2005,**25A**(5):722－733

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

带脉冲的 Emden-Fowler 方程次线性奇异边值问题的正解*

[1] 闫宝强 [2] 代丽美
([1] 山东师范大学数学系 济南 250014; [2] 北京师范大学数学科学学院 北京 100875)

摘要: 该文讨论了带脉冲的 Emden-Fowler 方程次线性奇异 Dirichlet 边值问题,利用上下解方法得到了该类问题正解存在的充分必要条件. 在脉冲的影响下得到了多解的存在性结果.

关键词: 奇异边值问题;脉冲;正解。

MR(2000)主题分类: 34B15;34A37 **中图分类号:** O175.8 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2005)05-722-12

1 引言

关于一般 Emden-Fowler 方程的边值问题

$$x'' + p(t)x^{\lambda} = 0 , \tag{1.1}$$

其中 $\forall\, t\in(0,1)$, $p\in C(0,1)$, $p(t)\geqslant 0$, $\lambda\in R$, 已做了很多研究工作(见文[1－3], [7], [9－13]及其相关文献),并且得到了很好的结果. 另一方面,许多人也考虑了带脉冲的微分方程. 例如, A R Agwal,D R′Regan, D Guo 已讨论了脉冲边值问题并给出了一些正解存在的充分条件[4－6]. 但是由于缺乏脉冲上下解的方法, 问题(1.1)还没有正解存在的充分必要条件. 本文中我们考虑脉冲奇异边值问题

$$\begin{cases} x'' + p(t)x^{\lambda} = 0, \quad t\in(0,1)-\{t_1\}; \\ \Delta x\ |_{t=t_1} = I(x(t_1)); \\ \Delta x\ |_{t=t_1} = -\dfrac{1}{1-t_1}I(x(t_1)); \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\lambda\in(0,1)$, $p(t)>0$, $t\in(0,1)$, $p(t)\in C(0,1)$在 $t=0$ 和 $t=1$ 有奇异性.

在第二节,我们得到了一个关于二阶脉冲微分方程边值问题上下解方法的新定理, 它改进了文[2]中的定理 1. 在第三节,我们用此定理得到了脉冲奇异问题(1.2)正解存在的充分必要条件, 这与文[1]中的结论不同. 在第四节, 虽然 $\lambda\in(0,1)$, 但由于脉冲的影响,我们给出了方程(1.2)多个正解的存在性定理, 并给出了例子说明方程(1.2)可能没有正解.

2 预备知识

考虑两点边值问题

收稿日期:2003-12-11; 修订日期:2004-12-01

E-mail:bqyan819@beelink.com

* 基金项目:山东省优秀中青年科学家奖励基金资助

$$\begin{cases} x''+f(t,x)=0, & t\in(0,1)-\{t_1\};\\ \Delta x\mid_{t=t_1}=I(x(t_1)); \\ \Delta x'\mid_{t=t_1}=-\dfrac{1}{1-t_1}I(x(t_1)); \\ x(0)=0,x(1)=0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $f:D\to R$ 连续，$D\subseteq(0,1)\times R$，$\Delta x|_{t=t_1}=x(t_1+0)-x(t_1)$，$\Delta x'|_{t=t_1}=x'(t_1+0)-x'(t_1-0)$，$I:R\to R$ 连续单增. 我们称 $x(t)$是(2.1)式的解是指 $x\in PC([0,1],R)\cap PC^2((0,1),R)$，$\forall t\in(0,1)$，$(t,x(t))\in D$ 且 $x''(t)+f(t,x(t))=0$，$\forall t\in(0,1)-\{t_1\}$，$\Delta x|_{t=t_1}=I(x(t_1))$，$\Delta x'|_{t=t_1}=-\dfrac{1}{1-t_1}I(x(t_1))$，$x(0)=0$，$x(1)=0$,其中 $PC([0,1],R)=\{x:[0,1]\to R|x(t)$在 $t\neq t_1$ 连续，$x(t)$在 $t=t_1$ 左连续，$x(t_1+0)$存在$\}$，$PC^1((0,1),R)=\{x:(0,1)\to R|x'(t)$在 $t\neq t_1$ 连续，$x'(t_1+0)$和 $x'(t_1-0)$存在$\}$，$PC^2((0,1),R)=\{x:(0,1)\to R|x''(t)$在 $t\neq t_1$ 连续,$\lim\limits_{t\to t_1^+}x''(t)$和$\lim\limits_{t\to t_1^-}x''(t)$存在$\}$. 对 $x\in PC([0,1],R)$，定义 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$. 由文[9]和[14]知，$PC([0,1],R)$是 Banach 空间.

