2009,**29A**(6):

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

部分和乘积的几乎处处中心极限定理 *

[1] 谭中权　[2] 彭作祥

([1] 遵义师范学院数学系　遵义 563002; [2] 西南大学数学与统计学院　重庆 400715)

摘要: 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布正的随机变量序列， $E(X_1)=\mu>0$, $Var(X_1)=\sigma^2$, $E|X_1|^3<\infty$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$, 变异系数 $\gamma=\sigma/\mu$. g 是满足一定条件的无界可测函数，证明了

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}g\left(\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}S_k}{n!\mu^n}\right)^{\frac{1}{\gamma\sqrt{n}}}\right)=\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}F(x)\quad \text{a.s.}$$

其中 $F(\cdot)$ 是随机变量 $e^{\sqrt{2}\xi}$ 的分布函数， ξ 是服从标准正态分布的随机变量.

关键词: 几乎处处中心极限定理；部分和；无界可测函数.

MR(2000) 主题分类: 60F15; 60F05　**中图分类号**: O211.4　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)06–

1　引言

几乎处处中心极限定理 (ASCLT), 是近几年来概率论研究的一个热门话题. 自从 Brosamler[3] 和 Schatte[15] 研究了独立同分布随机变量列部分的几乎处处中心极限定理以来, 许多作者对此问题进行了较广泛的研究，如 Berkes 等 [1], Ibragimov 和 Lifshits[8] 研究了函数条件下的几乎处处中心极限定理.

最近, 一些学者开始研究独立同分布随机序列部分和乘积的渐近分布. 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是独立同分布正的随机变量序列, 其部分和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$. 在二价矩存在的条件下， Rempala 和 Wesolowski[13] 就证明了

$$\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}S_k}{n!\mu^n}\right)^{\frac{1}{\gamma\sqrt{n}}}\xrightarrow{d}e^{\sqrt{2}\xi},\tag{1}$$

其中 $F(\cdot)$ 是随机变量 $e^{\sqrt{2}\xi}$ 的分布函数， ξ 是服从标准正态分布的随机变量.　Qi[12], Lu 和 Qi[10] 把该结果推广到了分布属于指数为 $[1,2]$ 的稳定分布吸引场的情形.　Chen[4] 则得到了部分和乘积的重对数律.

最近 Gonechigdanzan 和 Rempala[7] 得到了关于 (1) 式的几乎处处中心极限定理，即

收稿日期：2007-12-03; 修订日期：2008-08-26

E-mail: tzq728@163.com; pzx@swu.edu.cn

* 基金项目：重庆市自然科研基金 (CSTS: 2005BB8098)

定理 A 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布正的随机变量序列， $E(X_1)=\mu>0, Var(X_1)=\sigma^2$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 变异系数 $\gamma=\sigma/\mu$, 则对任意的 $x \in R$ 有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}I\left(\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}S_k}{n!\mu^n}\right)^{\frac{1}{\gamma\sqrt{n}}}\leq x\right)=F(x)\quad \text{a.s.} \tag{2}$$

其中 $F(\cdot)$ 是随机变量 $e^{\sqrt{2}\xi}$ 的分布函数， ξ 是服从标准正态分布的随机变量. 从定理 A 的证明容易得到 (2) 式对于直线上有界 Lipschitz 函数仍然成立. 我们自然希望 (2) 式对于无界可测函数成立，这正是本文要解决的问题. 本文的目的就是证明 (2) 式对满足一定条件的无界可测函数 g 成立.

2 主要结论

我们的主要结论如下:

定理 1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布正的随机变量序列， $E(X_1)=\mu>0, Var(X_1)=\sigma^2$, $E|X_1|^3<\infty$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 变异系数 $\gamma=\sigma/\mu$. 设 $g(x)$ 是 R 上几乎处处连续的实值函数使得 $|g(e^x)\phi(x)|\leq c(1+|x|)^{-\alpha}$ 对常数 $c>0$ 和 $\alpha>5$ 成立，则对任意的 $x\in R$ 有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}g\left(\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}S_k}{n!\mu^n}\right)^{\frac{1}{\gamma\sqrt{n}}}\right)=\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}F(x)\quad \text{a.s.} \tag{3}$$

其中 $F(\cdot)$ 是随机变量 $e^{\sqrt{2}\xi}$ 的分布函数， ξ 是服从标准正态分布的随机变量， $\phi(x)$ 是标准正态分布密度函数.

