(g)=F_R(g)$. 因此 $I(f)=I_R(f)$, 对 f 满足 $\sup\limits_{0\le t\le 1}|f(t)|\le R$.

引理 3.2 $I(\cdot)$ 在 $C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$ 上是一好的速率函数, 即对任意 $\alpha\ge 0$, 水平集 $\{f;I(f)\le\alpha\}$ 是紧的.

证 如引理 2.4 的讨论，易知 $\alpha>0$, $\sup\limits_{\{g;e(g)\le\alpha\}}\|F(g)\|_\infty\le R$. 对某常数 R. 于是在 $\{g;e(g)\le\alpha\}$ 上 $F_R(\cdot)=F(\cdot)$. 另一方面，易知 $F_R(\cdot)$ 在水平集 $\{g;e(g)\le\alpha\}$ 上连续， $F(\cdot)$ 也如此. 由于 $e(\cdot)$ 是好的速率函数，这足以表明 $I(\cdot)$ 是一好的速率函数. ▌

无界情形下定理 2.1 的证明 设 μ_ϵ^R 表示 $X_R^\epsilon(\cdot)$ 在 $C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$ 上的分布. 根据前一节，$\{\mu_\epsilon^R,\epsilon>0\}$ 满足好的速率函数 $I_R(\cdot)$ 的大偏差原理. 注意到 μ_ϵ^R 和 μ_ϵ 在球 $\{f;\|f\|_\infty\le R\}$ 上是一致的. 对 $R>0$ 和一闭子集 $C\subset C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$, 令 $C_R=C\cap\{f;\|f\|_\infty\le R\}$. 则

$$\mu_\epsilon(C)\le\mu_\epsilon(C_R)+P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|X^\epsilon(t)|>R\Big)=\mu_\epsilon^R(C_R)+P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|X^\epsilon(t)|>R\Big).$$

根据对 $\{\mu_\epsilon^R, \epsilon > 0\}$ 的大偏差原理，有

$$\begin{aligned}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(C) &\le \Big(-\inf_{f\in C_R} I_R(f)\Big)\vee\Big(\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|X^\epsilon(t)|>R\Big)\Big)\\ &= \Big(-\inf_{f\in C_R} I(f)\Big)\vee\Big(\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log P\Big(\sup_{0\le t\le 1}|X^\epsilon(t)|>R\Big)\Big).\end{aligned}$$

应用命题 3.1 并令 $R\to+\infty$ 得 $\limsup\limits_{\epsilon\to}\epsilon\log\mu_\epsilon(C)\le -\inf\limits_{f\in C} I(f)$.

设 G 是 $C_{x_0}([0,1],\mathbf{R})$ 上的开子集. 任意固定 $\phi_0\in G$. 选择 $\delta>0$ 使得 $B(\phi_0,\delta)=\{f;\|f-\phi_0\|_\infty\le\delta\}\subset G$. 令 $R=\|\phi_0\|_\infty+\delta$.

由于 $B(\phi_0,\delta)\subset\{f;\|f\|_\infty\le R\}$, 所以

$$\begin{aligned}-I(\phi_0)=-I^R(\phi_0) &\le \limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon^R(B(\phi_0,\delta))=\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(B(\phi_0,\delta))\\ &\le \limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(G).\end{aligned}$$

由 ϕ_0 的任意性，有 $-\inf\limits_{f\in G} I(f)\le\limsup\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(G)$. 于是完成结论的证明. ∎

参 考 文 献

[1] Fang S, Zhang T S. A study of a class of stochastic differential equations with non-Lipschitzian coefficients. Probab Theory Relat Fields, 2005, **132**: 356–390

[2] Mao X R. Exponential Stability of Stochastic Differential Equation. New York: Marcel Dekker, 1994

[3] Freidlin M I, Wentzell A D. Random Perturbations of Dynamical System. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1984.

[4] Dembo A, Zeitouni A. Large Deviations Techniques and Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1998

[5] Deuschel J D, Stroock D W. Large Deviations. Boston, San Diego, New York: Academic Press, 1989

[6] Stroock D W. An Introduction to the Theory of Large Deviations. Berlin: Springer-Verlag, 1984

[7] Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1990

[8] Fang S, Zhang T S. Large deviations for the Brownian motion on loop groups. Journal of Theoretical Probability, 2001, **14**: 463–483

[9] Strook D W, Varadhan S R S. Multidimensional Diffusion Processes. New York: Springer-Verlag, 1979

Large Deviations for Solutions to Stochastic Differential Equations Driven by Semimartingale with Non-Lipschitz Coefficients

Fei Weiyin

(*Department of Applied Mathematics and Physics, Anhui University of Technology and Science, Anhui Wuhu 241000*)

Abstract: In this paper, a class of stochastic differential equations (SDEs) driven by semimartingale with non-Lipschitz coefficients is established. A large deviation principle of Freidlin-Wentzell type is investigated.

Key words: Stochastic differential equations; Semimartingale; Gronwall lemma; Non-Lipschitz conditions; Large deviation.

MR(2000) Subject Classification: 60H20; 60G44