设 $\alpha\in PC([0,1],R)\cap PC^2((0,1),R)$满足$\forall t\in(0,1)$，$(t,\alpha(t))\in D$ 且

$$\begin{cases} \alpha''(t)+f(t,\alpha(t))\geqslant 0, & t\in(0,1)-\{t_1\};\\ \Delta\alpha\mid_{t=t_1}=I(\alpha(t_1)); \\ \Delta\alpha'\mid_{t=t_1}=-\dfrac{1}{1-t_1}I(\alpha(t_1)); \\ \alpha(0)\leqslant 0,\ \alpha(1)\leqslant 0, \end{cases}$$

则称 $\alpha(t)$是问题(2.1)的一个下解. 利用同样的方法可给出问题(2.1)上解的定义，只是把上述不等式的方向改变即可. 如果 $\alpha,\beta\in PC([0,1],R)$，$\forall t\in[0,1]$满足 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$ ，我们定义

$$D_\alpha^\beta=\{(t,x)\in(0,1)\times R\mid\alpha(t)\leqslant x\leqslant\beta(t),t\in(0,1)\}.$$

那么我们有下列结果

定理 2.1　设 $\alpha(t)$，$\beta(t)$分别是问题(2.1)的下上解且

$$\alpha(t)\leqslant\beta(t),\quad\forall t\in[0,1],$$

并假设 $D_\alpha^\beta\subseteq D$. 进一步假设存在函数 $h\in C((0,1),R^+)$使得

$$|f(t,x)|\leqslant h(t),\quad\forall(t,x)\in D_\alpha^\beta$$

且

$$\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

则问题(2.1)至少有一解 $\bar{x}(t)$使得

$$\alpha(t)\leqslant\bar{x}(t)\leqslant\beta(t),\quad\forall t\in(0,1).$$

证　首先,定义辅助函数

$$f^*(t,x)=\begin{cases} f(t,\alpha(t)), & \forall x<\alpha(t);\\ f(t,x), & \forall x\in(\alpha(t),\beta(t));\\ f(t,\beta(t)), & \forall x>\beta(t); \end{cases}$$

$$I^*(x)=\begin{cases} I(\alpha(t_1)), & \forall x<\alpha(t_1);\\ I(x), & \forall x\in(\alpha(t_1),\beta(t_1));\\ I(\beta(t_1)), & \forall x>\beta(t_1). \end{cases}$$

容易看出

$$|f^*(t,x)| \leqslant h(t), \quad \forall (t,x) \in (0,1) \times R.$$

考虑问题

$$\begin{cases} x'' + f^*(t,x) = 0, t \in (0,1) - \{t_1\}; \\ \Delta x \mid_{t=t_1} = I^*(x(t_1)); \\ \Delta x' \mid_{t=t_1} = -\dfrac{1}{1-t_1} I^*(x(t_1)); \\ x(0) = 0, x(1) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

下证如果 $x(t)$是(2.2)式的任一解，则 $\forall t \in [0,1]$，一定有 $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$. 所以 $x(t)$是(2.1)式的一个解.

事实上,如果存在 $t^* \in (0,1)$使得 $x(t^*) < \alpha(t^*)$,则 t^* 有下列三种情况

(1) 假设 $t^* < t_1$. 取 $r = \inf\{t < t^* \mid x(s) < \alpha(s),\ \forall s \in [t,t^*], t \in (0,1)\}$, $r' = \sup\{t > t^* \mid x(s) < \alpha(s),\ \forall s \in [t^*,t],\ t \in (0,1)\}$. 现在我们讨论 r'，则有两种情况

(a) 第一种情况是存在 $t' \in (t^*, t_1]$ 使得 $x(t') = \alpha(t')$. 在这种情况下，$r' \leqslant t_1$. 则 $\forall t \in (r,r')$, $x(r) = \alpha(r)$，$x(r') = \alpha(r')$，$x(t) < \alpha(t)$且 $\forall t \in (r,r')$，有 $f^*(t,x(t)) = f(t,\alpha(t))$，因此

$$x''(t) + f(t,\alpha(t)) = 0, \quad \forall t \in (r,r').$$

另一方面,由于 $\alpha(t)$满足

$$\alpha''(t) + f(t,\alpha(t)) \geqslant 0,\ \forall t \in (r,r').$$

令 $z(t) = \alpha(t) - x(t)$ ，$t \in [r,r']$，有

$$z(r) = z(r') = 0,\ z''(t) \geqslant 0, \forall t \in (r,r').$$

由最大值原理可得

$$z(t) \leqslant 0,\ \forall t \in (r,r').$$

即 $\forall t \in (r,r')$，$\alpha(t) \leqslant x(t)$ ，与 $\alpha(t^*) > x(t^*)$矛盾.

(b) 第二种情况是 $\forall t \in [t^*, t_1]$，$x(t) < \alpha(t)$. 在这种情况下，$\alpha(t_1+0) = \alpha(t_1) + \Delta\alpha|_{t=t_1} > x(t_1) + I(\alpha(t_1)) = x(t_1) + I^*(x(t_1)) = x(t_1+0)$. 因此 $r' > t_1$，且 $x(r) = \alpha(r)$，$x(r') = \alpha(r')$, $x(t) < \alpha(t)$，$\forall t \in (r,r')$, $f^*(t,x(t)) = f(t,\alpha(t))$. 故

$$x''(t) + f(t,\alpha(t)) = 0, \quad \forall t \in (r,r') - \{t_1\}.$$

另一方面，由于 $\alpha(t)$ 满足

$$\alpha''(t) + f(t,\alpha(t)) \geqslant 0, \quad \forall t \in (r,r') - \{t_1\}.$$

令 $z(t) = \alpha(t) - x(t)$，对 $t \in [r,r']$，则有

$$\begin{cases} z''(t) \geqslant 0, \quad \forall t \in (r,r') - \{t_1\}; \\ \Delta z \mid_{t=t_1} = 0; \\ \Delta z' \mid_{t=t_1} = 0; \\ z(r) = 0,\ z(r') = 0. \end{cases}$$

由于 $\forall t \in (r,t_1) \cup (t_1,r')$，$z''(t) \geqslant 0$，因此 $z'(t)$单增且在 $(r,t_1) \cup (t_1,r')$上连续. 又 $\Delta z'|_{t=t_1} = 0$，因此我们可说 $z'(t)$在(r,r')上单增且连续. 但据 Lagrange 中值定理和 $z(r) = 0$，$z(t_1) > 0$ 知，存在 $t' \in (r,t_1)$使得 $z'(t') > 0$. 又由于 $z(t_1+0) > 0$，$z(r') = 0$. 类似的，存在 $r'' \in (t_1,r')$使得 $z'(r'') < 0$,矛盾.