令 $f(x)=g(e^x)$, 通过简单的计算容易得到:

注 1 设 $f(x)$ 是 R 上几乎处处连续的实值函数使得 $|f(x)\phi(x)|\leq c(1+|x|)^{-\alpha}$ 对常数 $c>0$ 和 $\alpha>5$ 成立，则 (3) 式等价于

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}f\Big(\frac{1}{\gamma\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{S_k}{\mu k}\Big)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi(x)\mathrm{d}x\quad \text{a.s.} \tag{4}$$

其中 $\phi(x)$ 是标准正态分布密度函数.

3 定理的证明

为了证明主要结论，先介绍如下记号:

当 $k\leq n$ 时记 $s_{k,n}=(\sum\limits_{i=1}^{k}b_{i,n}^2)^{1/2}$; 当 $k>n$ 记 $s_{k,n}=0$, 其中 $b_{k,n}=\sum\limits_{i=k}^{n}1/i$. 定义 $Z_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}, i=1,2,\cdots, \widetilde{S}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i$. 定义三角阵列 $Y_{1,n},Y_{2,n},\cdots,Y_{n,n}$ 其中 $Y_{k,n}=b_{k,n}Z_k$, 记 $S_{k,n}=\sum\limits_{i=1}^{k}Y_{i,n}$, $1\leq k\leq n$. 由 Gonechigdanzan 和 Rempala[7] 有:

$$s_{n,n}^2=2n-b_{1,n},$$

$$S_{n,n}/s_{n,n}\xrightarrow{d}N(0,1),\quad 当\quad n\to\infty.$$

令

$$U_i=\frac{1}{\gamma\sqrt{2i}}\sum_{k=1}^{i}\log\frac{S_k}{\mu k}.$$

当 $|x|<1$ 时有

$$\log(1+x)=x+\frac{\theta}{2}x^2$$

其中 $\theta\in(-1,0)$, 因此

$$\begin{aligned}U_i &= \frac{1}{\gamma\sqrt{2i}}\sum_{k=1}^{i}\log\frac{S_k}{\mu k}\\ &= \frac{1}{\gamma\sqrt{2i}}\sum_{k=1}^{i}\Big(\frac{S_k}{\mu k}-1\Big)+\frac{1}{\gamma\sqrt{2i}}\sum_{k=1}^{i}\frac{\theta_k}{2}\Big(\frac{S_k}{\mu k}-1\Big)^2\\ &= \frac{1}{\sqrt{2i}}S_{i,i}+\frac{1}{\gamma\sqrt{2i}}\sum_{k=1}^{i}\frac{\theta_k}{2}\Big(\frac{S_k}{\mu k}-1\Big)^2\\ &=: \frac{1}{\sqrt{2i}}S_{i,i}+R_i.\end{aligned}$$

当 $k\to\infty$ 时，由重对数律有

$$\left|\frac{S_k}{\mu k}-1\right|=O\big((\log(\log k)/k)^{1/2}\big)\quad \text{a.s.}$$

因此

$$|R_i|\ll\frac{(\log\log i)(\log i)}{i^{1/2}}\quad \text{a.s.}\tag{5}$$

容易得到

$$E|R_i|=E\left|\frac{1}{\gamma\sqrt{2i}}\sum_{k=1}^{i}\frac{\theta_k}{2}\Big(\frac{S_k}{\mu k}-1\Big)^2\right|\ll\frac{1}{\sqrt{2i}}\sum_{k=1}^{i}E\Big(\frac{S_k}{\mu k}-1\Big)^2\ll\frac{1}{\sqrt{2i}}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\ll\frac{\log i}{i^{1/2}}\tag{6}$$

其中 $a_n\ll b_n$ 表示 $\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n/b_n|<+\infty$.

下面的两个引理来自 Petrov[11].