据上述讨论排除可能性(1).

(2) 假设 $t^*=t_1$. 类似的，令 $r=\inf\{t<t^* \mid x(s)<\alpha(s),\ \forall s\in[t,t^*],\ t\in(0,1)\}$，$r'=\sup\{t>t^* \mid x(s)<\alpha(s),\ \forall s\in[t^*,t],\ t\in(0,1)\}$. 在$(r,r')$上的结果和(1)中的情形(b)相同。因此情形(2)不可能成立.

(3) 假设 $t^*>t_1$. 令 $r=\inf\{t<t^* \mid x(s)<\alpha(s),\ \forall s\in[t,t^*],\ t\in(0,1)\}$，$r'=\sup\{t>t^* \mid x(s)<\alpha(s),\ \forall s\in[t^*,t],\ t\in(0,1)\}$. 我们现在讨论 r，也有两种可能性.

(a′) 第一种可能性就是存在 $t'\in(t_1,t^*]$ 使得 $\alpha(t')=x(t')$或 $\alpha(t_1+0)=x(t_1+0)$。类似于(1)中情形(a)的证明，容易证明这种情况会导致矛盾。

(b′) 第二种情况是 $\forall t\in(t_1,t^*]$，$x(t)<\alpha(t)$，$x(t_1+0)=x(t_1)+I^*(x(t_1))<\alpha(t_1+0)=\alpha(t_1)+\Delta\alpha|_{t=t_1}$. 由于 $I(x)$ 单增，我们有 $x(t_1)<\alpha(t_1)$. 因此在(r,r')上的结果与(1)中的情形(b)相同. 这不可能.

由 (1)，(2)和(3)的证明，可得 $\forall t\in[0,1]$，$\alpha(t)\leqslant x(t)$. 类似可得 $x(t)\leqslant\beta(t)$，$t\in[0,1]$.

综上所述，若 $x(t)$是(2.2)式的解，则 $x(t)$一定是(2.1)式的解.

由于 $|f^*(t,x)|\leqslant h(t)$和 $\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s<+\infty$，我们可以考虑积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f^*(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{1-t}{1-t_1}\sum_{0<t_1<t}I^*(x(t_1)),\quad t\in[0,1],\tag{2.3}$$

其中 $G(t,s)$是$\begin{cases}x''=0,\\ x(0)=x(1)=0\end{cases}$的格林函数。易见(2.3)式的解一定是(2.2)式的解.

对 $x\in PC([0,1],R)$，定义

$$(Tx)=\int_0^1 G(t,s)f^*(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{1-t}{1-t_1}\sum_{0<t_1<t}I^*(x(t_1)),\quad t\in[0,1].$$

由控制收敛定理，容易看出 $T:PC([0,1],R)\to PC([0,1],R)$是一个连续算子且 $T(PC([0,1],R)$有界. 下面我们证明 $T(PC([0,1],R)$是相对紧的.

事实上，对 $t\in[0,1]-\{t_1\}$，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\mathrm{d}((Tx)(t))}{\mathrm{d}t}\right|\\ \leqslant&\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t(s(1-t)f^*(s,x(s))\mathrm{d}s\right|+\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^1 t(1-s)f^*(s,x(s))\mathrm{d}s\right|+\frac{1}{1-t_1}\left|I^*(x(t_1))\right|\\ \leqslant&\int_0^t s\left|f^*(s,x(s))\right|\mathrm{d}s+\int_t^1(1-s)\left|f^*(s,x(s))\right|\mathrm{d}s+\left|I^*(x(t_1))\right|\\ =&\gamma(t)+\left|I^*(x(t_1))\right|.\end{aligned}$$

我们仅需证明 $\gamma\in L^1([0,1],R^+)$. 这足以保证 $T(PC([0,1],R))$是相对紧的. 通过简单计算可得

$$\begin{aligned}&\int_0^1|\gamma(s)|\mathrm{d}s\\ \leqslant&\lim_{t\to1^-}(1-t)\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s+\lim_{t\to1^+}t\int_t^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s+2\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s\\ \leqslant&4\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s<+\infty.\end{aligned}$$

据 Leray-Schauder 不动点定理知 ，T 至少有一个不动点 $\bar{x}\in PC[0,1]$. 因此 $\bar{x}(t)$是方程(2.1)的一个解. ▌

3 正解存在的充分必要条件

为方便起见，我们列出下列假设

$$p(t)>0,\ p\in C(0,1),\quad \forall t\in(0,1),\ 0<\lambda<1. \tag{3.1}$$

我们有下面的结果

定理 3.1 假设(3.1)式成立，$I\in C(R^+,R^+)$ 单增且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{x}=0$. 则问题(1.2)有 $PC([0,1],R)$ 正解的充分必要条件是

$$0<\int_0^1 t(1-t)p(t)\mathrm{d}t<+\infty. \tag{3.2}$$

证 1) 必要性. 设 $x(t)$是问题(1.2)的一个正解. 由 $x''(t)\leqslant 0$，知 $x'(t)$ 在$(0,1)$单减. 由于 $x(0)=0$，$x(t_1)>0$，$x(t_1+0)>0$，$x(1)=0$，由 Lagrange 中值定理知，存在 $t'\in(0,t_1)$，$t''\in(t_1,1)$使得 $x'(t')>0$，$x(t'')<0$.

当 $t\in(0,t')$时，有

$$\int_t^{t'}p(s)x^\lambda(s)\mathrm{d}s=-\int_t^{t'}x''(s)\mathrm{d}s=x'(t)-x'(t')<x'(t),$$

两边同乘以 $x^{-\lambda}(t)$ 并在$[0,t']$上积分，有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_0^{t'}x^{-\lambda}(t)\int_t^{t'}p(s)x^\lambda(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{t'}x^{-\lambda}(t)x'(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{x^{1-\lambda}(t')-x^{1-\lambda}(0)}{1-\lambda}<+\infty.\end{aligned}$$

因为 $x''(t)\leqslant 0$，$x(t')>0$，$t\in(0,t')$，所以 $x(t)$在$[0,t']$上单增. 这意味着

$$\int_t^{t'}p(s)\mathrm{d}s\leqslant x^{-\lambda}(t)\int_t^{t'}p(s)x^\lambda(s)\mathrm{d}s,\quad t\in(0,t'].$$

因此

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_0^{t'}sp(s)\mathrm{d}s=\int_0^{t'}\mathrm{d}t\int_t^{t'}p(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^{t'}x^{-\lambda}(t)\int_t^{t'}p(s)x^\lambda(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^{t'}x^{-\lambda}(t)\int_t^{t'}p(s)x^\lambda(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t<+\infty.\end{aligned}$$

利用类似的方法，可证得

$$\int_{t''}^1(1-s)p(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

由于 $p(t)\in C(0,1)$，可得

$$\int_{t'}^{t''}s(1-s)p(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

从而

$$0<\int_0^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

2) 充分性. 假设(3.2)式成立. 令

$$q_1(t)=(1-t)\int_0^t s^{1+\lambda}(1-s)^\lambda p(s)\mathrm{d}s+t\int_t^1 s^\lambda(1-s)^{1+\lambda}p(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],$$

$$q_2(t)=(1-t)\int_0^t sp(s)\mathrm{d}s+t\int_t^1(1-s)p(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

易知对 $t\in(0,1)$

$$0 < t(1-t)\int_0^1 s^{1+\lambda}(1-s)^{1+\lambda}p(s)\mathrm{d}s \leqslant q_1(t) < q_2(t) \leqslant \int_0^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s.$$

设 L_1 是常数满足 $L_1^{1-\lambda}=[\int_0^1 s^{1+\lambda}(1-s)^{1+\lambda}p(s)\mathrm{d}s]^\lambda$. 由(3.1)式与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x}=0$ 知，存在 L_2 使得 ${L_2}^{1-\lambda}>\max\{L_1,[\int_0^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s]^\lambda\}$ 且

$$\left[\frac{1-t}{1-t_1}\frac{I(L_2q_2(t_1))}{L_2}+q_2(t)\right]^\lambda-{L_2}^{1-\lambda}\leqslant 0,\quad t\in(t_1,1].$$

定义

$$\alpha(t)=\begin{cases}L_1q_1(t), & t\in[0,t_1];\\ L_1q_1(t)+\dfrac{1-t}{1-t_1}I(\alpha(t_1)), & t\in(t_1,1]\end{cases}$$

与

$$\beta(t)=\begin{cases}L_2q_2(t), & t\in[0,t_1];\\ L_2q_2(t)+\dfrac{1-t}{1-t_1}I(\beta(t_1)), & t\in(t_1,1].\end{cases}$$

则有

$$\alpha(t)\leqslant\beta(t),\quad \forall\, t\in[0,1].$$

且对 $t\in(0,t_1)$,易知

$$\begin{aligned}\alpha''(t)+p(t)\alpha^\lambda(t)&=-L_1p(t)t^\lambda(1-t)^\lambda+p(t){L_1}^\lambda{q_1}^\lambda(t)\\&=L_1^\lambda p(t)t^\lambda(1-t)^\lambda\Big(\Big(\frac{q_1(t)}{t(1-t)}\Big)^\lambda-L_1^{1-\lambda}\Big)\geqslant 0,\end{aligned}$$

对 $t\in(t_1,1]$，有

$$\begin{aligned}\alpha''(t)+p(t)\alpha^\lambda(t)&=-L_1p(t)t^\lambda(1-t)^\lambda+p(t)\Big[L_1q_1(t)+\frac{1-t}{1-t_1}I(\alpha(t_1))\Big]^\lambda\\&\geqslant-{L_1}^\lambda p(t)t^\lambda(1-t)^\lambda+p(t)L_1^\lambda q_1^\lambda(t)\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases}\alpha''(t)+p(t)\alpha^\lambda(t)\geqslant 0, & t\in(0,1)-\{t_1\};\\ \Delta\alpha\mid_{t=t_1}=I(\alpha(t_1));\\ \Delta\alpha'\mid_{t=t_1}=-\dfrac{1}{1-t_1}I(\alpha(t_1));\\ \alpha(0)=0,\ \alpha(1)=0.\end{cases}$$