引理 1 设 X 和 Y 是随机变量. 记 $F(x)=P(X<x),G(x)=P(X+Y<x)$, 则对任意 $\varepsilon>0$ 和 $x\in R$ 有

$$F(x-\varepsilon)-P(|Y|\ge\varepsilon)\le G(x)\le F(x+\varepsilon)+P(|Y|\ge\varepsilon).$$

证 参见 Petrov[11] 引理 3, p.16. ∎

引理 2 设 $\{X_n,n\ge1\}$ 是一列独立同分布随机变量具有一致非退化分布. 记 $S_n=\sum\limits_{k\le n}X_k$, 则当 $n\to\infty$ 时，对任意 $\lambda_n\ge0$ 有

$$\sup_x P(x\le S_n\le x+\lambda_n)=O\Big(\frac{\lambda_n+1}{\sqrt{n}}\Big).$$

证 参见 Petrov[11],p.47-49. ▎

引理 3 假设 (4) 式对所有区间示性函数和一个固定的几乎处处连续函数 $f(x)=f_0(x)$ 成立，则 (4) 式对所有使得 $f(x)\le |f_0(x)|$, $x\in R$ 的几乎处处连续函数也成立，而且概率为 0 的例外集可以与这样的 f 无关.

证 参见 Berkes 等 [1]. ▎

由引理 3 及注 1 知，为了证明 (3) 式，只需证明 (4) 式对 $f(x)\phi(x)=(1+|x|)^{-\alpha},\alpha>5$ 成立即可. 下面记 $f(x)\phi(x)=(1+|x|)^{-\alpha},\alpha>5$. 本文采用截尾方法，令

$$\xi_k=\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{i}f(U_i)$$

$$\xi_k^*=\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{i}f(U_i)I\left\{f(U_i)\le\frac{k}{(\log k)^\beta}\right\}$$

其中 $1<\beta<\frac{1}{2}(\alpha-3)$.

引理 4 在定理 1 的条件之下有 $P(\xi_k=\xi_k^*\ \ i.o.)=0$.

证 首先容易看到

$$\{\xi_k=\xi_k^*\}\subseteq\{|U_i|\ge f^{-1}(k/(\log k)^\beta)\ \ 对某些\ \ 2^k<i\le 2^{k+1}\}$$

其中 f^{-1} 表示 f 的逆函数. 注意到 f 是偶函数并且当 $x\ge x_0$ 时单调递增，直接计算可以得到

$$f^{-1}(k/(\log k)^\beta)\ge(2\log k+(\alpha-2\beta)\log\log k)^{1/2}$$

由 $2^k<i\le 2^{k+1}$ 有 $k\ge\frac{1}{2}\log i$, 结合 (**??**) 式有

$$\begin{aligned}P(\xi_k=\xi_k^*\ \ i.o.)&\le P(|U_i|\ge(2\log\log i+(\alpha-2\beta)\log\log\log i-O(1))^{1/2}\ \ i.o.)\\&=P\Big(\Big|\frac{1}{\sqrt{2i}}S_{i,i}+R_i\Big|\ge(2\log\log i+(\alpha-2\beta)\log\log\log i-O(1))^{1/2}\ \ i.o.\Big)\\&\le P\Big(\Big|\frac{1}{\sqrt{2i}}S_{i,i}\Big|\ge(2\log\log i+(\alpha-2\beta)\log\log\log i-O(1))^{1/2}\ \ i.o.\Big)\\&=0\end{aligned}$$

其中最后一步是因为 Feller[5] 定理 2 中的事实. ▎

令 $a_k=f^{-1}(k/(\log k)^\beta)$ 并设 G_i,F_i,F 分别表示 $U_i,\frac{\widetilde{S_i}}{\sqrt{i}},Z_1$ 的分布函数， Φ 表示标准正态分布函数. 定义

$$\sigma_i^2=\int_{-\sqrt{i}}^{\sqrt{i}}x^2\mathrm{d}F(x)-\Big(\int_{-\sqrt{i}}^{\sqrt{i}}x\mathrm{d}F(x)\Big)^2$$

$$\eta_i=\sup_x\Big|G_i(x)-\Phi(\frac{x}{\sigma_i})\Big|$$

$$\varepsilon_i=\sup_x\Big|F_i(x)-\Phi(\frac{x}{\sigma_i})\Big|$$

则 $\sigma_i\le 1,\lim\limits_{i\to\infty}\sigma_i=1$.

引理 5 在定理 1 的条件之下有

$$\sum_{k\le N}E(\xi_k^*)\ll\frac{N^2}{(\log N)^{2\beta}}.$$

证 注意到对任何有界可测函数 ψ 和分布函数 G_1, G_2 有

$$\Big|\int_{-a}^{a}\psi(x)d(G_1(x)-G_2(x))\Big| \le \sup_{-a\le x\le a}|\psi(x)|\cdot\sup_{-a\le x\le a}|G_1(x)-G_2(x)|. \tag{7}$$

因此对任何 $2^k < i \le 2^{k+1}$ 有

$$\begin{aligned}Ef^2(U_i)I\Big\{f(U_i)\le\frac{k}{(\log k)^\beta}\Big\} &= \int_{|x|\le a_k} f^2(x)dG_i(x)\\ &\le \int_{|x|\le a_k} f^2(x)d\Phi\Big(\frac{x}{\sigma_i}\Big)+\eta_i\frac{k^2}{(\log k)^{2\beta}}\\ &\ll \int_{|x|\le a_k} f^2(x)d\Phi(x)+\eta_i\frac{k^2}{(\log k)^{2\beta}}\end{aligned}$$

于是由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}E(\xi_k^*)^2 &\ll E\bigg(\Big(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}(\frac{1}{i})^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}f^2(U_i)I\Big\{f(U_i)\le\frac{k}{(\log k)^\beta}\Big\}\Big)^{1/2}\bigg)^2\\ &\ll \Big(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{i^2}\Big)\Big(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\int_{|x|\le a_k}f^2(x)d\Phi(x)+\eta_i\frac{k^2}{(\log k)^{2\beta}}\Big)\\ &\ll \frac{1}{2^k}\Big(2^k\int_{|x|\le a_k}f^2(x)d\Phi(x)+\frac{k^2}{(\log k)^{2\beta}}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\eta_i\Big)\\ &\ll \int_{|x|\le a_k}\frac{e^{x^2/2}}{(1+|x|)^{2\alpha}}\mathrm{d}x+\frac{k^2}{(\log k)^{2\beta}}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{\eta_i}{i}.\end{aligned}$$

因为

$$\int_0^t\frac{e^{x^2/2}}{(1+|x|)^{2\alpha}}\mathrm{d}x=\int_0^{t/2}+\int_{t/2}^t\ll te^{t^2/8}+\frac{1}{t^{2\alpha+1}}\int_{t/2}^t xe^{x^2/2}\mathrm{d}x\ll\frac{e^{t^2/2}}{t^{2\alpha+1}}$$

故由 $a_k\ge(\log k)^{1/2}$ 有

$$\int_{|x|\le a_k}\frac{e^{x^2/2}}{(1+|x|)^{2\alpha}}\mathrm{d}x\ll\frac{e^{a_k^2/2}}{a_k^{2\alpha+1}}\ll f(a_k)\frac{1}{a_k^{\alpha+1}}\ll\frac{k}{(\log k)^{\beta+(\alpha+1)/2}}.$$

下面估计 η_i. 由引理 1 对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\begin{aligned}\eta_i &= \sup_x\Big|G_i(x)-\Phi\Big(\frac{x}{\sigma_i}\Big)\Big|\\ &\le \sup_x|G_i(x)-F_i(x)|+\sup_x\Big|F_i(x)-\Phi\Big(\frac{x}{\sigma_i}\Big)\Big|\\ &= \sup_x\Big|P(U_i\le x)-P\Big(\frac{\widetilde{S}_i}{\sqrt{i}}\le x\Big)\Big|+\varepsilon_i\\ &\le \sup_x\Big|P(U_i\le x)-P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x\Big)\Big|+\sup_x\Big|P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x\Big)-P\Big(\frac{\widetilde{S}_i}{\sqrt{i}}\le x\Big)\Big|+\varepsilon_i\\ &\le P(|R_i|\ge\varepsilon)+\sup_x\Big|P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x+\varepsilon\Big)-P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x\Big)\Big|\\ &\quad+\sup_x\Big|P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x\Big)-P\Big(\frac{\widetilde{S}_i}{\sqrt{i}}\le x\Big)\Big|+\varepsilon_i\end{aligned}$$