另一方面对 $t\in(0,t_1)$，有

$$\beta''(t)+p(t)\beta^\lambda(t)=-L_2p(t)+p(t)L_2^\lambda{q_2}^\lambda(t)=L_2^\lambda p(t)(q_2^\lambda(t)-L_2^{1-\lambda})\leqslant 0;$$

对 $t\in(t_1,1]$，有

$$\begin{aligned}\beta''(t)+p(t)\beta^\lambda(t)&=-L_2p(t)+p(t)\Big[L_2q_2(t)+\frac{1-t}{1-t_1}I(\beta(t_1))\Big]^\lambda\\&=L_2^\lambda p(t)\Big[\Big(q_2(t)+\frac{1-t}{1-t_1}\frac{I(\beta(t_1))}{L_2}\Big)^\lambda-L_2^{1-\lambda}\Big]\\&\leqslant 0.\end{aligned}$$

故

$$\begin{cases}\beta''(t)+p(t)\beta^\lambda(t)\leqslant 0, & t\in(0,1)-\{t_1\};\\ \Delta\beta\mid_{t=t_1}=I(\beta(t_1));\\ \Delta\beta'\mid_{t=t_1}=-\dfrac{1}{1-t_1}I(\beta(t_1));\\ \beta(0)=0,\ \beta(1)=0.\end{cases}$$

因此由定理 2.1 可知问题(1.2)至少有一个解 $x^*(t)$满足 $\forall t\in[0,1]$ $\alpha(t)\leqslant x^*(t)\leqslant\beta(t)$. 定理证毕. ▌

定理 3.2 假设(3.1)式成立，$I\in C(R^+,R^+)$ 单增且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x}=0$. 那么问题(1.2)有 $PC^1([0,1],R)$ 正解的充分必要条件是

$$0<\int_0^1 t^\lambda(1-t)^\lambda p(t)\mathrm{d}t<+\infty. \tag{3.3}$$

证 1) 必要性. 假设 $x(t)$是问题(1.2)的一个 $PC^1[0,1]$正解. 则 $x'(0)$与 $x'(1)$存在. 利用与上定理相似的讨论可知存在 $t'\in(0,t_1)$，$t''\in(t_1,1)$使得 $x'(t')>0$，$x'(t'')<0$ 且 $x(t)$ 在$(0,t')$上单增，在$(t'',1)$单减且 $x'(0)>x'(t')>0>x'(t'')>x'(1)$. 可知 $\forall t\in[0,t']$

$$x(t)\geqslant x(0)+x'(0)(t-0)$$

且 $\forall t\in(t'',1]$

$$x(t)\geqslant x(1)+x'(1)(t-1).$$

故存在 $c>0$ 使得

$$x(t)\geqslant ct(1-t),\quad t\in[0,1],$$

这意味着

$$\begin{aligned}0&<\int_0^{t'}t^\lambda(1-t)^\lambda p(t)\mathrm{d}t\leqslant c^{-\lambda}\int_0^{t'}p(t)x^\lambda(t)\mathrm{d}t\\&=-c^{-\lambda}\int_0^{t'}x''(t)\mathrm{d}t=c^{-\lambda}(x'(0)-x'(t')<+\infty\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}0&<\int_{t''}^1 t^\lambda(1-t)^\lambda p(t)\mathrm{d}t\leqslant c^{-\lambda}\int_{t''}^1 p(t)x^\lambda(t)\mathrm{d}t\\&=-c^{-\lambda}\int_{t''}^1 x''(t)\mathrm{d}t=c^{-\lambda}(x'(t'')-x'(1))<+\infty,\end{aligned}$$

从而

$$0<\int_0^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

2) 充分性. 假设(3.3)式成立. 令

$$q(t)=(1-t)\int_0^t s^{1+\lambda}(1-s)^\lambda p(s)\mathrm{d}s+s\int_t^1 s^\lambda(1-s)^{1+\lambda}p(s)\mathrm{d}s.$$

则 $q\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$，且对 $t\in(0,1)$

$$0<t(1-t)\int_0^1 s^{1+\lambda}(1-s)^{1+\lambda}p(s)\mathrm{d}s\leqslant q(t)\leqslant t(1-t)\int_0^1 s^\lambda(1-s)^\lambda p(s),$$

$$q''(t)=-t^\lambda(1-t)^\lambda p(t).$$

设 L_1 是常数满足 $L_1^{1-\lambda}=[\int_0^1 s^{1+\lambda}(1-s)^{\lambda+1}p(s)\mathrm{d}s]^\lambda$，$L_2$ 是常数满足 $L_2^{1-\lambda}>\max\{L_1,[\int_0^1 s^\lambda(1-s)^\lambda p(s)\mathrm{d}s]^\lambda\}$ 且

$$\Big[\frac{1-t}{1-t_1}\frac{I(L_2q(t_1))}{L_2}+q(t)\Big]^\lambda-L_2{}^{1-\lambda}\leqslant 0,\quad t\in(t_1,1].$$

再设

$$\alpha(t)=\begin{cases}L_1q(t),& t\in[0,t_1];\\ L_1q(t)+\dfrac{1-t}{1-t_1}I(\alpha(t_1)),& t\in(t_1,1]\end{cases}$$