由 Markov 不等式和 (6) 式有

$$P(|R_i|\ge\varepsilon)\le\frac{E|R_i|}{\varepsilon}\ll\frac{\log i}{i^{1/2}\varepsilon}.$$

由引理 2 有

$$\sup_x\Big|P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x+\varepsilon\Big)-P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x\Big)\Big|\ll\frac{\varepsilon+1}{\sqrt{i}}.$$

由 Berry-Esséen 不等式有

$$\begin{aligned}&\sup_x\Big|P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x\Big)-P\Big(\frac{\widetilde{S}_i}{\sqrt{i}}\le x\Big)\Big|\\&\le\sup_x\Big|P\Big(\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\le x\Big)-\Phi(x)\Big|+\sup_x\Big|P\Big(\frac{\widetilde{S}_i}{\sqrt{i}}\le x\Big)-\Phi(x)\Big|\\&\ll\frac{1}{i^{1/2}}+\frac{1}{i^{1/2}}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon=i^{-1/3}$ 则

$$\eta_i\ll\frac{\log i}{i^{1/6}}+\frac{1}{i^{1/2}}+\frac{1}{i^{1/2}}+\frac{1}{i^{1/2}}+\varepsilon_i$$

因此存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\eta_i\ll\frac{1}{i^{\varepsilon_0}}+\varepsilon_i$$

结合 Friedman 等 [6] 中的事实

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{i}<\infty$$

可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\eta_i}{i}\ll\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{i^{\varepsilon_0}}+\varepsilon_i}{i}<\infty.$$

注意到 $\frac12(\alpha+1)>\beta$ 有

$$\sum_{k\le N}E(\xi_k^*)^2\ll\sum_{k\le N}\frac{k}{(\log k)^{\beta+(\alpha+1)/2}}+\sum_{k\le N}\frac{k^2}{(\log k)^{2\beta}}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{\eta_i}{i}\ll\frac{N^2}{(\log N)^{2\beta}}.$$

这就证明了引理 5. ▌

引理 6 在定理 1 的条件之下，令 $2^k<i\le 2^{k+1},2^l<j\le 2^{l+1}$, 当 $l\ge l_0$ 时有

$$|cov(\xi_k^*,\xi_l^*)|\ll\frac{kl}{(\log k)^{\beta}(\log l)^{\beta}}2^{-(l-k)\tau}$$

其中 τ 是一常数且满足 $0<\tau\le 1/8$.

证 首先证明，对任意 $1\le i\le\frac{j}{2},j\ge j_0$ 和任意实数 x,y 有

$$|P(U_i\le x,U_j\le y)-P(U_i\le x)P(U_j\le y)|\ll\Big(\frac{i}{j}\Big)^{\tau}.\tag{8}$$

令 $\rho=\frac{i}{j}$, 由 Chebyshev 不等式有

$$P\Big(\Big|\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2j}}\Big|\ge\rho^{1/8}\Big)=P\Big(\Big|\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2i}}\Big|\ge\sqrt{\frac{j}{i}}\rho^{1/8}\Big)\le\frac{i}{j}\rho^{-1/4}\le\rho^{1/8}\le\rho^{\tau_1}$$

其中 τ_1 是一常数满足 $0<\tau_1\le 1/8$.

由 Markov 不等式和 (6) 式，当 $j\ge j_0$ 时有

$$P(|R_j|\ge\rho^{1/8})\le\frac{E|R_j|}{\rho^{1/8}}\ll\frac{\log j}{j^{1/2}\rho^{1/8}}=\rho^{1/8}\frac{\log j}{j^{1/4}i^{1/4}}\ll\rho^{\tau_2}$$

其中 τ_2 是一常数满足 $0<\tau_2\le 1/8$.