与

$$\beta(t)=\begin{cases}L_2q(t), & t\in[0,t_1];\\ L_2q(t)+\dfrac{1-t}{1-t_1}I(\beta(t_1)), & t\in(t_1,1].\end{cases}$$

则有

$$\alpha(t)\leqslant\beta(t),\quad \forall t\in[0,1].$$

与定理 1 充分性的证明相同,我们可知问题(1.2)有一正解 $x\in PC([0,1],R)\cap PC^2((0,1),R)$满足 $\forall t\in[0,1]$, $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$. 由(3.3)式, 有

$$p(t)x^\lambda(t)\leqslant p(t)\beta^\lambda(t)\leqslant L_2t^\lambda(1-t)^\lambda p(t),\quad t\in[0,t_1].$$

且对足够大的 $\bar{L}_2>L_2$

$$p(t)x^\lambda(t)\leqslant p(t)\beta^\lambda(t)\leqslant\bar{L}_2t^\lambda(1-t)^\lambda p(t),\quad t\in(t_1,1].$$

即

$$|x''(t)|\leqslant\bar{L}_2t^\lambda(1-t)^\lambda p(t),\quad t\in(0,1)-\{t_1\}.$$

上述不等式与(3.3)式表明 $x''(t)$在(0,1)上绝对可积. 因此 $x'(0+0)$与 $x'(1-0)$存在, 即 $x\in PC^1[0,1]$. 定理证毕. ∎

4　多个正解的存在性

首先列出下面两个引理

引理 4.1[8]　假设 P 是 Banach 空间 E 中的一个锥, Ω 是 E 中的一个开集, 且 $T:P\to P$ 是一个全连续算子. 如果 $\forall\lambda\in(0,1]$与 $x\in(\partial\Omega)\cap P$ 有 $x\neq\lambda Tx$, 则

$$i(T,\Omega\cap P,P)=1.$$

引理 4.2[8]　假设 P 是 Banach 空间 E 中的一个锥, Ω 是 E 中的一个开集, 且 $T:P\to P$ 是一个全连续算子. 如果 $\forall x\in(\partial\Omega)\cap P$ 有 $x\not\geq Tx$, 则

$$i(T,\Omega\cap P,P)=0.$$

对 $x\in PC[0,1]$, 如果 $f(t,x)$ 连续的, $G(t,s)f(s,x(s))$在[0,1]上可积, 其中 $G(t,s)$是$\begin{cases}u''=0,\\ u(0)=0,\ u(1)=1\end{cases}$的格林函数. 注意到, 如果 $x\in PC[0,1]$是下列方程的一个解

$$x(t)=\int_0^1G(t,s)x^\lambda(s)\mathrm{d}s+\frac{1-t}{1-t_1}\sum_{0<t_1<t}I(x(t_1)),\tag{4.1}$$

则 $x(t)$是方程(1.2)的一个解. 容易看出方程(4.1)与下列方程等价

$$x(t)-\frac{1-t}{1-t_1}\sum_{0<t_1<t}I(x(t_1))=\int_0^1G(t,s)x^\lambda(s)\mathrm{d}s.\tag{4.2}$$

设

$$y(t)=\begin{cases}x(t), & t\in[0,t_1];\\ x(t)-\dfrac{1-t}{1-t_1}I(y(t_1)), & t\in(t_1,1],\end{cases}$$

方程(4.2)就变为

$$y(t)=\int_0^1G(t,s)\Big(y(s)+\frac{1-s}{1-t_1}\sum_{0<t_1<t}I(y(t_1))\Big)^\lambda\mathrm{d}s.\tag{4.3}$$

现在考虑方程(4.3). 对 $y\in C[0,1]$, 定义

$$(Ty)(t)=\int_0^1 G(t,s)(y(s)+\frac{1-s}{1-t_1}\sum_{0<t_1<s}I(y(t_1)))^\lambda \mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],$$

$$P=\{x\in C([0,1],R^+)\mid x(t)\geqslant 0,\ x(t)\geqslant \|x\|t(1-t),\quad \forall t\in[0,1]\}.$$

引理 4.3 假设$\int_0^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s<+\infty$且$I\in C(R,R^+)$. 则 $T:P\to P$ 是一个全连续算子.

证 对 $x\in P$, 假设 $\|Tx\|=\max\{|(Tx)(t)|,t\in[0,1]\}=|(Tx)(t_0)|$. 则由于

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)}=\begin{cases}\dfrac{t(1-s)}{s(1-t_0)}\geqslant t(1-t), & t\leqslant s\leqslant t_0;\\ \dfrac{s(1-t)}{t_0(1-s)}\geqslant t(1-t), & t_0\leqslant s\leqslant t;\\ \dfrac{t(1-s)}{t_0(1-t)}\geqslant t(1-t), & t,t_0\leqslant s;\\ \dfrac{s(1-t)}{s(1-t_0)}\geqslant t(1-t), & t,t_0\geqslant s,\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}(Tx)(t)&=\int_0^1 G(t,s)(y(s)+\frac{1-s}{1-t_1}\sum_{0<t_1<s}I(y(t_1)))^\lambda \mathrm{d}s\\ &=\int_0^1\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)}G(t_0,s)(y(s)+\frac{1-s}{1-t_1}\sum_{0<t_1<s}I(y(t_1)))^\lambda \mathrm{d}s\\ &\geqslant t(1-t)\int_0^1 G(t_0,s)(y(s)+\frac{1-s}{1-t_1}\sum_{0<t_1<s}I(y(t_1)))^\lambda \mathrm{d}s\\ &=\|Tx\|t(1-t),\quad \forall t\in[0,1].\end{aligned}$$

故 $T(P)\subseteq P$. 其它证明已证[8], 在此省略. ▌

定理 4.1 假设条件(3.1)和$\int_0^1 s(1-s)p(s)\mathrm{d}s<+\infty$成立. 再假设

(a)

$$\sup_{c\in(0,+\infty)}\frac{c}{\int_0^1 G(s,s)p(s)\mathrm{d}s(c+\frac{1}{1-t_1}I(c))^\lambda}>1;\tag{4.4}$$

(b) $I(x)\in C(R^+,R^+)$ 是非减的且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{I(x)^\lambda}{x}=+\infty.$$

则方程(1.2)至少有两个正解.

证 首先, 由条件(a), 取 $R>0$ 使得

$$\frac{R}{\int_0^\infty G(s,s)p(s)\mathrm{d}s(R+\frac{1}{1-t_1}I(R))^\lambda}>1.\tag{4.5}$$

取 $1>t'>t_1$. 由条件(b), 存在 $R_1>\max\{R,1\}$使得$\forall x\geqslant R_1$

$$I^\lambda(x)\geqslant N^*x,\tag{4.6}$$

其中

$$N^*>(\int_{t_1}^{t'}G(\frac{1}{2},s)p(s)(\frac{1-s}{1-t_1})^\lambda \mathrm{d}s(1-t_1)t_1)^{-1}.$$

再取 $0<t''<t_1$. 因为 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{x^\lambda}{x}=+\infty$, 存在 $R_2<R$ 使得 $\forall\, x\leqslant R_2$

$$x^\lambda > xN^{**},$$

其中

$$N^{**} > \left(\int_{t''}^{t_1} G\left(\frac{1}{2},s\right)p(s)s(1-s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

定义

$$\Omega_1 = \{x\in C([0,1],R)\mid \|x\| < R\},$$

$$\Omega_2 = \{x\in C([0,1],R)\mid \|x\| < \frac{R_1}{t_1(1-t_1)}\}$$

与

$$\Omega_3 = \{x\in C([0,1],R)\mid \|x\| < R_2\}.$$

易见

$$\Omega_3\subseteq\Omega_1\subseteq\Omega_2.$$

下面我们考虑 $\Omega_1\cap P$, $\Omega_2\cap P$ 和 $\Omega_3\cap P$ 的性质.

(1) 我们要证明在$\partial\Omega_1\cap P$ 上引理 4.1 的条件成立。反证法，若存在 $\mu_0\in(0,1]$与和某一 $x\in\partial\Omega_1\cap P$，使得 $x=\mu_0 Tx$，则 $\forall\, t\in(0,1]$

$$|x(t)| = \left|\int_0^1 G(t,s)p(s)\Big(x(s)+\frac{1-s}{1-t_1}\sum_{0<t_1<t} I(x(t_1))\Big)^\lambda \mathrm{d}s\right.$$

$$\leqslant \int_0^1 G(s,s)p(s)\mathrm{d}s\Big(R+\frac{1}{1-t_1}I(R)\Big)^\lambda.$$

因此

$$R=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|\leqslant\int_0^1 G(s,s)p(s)\mathrm{d}s\Big(R+\frac{1}{1-t_1}I(R)\Big)^\lambda,$$

这意味着

$$\frac{R}{\int_0^1 G(s,s)p(s)\mathrm{d}s\Big(R+\frac{1}{1-t_1}I(R)\Big)^\lambda}\leqslant 1.$$

这与(4.5)矛盾。从而由引理 4.1，有

$$i(T,P\cap\Omega_1,P)=1. \tag{4.7}$$

(2) 我们证明在$\partial\Omega_2\cap P$ 上引理 4.2 的条件成立，也就是，对 $\forall\, x\in\partial\Omega_2\cap P$，一定有 $x\ngeq Tx$. 反证法，事实上，若存在 $x_0\in\partial\Omega_2\cap P$，使得 $x_0\geqslant Tx_0$. 由锥 P 的性质，易知 $x_0(t)\geqslant t(1-t)\|x_0\|=t(1-t)\dfrac{R_1}{(1-t_1)t_1}$，$t\in[0,1]$，这意味着 $x_0(t_1)\geqslant R_1$. 由于 $Tx_0\leqslant x_0$，则 $\forall\, t\in[0,1]$，$(Tx_0)(t)\leqslant x_0(t)$. 从而

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{1}{2}\right) &\geqslant (Tx)\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=\int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)p(s)\Big(x(s)+\frac{1-s}{1-t_1}\sum_{0<t_1<s}I(x(t_1))\Big)^\lambda\mathrm{d}s\\
&\geqslant\int_{t_1}^{t'} G\left(\frac{1}{2},s\right)p(s)\Big(\frac{1-s}{1-t_1}I(x(t_1))\Big)^\lambda\mathrm{d}s\\
&\geqslant\int_{t_1}^{t'} G\left(\frac{1}{2},s\right)p(s)\Big(\frac{1-s}{1-t_1}\Big)^\lambda\mathrm{d}s I(R_1)^\lambda
\end{aligned}$$

$$= \int_{t_1}^{t'} G(\frac{1}{2},s)p(s)(\frac{1-s}{1-t_1})^{\lambda}\mathrm{d}sN^* R_1$$