由 Markov 不等式有

$$\begin{aligned}P\Big(\Big|\sqrt{1-\rho}\frac{b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}\Big|\ge\rho^{1/8}\Big)&=P\Big(\Big|\frac{S_i}{\sqrt{i}}\Big|\ge\sqrt{\frac{2j}{i}}\frac{1}{b_{i+1,j}}\rho^{1/8}\Big)\\&\le\frac{1}{2}\rho^{3/4}(b_{i+1,j})^2\le\frac{1}{2}\rho^{3/4}\Big(\sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{k}\Big)^2\\&\ll\rho^{3/4}\Big(\log(\frac{j}{i})\Big)^2\ll\rho^{\tau_3}\end{aligned}$$

其中 τ_3 是一常数满足 $0<\tau_3\le 1/8$.

由引理 2 有

$$P\Big(y-3\rho^{1/8}\le\sqrt{1-\rho}\frac{S_{j,j}-S_{i,i}-b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}\le y\Big)\ll\frac{3\rho^{1/8}+1}{\sqrt{j}}\le\rho^{\tau_4}$$

其中 τ_4 是一常数满足 $0<\tau_4\le 1/8$.

令 $\tau=\min\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$, 由引理 1 有

$$\begin{aligned}&P(U_i\le x,U_j\le y)\\&=P\Big(U_i\le x,\frac{S_{j,j}}{\sqrt{2j}}+R_j\le y\Big)\\&=P\Big(U_i\le x,\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2j}}+\sqrt{1-\rho}\frac{S_{j,j}-S_{i,i}-b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}+\sqrt{1-\rho}\frac{b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}+R_j\le y\Big)\\&\ge P\Big(U_i\le x,\sqrt{1-\rho}\frac{S_{j,j}-S_{i,i}-b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}\le y\Big)\\&\quad-P\Big(y-3\rho^{1/8}\le\sqrt{1-\rho}\frac{S_{j,j}-S_{i,i}-b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}\le y\Big)-P\Big(|\frac{S_{i,i}}{\sqrt{2j}}|\ge\rho^{1/8}\Big)\\&\quad-P\Big(|\sqrt{1-\rho}\frac{b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}|\ge\rho^{1/8}\Big)-P(|R_j|\ge\rho^{1/8})\\&\ge P\Big(U_i\le x,\sqrt{1-\rho}\frac{S_{j,j}-S_{i,i}-b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}\le y\Big)-\rho^{\tau}\\&=P(U_i\le x)P\Big(\sqrt{1-\rho}\frac{S_{j,j}-S_{i,i}-b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}\le y\Big)-\rho^{\tau}.\end{aligned}$$

使用同样的方法可以得到这个联合分布的上估计，因此存在某一常数 M 使得

$$P(U_i\le x,U_j\le y)=P(U_i\le x)P\Big(\sqrt{1-\rho}\frac{S_{j,j}-S_{i,i}-b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}\le y\Big)+M\rho^{\tau}.$$

同样地，存在某一常数 M' 使得

$$P(U_i\le x)P(U_j\le y)=P(U_i\le x)P\Big(\sqrt{1-\rho}\frac{S_{j,j}-S_{i,i}-b_{i+1,j}S_i}{\sqrt{2j-2i}}\le y\Big)+M'\rho^{\tau}.$$

综上可得 (8) 式成立.

令 $G_{i,j}(x,y)$ 表示 U_i 和 U_j 的联合分布函数，当 $l \geq l_0$ 时，由 (7)(8) 两式有

$$
\begin{aligned}
&\Big|cov\Big(f(U_i)I\Big\{f(U_i)\leq \frac{k}{(\log k)^\beta}\Big\}, f(U_j)I\Big\{f(U_j)\leq \frac{l}{(\log l)^\beta}\Big\}\Big)\Big| \\
=&\Big|\int_{|x|\leq a_k}\int_{|y|\leq a_l} f(x)f(y)d(F_{i,j}(x,y)-F_i(x)F_j(y))\Big| \\
\ll&\frac{kl}{(\log k)^\beta(\log l)^\beta}2^{-(l-k-1)\tau}
\end{aligned}
$$

于是

$$
|cov(\xi_k^*,\xi_l^*)| \ll \frac{kl}{(\log k)^\beta(\log l)^\beta}2^{-(l-k)\tau}
$$