$$= \int_{t_1}^{t'} G(\frac{1}{2},s)p(s)(\frac{1-s}{1-t_1})^{\lambda}\mathrm{d}sN^* t_1(1-t_1)\frac{R_1}{t_1(1-t_1)}$$

$$> \|x\|.$$

这是一个矛盾．由引理 4.2，可得

$$i(T,\Omega_2 \cap P, P) = 0. \tag{4.8}$$

（3）我们证明在$\partial \Omega_3 \cap P$ 上引理 4.2 的条件成立。反证法，事实上，若存在 $x_0 \in \partial\Omega_3 \cap P$，使得 $x_0 \geqslant Tx_0$．从而，$\forall t \in [0,1]$，有 $x_0(t) \geqslant (Tx_0)(t)$．因此

$$x(\frac{1}{2}) \geqslant (Tx)(\frac{1}{2})$$

$$= \int_0^1 G(\frac{1}{2},s)p(s)(x(s)+\frac{1-s}{1-t_1}\sum_{0<t_1<s} I(x(t_1)))^{\lambda}\mathrm{d}s$$

$$\geqslant \int_{t''}^{t_1} G(\frac{1}{2},s)p(s)(x(s))^{\lambda}\mathrm{d}s$$

$$= \int_{t''}^{t_1} G(\frac{1}{2},s)p(s)N^{**}x(s)\mathrm{d}s$$

$$\geqslant \int_{t''}^{t_1} G(\frac{1}{2},s)N^{**}s(1-s)\mathrm{d}s\|x\|$$

$$> \|x\|.$$

这是一个矛盾．由引理 4.2，可得

$$i(T,\Omega_3 \cap P, P) = 0. \tag{4.9}$$

据(4.7)，(4.8)与(4.9)式，有

$$i(T,(\Omega_2 - \bar{\Omega}_1) \cap P,P) = -1, \tag{4.10}$$

$$i(T,(\Omega_1 - \bar{\Omega}_3) \cap P,P) = 1. \tag{4.11}$$

因此 T 有一个不动点 $x_1 \in (\Omega_1 - \bar{\Omega}_3) \cap P$ 与另一个不动点 $x_2 \in (\Omega_2 - \bar{\Omega}_1) \cap P$，且

$$x_1 \in ((\Omega_1 - \bar{\Omega}_3) \cap P),\ x_1 \in ((\Omega_2 - \bar{\Omega}_1) \cap P).$$

可见 $x_1(t)$，$x_2(t)$是方程(4.3)的两个不同的解．定义

$$y_1(t) = x_1(t) + \frac{1-t}{1-t_1}\sum_{0<t_1<t} I(x_1(t_1))$$

与

$$y_2(t) = x_2(t) + \frac{1-t}{1-t_1}\sum_{0<t_1<t} I(x_2(t_1)).$$

因此 $y_1(t)$与 $y_2(t)$是问题(1.2)的两个不同的正解．定理证毕． ▌

参 考 文 献

[1] Zhang Y. Positive solutions of singular sublinear Emden-Fowler boundary value problem. J M A A, 1994, **185**: 215－225

[2] Taliaferro S D. A nonlinear singular boundary value problem. Nonlinear Anal, 1979, **3**: 897－904

[3] Habets P, Zanolin F. Upper and lower solutions for a generalized Emden-Fowler equations. J M A A, 1994, **181**: 684－700

[4] Agarwal R, O'Regan D. Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations. Applied

Math Com, 2000, **114**: 51－59

[5] Guo D, Liu X Z. Impulsive integro-differential equations on unbounded domain in a Banach space. Nonlinear Studies, 1996, **3**: 49－57

[6] Guo D. Boundary value problems for impulsive integro-differential equation on unbounded domains in a Banach space. Applied Math Com, 1999, **99**: 1－15

[7] Xiyu Liu. Some existence and nonexistence principles for a class of singular boundary value problems. Nonl Anal, 1996, **27**: 1147－1164

[8] Guo Dajun, V Lakshmikantham. Nonlinear Problems in Abstract Cones. New York: Academic Press Inc, 1988

[9] Agarwal R P, O'Regan D. Twin solutions to singular dirichlet problems. J M A A, 1999, **240**: 433－445

[10] Kelevedjiev P. Nonnegative solutions to some singular second-order boundary value problems. Nonlinear Anal, 1999, **36**: 481－494

[11] Bobisud L E. Existence of solutions for nonlinear singular boundary value problems. Appl Anal, 1990, **35**: 43－57

[12] O'Regan D. Existence Theory for Ordinary Differential Equations. Dordrecht: Kluwer, 1997

[13] Agarwal R P, O'Regan D. Singular boundary value problems for suplinear second order ordinary and delay differential equations. Journal of Differential Equations, 1996, **130**: 333－355

[14] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989

Positive Solutions of Sigular Sublinear Emden-Fowler Boundary Value Problems with Impulse

Yan Baoqiang　Dai Limei

(*Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan* 250014)

Abstract: This paper considers the Dirichlet boundary value problem of the singular sublinear Emden-Fowler equations with impulse. A necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions to this problem is obtained by the method of lower and upper solutions. Moreover, under the influence of the impulse, a result on the existence of multiple solutions is also given.

Key words: Singular boundary value problems; Impulse; Positive solutions.

MR(2000) Subject Classification: 34B15; 34A37