引理 6 证毕. ∎

引理 7 在定理 1 的条件之下，令 $\zeta_k=\xi_k^*-E\xi_k^*$ 则

$$
E(\zeta_1+\cdots+\zeta_N)^2 = O\Big(\frac{N^2}{(\log N)^{2\beta-1}}\Big),\quad N\to\infty.
$$

证 由引理 6 有

$$
\Big|\sum_{\substack{1\leq k\leq l\leq N\\ l-k>\frac{10}{\tau}\log N}} E(\zeta_k\zeta_l)\Big| \ll \frac{N^2}{(\log N)^{2\beta}}N^2 2^{-10\log N}=o(1).
$$

另一方面，令 $\|\cdot\|$ 表示 L_2 范数，由引理 5 和 Cauchy-Cchwarz 不等式有

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{\substack{1\leq k\leq l\leq N\\ l-k\leq\frac{10}{\tau}\log N}} E(\zeta_k\zeta_l)\Big| &\leq \sum_{\substack{1\leq k\leq l\leq N\\ l-k\leq\frac{10}{\tau}\log N}} \|\zeta_k\|\|\zeta_l\| \leq \sum_{\substack{1\leq k\leq l\leq N\\ l-k\leq\frac{10}{\tau}\log N}}\|\xi_k^*\|\|\xi_l^*\| \\
&= \sum_{0\leq j\leq\frac{10}{\tau}\log N}\sum_{k=1}^{N-j}\|\xi_k^*\|\|\xi_{k+j}^*\| \\
&\leq \Big(\sum_{k=1}^N\|\xi_k^*\|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{l=1}^N\|\xi_l^*\|^2\Big)^{1/2}\frac{10}{\tau}\log N \\
&\leq \frac{N^2}{(\log N)^{2\beta-1}}\frac{10}{\tau} = O\Big(\frac{N^2}{(\log N)^{2\beta-1}}\Big)
\end{aligned}
$$

因此引理 7 得证. ∎

定理的证明 由引理 7 可得

$$
E\Big(\frac{\zeta_1+\cdots+\zeta_N}{N}\Big)^2 = O\Big((\log N)^{1-2\beta}\Big).
$$

令 $N_k=[e^{k\lambda}]$, $(2\beta-1)^{-1}<\lambda<1$ 则有

$$
\sum_{k=1}^\infty E\Big(\frac{\zeta_1+\cdots+\zeta_{N_k}}{N_k}\Big)^2<\infty
$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\zeta_1+\cdots+\zeta_{N_k}}{N_k}=0 \quad \text{a.s.} \tag{9}$$

注意到对 $2^k < i \le 2^{k+1}$ 有

$$\begin{aligned}Ef(U_i)I\Big\{f(U_i)\le\frac{k}{(\log k)^\beta}\Big\}&=\int_{|x|\le a_k}f(x)dG_i(x)\\&=\int_{|x|\le a_k}f(x)d\Phi\Big(\frac{x}{\sigma_i}\Big)+\int_{|x|\le a_k}f(x)d\Big(G_i(x)-\Phi\Big(\frac{x}{\sigma_i}\Big)\Big)\end{aligned}$$

因为 $\sigma_i\le 1$, $\lim\limits_{i\to\infty}\sigma_i=1$, 设 $m=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)d\Phi(x)$ 则有

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{2^k<i\le 2^{k+1}}\left|\int_{|x|\le a_k}f(x)d\Phi(\frac{x}{\sigma_i})-m\right|=0$$

结合 (7) 式有

$$\left|Ef(U_i)I\Big\{f(U_i)\le\frac{k}{(\log k)^\beta}\Big\}-m\right|\le\frac{k\eta_i}{(\log k)^\beta}+o_k(1)$$

因此

$$E\xi_k^*=m\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{i}+\vartheta_k\frac{k}{(\log k)^\beta}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{\eta_i}{i}+o_k(1),\quad |\vartheta_k|\le 1$$

利用 $\sum\limits_{i\le L}1/i=\log L+O(1)$ 和 $\sum\eta_i/i<\infty$ 可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{E(\xi_1^*+\cdots+\xi_N^*)}{\log 2^{N+1}}-m\right|&\ll\frac{1}{N}\sum_{k\le N}\frac{k}{(\log k)^\beta}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{\eta_i}{i}+o_N(1)\\&=O((\log N)^{-\beta})+o_N(1)=o_N(1)\end{aligned}$$

因此由 (9) 式可得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\xi_1^*+\cdots+\xi_{N_k}^*}{\log 2^{N_k+1}}=m \quad \text{a.s.}$$

再由引理 4 就有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\xi_1+\cdots+\xi_{N_k}}{\log 2^{N_k+1}}=m \quad \text{a.s.} \tag{10}$$

注意到 $\lambda<1$ 蕴涵着 $\lim\limits_{k\to\infty}N_{k+1}/N_k=1$, 于是由 (**??**) 式和 ξ_k 的正性可得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\xi_1+\cdots+\xi_N}{\log 2^{N+1}}=m \quad \text{a.s.}$$

即 (4) 式对子列 $N=2^k$ 成立. 再一次使用 ξ_k 的正性可得 (4) 式成立. ▮

参 考 文 献

1 Berkes I, Csáki E, Horváth L. Almost sure limit theorems under minimal conditions. Statist Probab lett, 1998, **37**(1): 67–76
2 Berkes I, Dehling H. Some limit theorems in log density, Ann Probab, 1993, **21**(3): 1640-1670
3 Brosamler Z D. An almost everywhere central limit theorem. Math Proc Cambridge Phil Soc, 1988, **104**(3): 561–574
4 Chen P. On the law of the iterated for products of sums. Acta Mathetatica Scientia, 2008, **28**(1): 66–72 (in Chinese)
5 Feller W. The law of iterated logarithm for identically distributed random variables. Ann Math, 1946, **47**(4): 631–638
6 Friedman N, Katz M, Koopmans L H. Convergence rates for the central limit theorem. Proc Nat Acad Sci USA, 1966, **56**(4): 1062–1065
7 Gonchigdanzan K, Rempala G. A note on the almost sure limit theorem for the product of partial sums. Appl Math lett, 2006, **19**(2): 191–196
8 Ibragimov I, Lifshits M. On the convergence of generalized moments in almost sure central limit theorem. Statist Probab Lett, 1998, **40**(4): 343–351
9 Lacey M, Philipp W. A note on the almost sure central limit theorem. Statist Probab Lett, 1990, **9**(3): 201–205
10 Lu X, Qi Y. A note on asymptotic distribution of products of sums. Statist Probab Lett, 2004, **68**(4): 407–413
11 Petrov V. Sums of independent random variables. New York: Springer-Verlag, 1975
12 Qi Y. Limit distributions for products of sums. Statist Probab Lett, 2003, **62**(1): 93–100
13 Rempala G, Wesolowski J. Asymptotics for products of sums and U-statistics. Elect Comm in Probab, 2002, **7**(2): 47–54
14 Rempala G, Wesolowski J. Asymptotics for products of independent sums with an application to Wishart determinants. Statist Probab Lett, 2005, **74**(2): 129–138
15 Schatte P. On strong versions of the central limit theorem. Math Nachr, 1988, **137**(1): 249–256
16 Schatte P. On the central limit theorem with almost sure convergence. Probab Math Statist, 1991, **11**(2): 237–246

Almost Sure Central Limit Theorem for the Product of Partial Sums

[1]Tan Zhongquan [2]Peng Zuoxiang
([1]*Department of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi 563002;*
[2]*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715*)

Abstract: Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of i.i.d positive random variables with $E(X_1) = \mu > 0$, $Var(X_1) = \sigma^2$ and $E|X_1|^3 < \infty$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Denote $\gamma = \sigma/\mu$ the coefficient of variation. We give an unbounded measurable function g to satisfy the almost sure central limit theorem, i.e.,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} g\left(\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} S_k}{n!\mu^n}\right)^{\frac{1}{\gamma\sqrt{n}}}\right) = \int_0^\infty g(x) \mathrm{d}F(x) \quad \text{a.s.}$$

where $F(\cdot)$ is the distribution function of the random variable $e^{\sqrt{2}\xi}$ and ξ is a standard normal random variable.

Key words: Almost sure central limit theorem; Partial sums; Unbounded measurable function.
MR(2000) Subject Classification: 60F15; 60F05